

VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ V BRNĚ
FAKULTA ELEKTROTECHNIKY A KOMUNIKAČNÍCH TECHNOLOGIÍ
ÚSTAV MATEMATIKY

Diferenciální rovnice a jejich použití v elektrotechnice

(Elektrotechnika, elektronika, komunikační a řídicí technika)

**Josef Diblík
Jaromír Baštinec
Irena Hlavičková
Zdeněk Šmarda**



evropský
sociální
fond v ČR



EVROPSKÁ UNIE



MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ,
MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY



OP Vzdělávání
pro konkurenceschopnost



VYSOKÉ
UČENÍ
TECHNICKÉ
V BRNĚ

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Ústav matematiky FEKT VUT v Brně, 2014

<http://www.umat.feec.vutbr.cz>

Obrázky pomocí METAPOSTu a METAFONTu: Jaromír Kuben

Tento text byl vytvořen v rámci realizace projektu CZ.1.07/2.2.00/15.0156,
Inovace výuky matematických předmětů v rámci studijních programů FEKT a FIT VUT v Brně.



Součástí tohoto učebního textu jsou odkazy na tzv. maplety, tj. programy vytvořené v prostředí Maple. Tyto odkazy jsou v textu zvýrazněny barvou, příp. uvozeny slovem *maplet*. Maplety ke svému běhu nevyžadují software Maple – je však nutné mít na klientském počítači nainstalováno prostředí Java a nastavenou vhodnou úroveň zabezpečení prohlížeče i prostředí Java. Po kliknutí na odkaz mapletu se v závislosti na softwarovém prostředí klientského počítače zobrazí různá hlášení o zabezpečení – všechny dialogy je třeba povolit a spouštění požadovaných prvků neblokovat.



Doplňující součástí tohoto učebního textu jsou příklady zpracované v [elektronické bance příkladů](#).

Obsah

0.1	Vstupní test	6
	Cvičení	6
0.1.1	Řešení vstupního testu	7
1	Obyčejné diferenciální rovnice prvního řádu	8
1.1	Cíl kapitoly	8
1.2	Malé opakování	8
1.3	Exaktní rovnice a integrační faktor	9
1.3.1	Definice exaktní rovnice	10
1.3.2	Nalezení kmenové funkce	11
1.3.3	Integrační faktor	14
1.3.4	Integrační faktor jako funkce jedné proměnné	15
1.4	Shrnutí kapitoly	18
	Cvičení	18
	Výsledky	19
2	Některé typy obyčejných diferenciálních rovnic prvního řádu a jejich řešení	20
2.1	Cíl kapitoly	20
2.2	Bernoulliova rovnice	20
2.3	Riccatiova rovnice	22
2.4	Clairautova rovnice	23
2.5	Picardova metoda postupných aproximací	25
2.6	Shrnutí kapitoly	27
	Cvičení	27
	Výsledky	28
3	Lineární systémy obyčejných diferenciálních rovnic	30
3.1	Cíl kapitoly	30
3.2	Malé opakování o maticích a vektorech	30
3.3	Opakování o lineární homogenní rovnici n -tého řádu s konstantními koeficienty	33
3.4	Určení partikulárního řešení nehomogenní lineární diferenciální rovnice metodou odhadu	34
3.4.1	Věta o metodě odhadu	35

3.4.2	Ilustrace metody odhadu	35
3.5	Opakování o nalezení partikulárního řešení nehomogenní lineární diferenciální rovnice metodou variace konstant	38
3.6	Variace konstant v případě rovnic druhého řádu	38
3.7	Modifikace metody variace konstant v případě rovnic libovolného řádu	40
3.8	Příklad rovnice vyššího řádu popisující elektrický obvod	41
3.9	Vektorový tvar lineárního systému a existence řešení	44
3.10	Struktura řešení soustav lineárních diferenciálních rovnic	46
3.10.1	Homogenní soustavy	46
3.10.2	Nehomogenní soustavy	49
3.10.3	Fundamentální matice a její vlastnosti	51
3.11	Exponenciála matice a její užití	54
3.11.1	Definice exponenciály matice	54
3.12	Užití exponenciály matice	58
3.13	Metoda pro nalezení exponenciály matice	58
3.14	Řešení Cauchyovy úlohy pro lineární systémy užitím fundamentálních matic	60
3.14.1	Cauchyova úloha pro homogenní systém	60
3.14.2	Cauchyova úloha pro homogenní systém s konstantní maticí	60
3.14.3	Cauchyova úloha pro nehomogenní systém	61
3.14.4	Cauchyova úloha pro nehomogenní systém s konstantní maticí	61
3.15	Transformace lineární rovnice n -tého řádu na systém	62
3.16	Shrnutí kapitoly	63
3.17	Řešené příklady	63
	Cvičení	67
	Výsledky	69
4	Soustavy lineárních diferenciálních rovnic s konstantními koeficienty - řešení na bázi zobecněných vlastních vektorů	71
4.1	Cíl kapitoly	71
4.2	Formulace problému a postup jeho řešení	71
4.3	Případ reálných a navzájem různých kořenů charakteristické rovnice	72
4.4	Případ komplexních nenásobných vlastních čísel	75
4.5	Případ násobných vlastních čísel	80
4.6	Zobecněné vlastní vektory	80
4.7	Metoda vlastních vektorů	81
4.7.1	Konstrukce fundamentálního systému	81
4.7.2	Ilustrace - konstrukce fundamentálního systému	82
4.8	Weyrova maticová metoda	85
4.8.1	Schéma Weyrovy maticové metody	85
4.8.2	Konstrukce tabulky Weyrovy metody	86
4.9	Shrnutí kapitoly	87
4.10	Řešené příklady	87
	Cvičení	98
	Výsledky	98

5	Užití mocninných řad pro rovnice druhého řádu	100
5.1	Cíl kapitoly	100
5.2	Funkce gama	100
5.3	Besselova rovnice	101
5.3.1	Konstrukce řešení ve tvaru řady	101
5.3.2	Výpočet koeficientů řady	101
5.4	Besselovy funkce	103
5.5	Shrnutí kapitoly	105
	Cvičení	105
	Výsledky	105
6	Stabilita řešení systémů diferenciálních rovnic	106
6.1	Rovinný autonomní diferenciální systém	121
6.1.1	Cíl kapitoly	121
6.1.2	Autonomní diferenciální systém	121
6.1.3	Autonomní rovinný homogenní lineární systém	121
6.1.4	Fázové obrazy v případě reálných a různých kořenů charakteristické rovnice	124
6.2	Shrnutí kapitoly	131
6.3	Řešené příklady	132
	Cvičení	135
	Výsledky	136
7	Parciální diferenciální rovnice prvního řádu. Některé základní pojmy a metody	139
7.1	Cíl kapitoly	139
7.2	Pojem řešení parciální diferenciální rovnice	139
7.3	Základní problémy řešení parciálních diferenciálních rovnic	141
7.4	Parciální diferenciální rovnice prvního řádu	141
7.5	Formulace počáteční úlohy, pojem jejího řešení.	142
7.6	Nejjednodušší příklady parciálních rovnic prvního řádu	143
7.6.1	Rovnice typu $\frac{\partial z(x, y)}{\partial x} = 0$	143
7.6.2	Rovnice typu $\frac{\partial z(x, y)}{\partial x} = f(x, y)$	145
7.6.3	Rovnice předchozího typu s počáteční podmínkou $z(0, y) = \omega(y)$	145
7.6.4	Rovnice typu $\frac{\partial z(x, y)}{\partial x} = f_1(x) \cdot f_2(z)$	146
7.6.5	Lineární homogenní parciální rovnice prvního řádu	148
7.7	Shrnutí kapitoly	148
7.8	Řešené příklady	149
	Cvičení	150
	Výsledky	151

8	Charakteristický systém a charakteristiky. Pfaffova rovnice.	152
8.1	Cíl kapitoly	152
8.2	Charakteristický systém.	152
8.3	První integrály, existence řešení, obecné řešení	154
8.3.1	První integrály	154
8.3.2	Věty o existenci a jednoznačnosti řešení	155
8.3.3	Kvazilineární parciální diferenciální rovnice	157
8.4	Pfaffova rovnice.	163
8.5	Shrnutí kapitoly	167
8.6	Řešené příklady	167
	Cvičení	168
	Výsledky	169
9	Parciální diferenciální rovnice druhého řádu	170
9.1	Cíl kapitoly	170
9.2	Klasifikace rovnic na hyperbolické, parabolické a eliptické	170
9.3	Kanonické tvary	173
9.3.1	Hyperbolický typ	173
9.3.2	Parabolický typ	174
9.3.3	Eliptický typ	175
9.4	D'Alembertova metoda	176
9.5	Řešené příklady	178
	Cvičení	180
	Výsledky	181
10	Vlnová rovnice, D'Alembertův vzorec a Fourierova metoda	182
10.1	Cíl kapitoly	182
10.2	Vlnová rovnice	182
10.3	D'Alembertův vzorec	183
10.4	Fourierova metoda separace proměnných	184
10.4.1	Fourieriovy řady	184
10.4.2	Dirichletovy podmínky	185
10.4.3	Dirichletova věta	185
10.4.4	Rozvoj funkce s libovolnou periodou	185
10.4.5	Příklad	186
10.4.6	Riemannova věta	186
10.5	Fourierova metoda pro vlnovou rovnici	186
10.6	Vzorce odvozené Fourierovou metodou pro vlnovou rovnici	187
10.7	Shrnutí kapitoly	188
10.8	Řešené příklady	188
	Cvičení	195
	Výsledky	195

11 Rovnice vedení tepla a Laplaceova rovnice	197
11.1 Cíl kapitoly	197
11.2 Rovnice vedení tepla	197
11.3 Dirichletova úloha pro rovnice vedení tepla	198
11.4 Princip maxima pro rovnici vedení tepla	198
11.5 Laplaceova rovnice	198
11.6 Fourierova metoda separace proměnných pro Laplaceovu rovnici	199
11.7 Shrnutí kapitoly	200
11.8 Řešené příklady	201
11.8.1 Fourierova metoda pro rovnici vedení tepla	201
Cvičení	203
Výsledky	204
12 Metoda konečných diferencí pro PDR	205
12.1 Cíl kapitoly	205
12.2 Princip metoda konečných diferencí pro PDR	205
12.3 Shrnutí kapitoly	208
12.4 Řešený příklad	209
Cvičení	211
Výsledky	211
13 Metoda konečných prvků pro PDR - řešení pomocí Matlabu	212
13.1 Cíl kapitoly	212
13.2 Metoda konečných prvků	212
13.3 Příklad řešení pomocí Matlabu	214
Cvičení	222
Výsledky	222
Literatura	223
Rejstřík	226

0.1 Vstupní test

Dříve, než se ponoříte do studia diferenciálních rovnic, projděte si následující test. Pokud vám řešení některých úloh bude dělat problémy, je nanejvýš vhodné si příslušné téma zopakovat.

Cvičení

1. Je dána funkce

$$f(x) = \frac{x-1}{x^2+1}.$$

Vypočtěte

a) $f(2)$, b) $f(2t)$, c) $f(-x)$.

2. Zderivujte následující funkce jedné proměnné (nemusíte se snažit výsledek jakkoli upravovat)

$$\text{a) } y = 2x^3 - \frac{x}{4} + 5 - 3\sqrt{x} - \frac{3}{x} + \frac{2}{\sqrt{x}}, \quad \text{b) } y = e^{-x} \sin 2x, \quad \text{c) } y = \frac{\cos x^2}{x}, \quad \text{d) } y = \frac{1}{\ln(x^2+1)}.$$

3. Vypočtěte následující neurčité integrály

$$\text{a) } \int (x^2 + 3x - 1) dx, \quad \text{b) } \int \left(\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x^2} \right) dx, \quad \text{c) } \int x e^{-x} dx, \quad \text{d) } \int t e^{t^2} dt, \quad \text{e) } \int (2xy - x) dy$$

(pozor na proměnnou!).

4. Vypočtěte následující určité integrály

$$\text{a) } \int_1^2 (2x-1) dx, \quad \text{b) } \int_{x/2}^x \cos t dt.$$

5. Vypočtěte parciální derivace prvního řádu podle všech proměnných, na kterých zadaná funkce závisí

$$\text{a) } f(x, y) = x^2 y^3 - x + y \sin x, \quad \text{b) } g(x, y, z) = \frac{x + y + z^2}{y + 1}.$$

6. Ověřte, že funkce $y = \frac{x-5}{x-2}$ je řešením diferenciální rovnice $(x-2)y' + y = 1$.

7. Najděte obecné řešení diferenciálních rovnic

$$\text{a) } x + yy' = 0. \quad \text{b) } y' + 2xy = x e^{-x^2}.$$

8. Najděte řešení počáteční úlohy $y' - y \operatorname{tg} x = \frac{1}{\cos x}$, $y(0) = 2$.

9. Najděte obecné řešení diferenciální rovnice

$$y'' + 8y' + 15y = 0$$

a řešení vyhovující počátečním podmínkám $y(0) = 4$, $y'(0) = 0$.

10. Ověřte, že funkce $u(x, y) = \operatorname{arctg} \frac{y}{x}$ splňuje rovnici

$$x \frac{\partial u}{\partial x} + y \frac{\partial u}{\partial y} = 0.$$

[1.]

0.1.1 Řešení vstupního testu

Př. 1 a) $\frac{1}{5}$; b) $\frac{2t-1}{4t^2+1}$; c) $\frac{-x-1}{x^2+1}$

Př. 2 a) $y' = 6x^2 - \frac{1}{4} - \frac{3}{2\sqrt{x}} + \frac{3}{x^2} - \frac{1}{\sqrt{x^3}}$; b) $y' = -e^{-x} \sin 2x + 2e^{-x} \cos 2x$;

c) $y' = \frac{-2x^2 \sin x^2 - \cos x^2}{x^2}$; d) $y' = -\frac{2x}{(x^2+1) \ln^2(x^2+1)}$

Př. 3 a) $\frac{x^3}{3} + \frac{3}{2}x^2 - x + c$; b) $\ln|x-1| + \frac{1}{x} + c$; c) $-xe^{-x} - e^{-x} + c$; d) $\frac{1}{2}e^{t^2} + c$; $xy^2 - xy + c$

Př. 4 a) 2; b) $\sin x - \sin \frac{x}{2}$

Př. 5 a) $\frac{\partial f}{\partial x} = 2xy^3 - 1 + y \cos x$, $\frac{\partial f}{\partial y} = 3x^2y^2 + \sin x$; b) $\frac{\partial g}{\partial x} = \frac{1}{y+1}$, $\frac{\partial g}{\partial y} = \frac{1-x-z^2}{(y+1)^2}$,

$$\frac{\partial g}{\partial z} = \frac{2z}{y+1}$$

Př. 7 a) $y^2 + x^2 = c$; b) $y = \left(\frac{x^2}{2} + c\right) e^{-x^2}$

Př. 8 $y = \frac{x+2}{\cos x}$

Př. 9 Obecné řešení je $y = c_1 e^{-3x} + c_2 e^{-5x}$, řešení počáteční úlohy je $y = 4e^{-3x} - 3e^{-5x}$

1 Obyčejné diferenciální rovnice prvního řádu

1.1 Cíl kapitoly

Cílem této kapitoly je nenásilně navázat na učivo, se kterým se studenti seznámili již v prvním ročníku bakalářského studia. Nejprve připomeneme některé základní pojmy týkající se diferenciálních rovnic obecně. Pak probereme řešení jednoho speciálního typu diferenciálních rovnic prvního řádu, tzv. exaktních rovnic, a ukážeme postup, kterým se některé rovnice dají na rovnice exaktní převést.

1.2 Malé opakování

Dříve, než se pustíme do probírání nových typů diferenciálních rovnic, bude asi užitečné připomenout, co je to vůbec diferenciální rovnice a jak může vypadat její řešení. Protože se jedná skutečně o pouhé připomenutí, nebudeme zde rozepisovat přesné definice. Ty necht' si čtenář najde např. ve skriptech pro druhý semestr.

Obyčejná diferenciální rovnice je rovnice, ve které se vyskytují derivace nebo diferenciály neznámé funkce (případně více neznámých funkcí) jedné reálné proměnné. (Na rozdíl od parciální diferenciální rovnice, která obsahuje parciální derivace hledané funkce.)

Obyčejné diferenciální rovnice jsou například

$$xy' + y = \sin x, \quad (\text{r1})$$

$$(x + 1)dx + x(y - 1)dy = 0, \quad (\text{r2})$$

$$y'' + 2y' + y = x. \quad (\text{r3})$$

První dvě rovnice jsou prvního řádu, zatímco třetí rovnice je řádu druhého, protože nejvyšší řád derivace v ní obsažený je 2.

Rovnici obsahující y' lze snadno převést na tvar obsahující diferenciály dx a dy a naopak. K tomu si stačí uvědomit, že $y' = \frac{dy}{dx}$. Například rovnice (r1) se dá zapsat jako

$$xdy + (y - \sin x)dx = 0$$

a rovnice (r2) jako

$$x + 1 + x(y - 1)y' = 0.$$

Řešením diferenciální rovnice na daném intervalu I nazýváme funkci, která mění rovnici v identitu, pokud ji dosadíme za neznámou funkci.

Můžete sami ověřit, že řešením rovnice (r1) na libovolném intervalu neobsahujícím nulu je např. funkce $y = -\frac{\cos x}{x}$.

To je ovšem jen jedno z mnoha řešení této rovnice. Z hlediska terminologického nazýváme každé konkrétní řešení **partikulárním řešením**.

Obecné řešení naší rovnice je $y = \frac{1}{x}(c - \cos x)$, kde $c \in \mathbb{R}$ je libovolná konstanta. (Opět můžete ověřit nebo – ještě lépe – toto řešení najít výpočtem.) Kterékoli partikulární řešení rovnice (r1) dostaneme z jejího obecného řešení vhodnou volbou konstanty c .

Ne vždy se řešení diferenciální rovnice podaří vyjádřit ve tvaru $y = f(x)$, tj. **explicitně**. Často řešení dostaneme v uzavřeném tvaru jako rovnici $F(x, y) = 0$, tj. v tzv. **implicitním** tvaru. Z rovnic, se kterými jste se zatím setkali, je toto běžné u rovnic se separovanými proměnnými, jako je např. (r2). Řešení této rovnice je

$$\frac{y^2}{2} - y + x + \ln|x| + c = 0$$

(opět ověřte nebo řešení přímo najděte).

Na závěr našeho opakování ještě připomeňme, že v praxi obvykle hledáme řešení diferenciální rovnice, které vyhovuje zadané počáteční podmínce

$$y(x_0) = y_0.$$

Při řešení takoveto **počáteční úlohy** pak většinou postupujeme tak, že nejprve najdeme obecné řešení diferenciální rovnice, obsahující parametr c . Jeho konkrétní hodnotu zjistíme dosazením počáteční podmínky do obecného řešení a nalezením c jako kořene vzniklé rovnice.

Jiná část matematiky (numerická matematika) se zabývá, mj., přibližným nalezením řešení diferenciální rovnice, které vyhovuje zadané počáteční podmínce, pomocí různých výpočtových schémat (algoritmů). K nejznámějším algoritmům patří tzv. Eulerova metoda.

1.3 Exaktní rovnice a integrační faktor

Exaktní rovnice jsou speciálním typem obyčejných diferenciálních rovnic, který velmi úzce souvisí s totálním diferenciálem funkce dvou proměnných. Proto nejprve připomeneme, jak totální diferenciál vypadá.

Má-li funkce $z = f(x, y)$ spojitě parciální derivace prvního řádu v nějaké oblasti $\Omega \subset \mathbb{R}^2$, pak má v Ω **totální diferenciál** dz , který je roven

$$dz = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy. \quad (1.1)$$

Příklad 1.1. Totální diferenciál funkce $f(x, y) = x^2y$ je $df = 2xy dx + x^2 dy$.

Představme si nyní, že máme řešit diferenciální rovnici

$$2xy dx + x^2 dy = 0, \quad \text{tj.} \quad df = 0.$$

Tvrdíme, že obecné řešení této rovnice je

$$x^2y = c \quad \text{neboli} \quad f(x, y) = c.$$

Nevěříte? Tak se na to znovu podívejme:

Jestliže se omezíme jen na ty body (x, y) , pro které je $f(x, y) = c$ ($c \in \mathbb{R}$ je konstanta), pak $df = dc = 0$, tj. rovnice je splněna.

(Jestli ještě pořád nevěříte, vyřešte rovnici sami jiným způsobem – je to rovnice se separovanými proměnnými.)

1.3.1 Definice exaktní rovnice

Viděli jsme, že diferenciální rovnice tvaru $df = 0$ má řešení, které se dá pěkně popsat rovnicí $f(x, y) = c$, a proto si tato rovnice zaslouží vlastní jméno:

Definice 1.2 (Exaktní rovnice).

Diferenciální rovnice

$$M(x, y) dx + N(x, y) dy = 0 \tag{1.2}$$

se nazývá **exaktní diferenciální rovnice**, jestliže výraz na její levé straně je totálním diferenciálem nějaké funkce f v nějaké oblasti $\Omega \subset \mathbb{R}^2$. Funkci f nazýváme **kmenovou funkcí**.

V příkladu 1.1 jsme měli jednoduchou práci, protože jsme kmenovou funkci f předem znali. To ale rozhodně není typická situace. Proto se nyní budeme zabývat dvěma otázkami:

- Jak poznáme, že je nějaká rovnice exaktní?
- Víme-li už, že exaktní je, jak najdeme kmenovou funkci f , pomocí níž je dáno řešení?

Odpověď na první otázku dává následující věta.

Věta 1.3. *Nechť M a N jsou funkce dvou proměnných, které jsou spojité a mají spojité parciální derivace prvního řádu v nějaké obdélníkové oblasti $R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : a < x < b, c < y < d\}$, kde a, b, c, d jsou konstanty. Pak výraz*

$$M(x, y) dx + N(x, y) dy$$

je totálním diferenciálem nějaké funkce f právě tehdy, když v uvedené oblasti platí

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}. \tag{1.3}$$

Nebudeme provádět důkaz tohoto tvrzení, ale přesto se u podmínky (1.3) na chvíli zastavíme, abyste viděli, že jen tak „nespadla z nebe“.

Jestliže existuje funkce f , pro kterou platí $df = M(x, y) dx + N(x, y) dy$, znamená to, že

$$\frac{\partial f}{\partial x} = M(x, y) \quad \text{a} \quad \frac{\partial f}{\partial y} = N(x, y)$$

$$\text{Tedy} \quad \frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}, \quad \text{zatímco} \quad \frac{\partial N}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}.$$

Protože funkce M a N mají spojité parciální derivace prvního řádu, má funkce f spojité parciální derivace druhého řádu, a tedy musí platit

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \quad \text{neboli} \quad \frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}.$$

Příklad 1.4. Rozhodněte, zda jsou zadané diferenciální rovnice exaktní.

a) $2xy dx + (x^2 - 1) dy = 0$

b) $(e^{xy} - y) dx + x^2 e^y dy = 0$

Řešení. a) $M(x, y) = 2xy$, $N(x, y) = x^2 - 1$.

$$\frac{\partial M}{\partial y} = 2x, \quad \frac{\partial N}{\partial x} = 2x \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x} \quad \Rightarrow \quad \text{rovnice je exaktní.}$$

b) $M(x, y) = e^{xy} - y$, $N(x, y) = x^2 e^y$.

$$\frac{\partial M}{\partial y} = x e^{xy} - 1, \quad \frac{\partial N}{\partial x} = 2x e^y \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial M}{\partial y} \neq \frac{\partial N}{\partial x} \quad \Rightarrow \quad \text{rovnice není exaktní.}$$

□

1.3.2 Nalezení kmenové funkce

Nyní se zaměříme na problém, jak najít kmenovou funkci f . Postup jejího hledání ukážeme nejprve obecně a pak na několika příkladech.

Mějme diferenciální rovnici

$$M(x, y) dx + N(x, y) dy = 0,$$

o které víme, že je exaktní, tj. že

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}.$$

Hledáme funkci f , pro kterou platí

$$df = M(x, y) dx + N(x, y) dy \quad \text{neboli} \quad \frac{\partial f}{\partial x} = M(x, y) \quad \text{a} \quad \frac{\partial f}{\partial y} = N(x, y).$$

Víme, že derivace f podle x je rovna M , a proto můžeme integrací M podle x (tj. y pro tento moment považujeme za konstantu) f najít:

$$f(x, y) = \int M(x, y) dx + g(y),$$

kde $g(y)$ je funkce závislá pouze na y , která zde hraje roli integrační konstanty. (Uvědomte si, že když libovolnou funkci závislejší pouze na y zderivujeme podle x , dostaneme nulu.)

Na druhou stranu také víme, že derivace f podle y má být rovna $N(x, y)$. To znamená, že

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\int M(x, y) dx + g(y) \right) = \frac{\partial}{\partial y} \int M(x, y) dx + g'(y) = N(x, y).$$

Odtud dostaneme rovnici

$$g'(y) = N(x, y) - \frac{\partial}{\partial y} \int M(x, y) dx, \quad (1.4)$$

ze které zatím neznámou funkci g najdeme integrací podle y . Tím je kmenová funkce f nalezena.

Poznámka 1.5. Možná se vám zdá divné, že napřed zdůrazňujeme, že funkce g závisí pouze na y , a za chvíli napíšeme, že $g'(y) = N(x, y) - \dots$. Na příkladech však uvidíte, že v pravé straně rovnice (1.4) se všechny výrazy obsahující x vždy odečtou a zbude tam opravdu pouze funkce proměnné y , občas dokonce jenom konstanta.

Ukážeme nyní, proč tomu tak je. Vypočteme derivaci výrazu na pravé straně (1.4) podle x :

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \left(N(x, y) - \frac{\partial}{\partial y} \int M(x, y) dx \right) &= \frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial}{\partial y} \int M(x, y) dx \right) = \\ &= \frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial}{\partial x} \int M(x, y) dx \right) = \frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y} = 0. \end{aligned}$$

To znamená, že $N(x, y) - \frac{\partial}{\partial y} \int M(x, y) dx$ nezávisí na x .

Poznámka 1.6. Celý postup hledání f se dal provést i z opačného konce. Napřed můžeme vyjádřit f pomocí integrálu z funkce N podle y :

$$f(x, y) = \int N(x, y) dy + h(x)$$

Pak využijeme toho, že derivace f podle x musí být rovna M . Z toho dostaneme rovnici pro funkci h :

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\int N(x, y) dy + h(x) \right) = \frac{\partial}{\partial x} \int N(x, y) dy + h'(x) = M(x, y),$$

ve které se v tomto případě musí odečíst všechny členy obsahující y .

Příklad 1.7. Najděte obecné řešení diferenciální rovnice

$$2xy \, dx + (x^2 - 1) \, dy = 0.$$

Řešení. O zadané rovnici již z příkladu (1.4) a) víme, že je exaktní. Existuje proto funkce f , pro niž platí $df = 2xy \, dx + (x^2 - 1) \, dy$ neboli

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2xy \quad \text{a} \quad \frac{\partial f}{\partial y} = x^2 - 1.$$

Z rovnice $\frac{\partial f}{\partial x} = 2xy$ integrací podle x dostáváme

$$f(x, y) = x^2y + g(y).$$

Pro tuto funkci f musí dále platit, že $\frac{\partial f}{\partial y} = x^2 - 1$. Tedy

$$\frac{\partial}{\partial y}(x^2y + g(y)) = x^2 + g'(y) = x^2 - 1 \quad \Rightarrow \quad g'(y) = -1 \quad \Rightarrow \quad g(y) = -y.$$

(Všimněte si, že x^2 se v rovnici pro g opravdu odečetlo, přesně jak jsme v poznámce 1 slibovali.)

Kmenová funkce f je tedy $f(x, y) = x^2y - y$ a obecné řešení zadané diferenciální rovnice je $x^2y - y = c$. \square

Rovnice v tomto příkladu byla zadána přímo ve tvaru (1.2). Vždycky to tak ale být nemusí.

Příklad 1.8. Najděte obecné řešení rovnice

$$y(1 - x^2)y' = xy^2 - \cos x \sin x$$

a pak řešení vyhovující počáteční podmínce $y(0) = 2$.

Řešení. Zadaná rovnice není žádného z dříve probraných typů (separovatelná ani lineární). Převédeme ji na tvar $M(x, y) \, dx + N(x, y) \, dy = 0$ a podíváme se, jestli je exaktní:

$$y(1 - x^2) \frac{dy}{dx} = xy^2 - \cos x \sin x \quad \Rightarrow \quad (\cos x \sin x - xy^2) \, dx + y(1 - x^2) \, dy = 0.$$

Tedy $M(x, y) = (\cos x \sin x - xy^2)$ a $N(x, y) = y(1 - x^2)$.

$$\frac{\partial M}{\partial y} = -2xy = \frac{\partial N}{\partial x} \quad \Rightarrow \quad \text{rovnice je exaktní.}$$

Budeme hledat funkci f , pro kterou platí

$$\frac{\partial f}{\partial x} = (\cos x \sin x - xy^2) \quad \text{a} \quad \frac{\partial f}{\partial y} = y(1 - x^2).$$

Protože se zdá, že bude pohodlnější integrovat N podle y než M podle x , použijeme postup naznačený v poznámce 2.

$$\frac{\partial f}{\partial y} = y(1 - x^2) \Rightarrow f(x, y) = \frac{y^2}{2}(1 - x^2) + h(x).$$

Víme, že derivace f podle x musí být rovna $M(x, y) = \cos x \sin x - xy^2$. Tedy

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{y^2}{2}(1 - x^2) + h(x) \right) = -xy^2 + h'(x) = \cos x \sin x - xy^2$$

Odtud $h'(x) = \cos x \sin x$,

$$h(x) = \int \cos x \sin x \, dx = \left| \begin{array}{l} t = \sin x \\ dt = \cos x \, dx \end{array} \right| = \int t \, dt = \frac{t^2}{2} = \frac{1}{2} \sin^2 x.$$

Kmenová funkce f je $f(x, y) = \frac{y^2}{2}(1 - x^2) + \frac{1}{2} \sin^2 x$ a obecné řešení zadané rovnice je

$$\begin{aligned} & \frac{y^2}{2}(1 - x^2) + \frac{1}{2} \sin^2 x = c_1 \\ \text{nebo} & \quad \underline{\underline{y^2(1 - x^2) + \sin^2 x = c}}, \quad \text{kde } c = 2c_1. \end{aligned}$$

Nyní najdeme řešení vyhovující počáteční podmínce $y(0) = 2$:

$$2^2(1 - 0^2) + \sin^2 0 = c \Rightarrow c = 4.$$

Hledané řešení je $y^2(1 - x^2) + \sin^2 x = 4$. □

1.3.3 Integrační faktor

Vraťme se teď k exaktní rovnici, se kterou jsme v příkladu 1.1 začínali, tj.

$$2xy \, dx + x^2 \, dy = 0.$$

Při pohledu na ni člověka může napadnout: „Co kdybych ji vydělil x ? Tím se přece zjednoduší!“ Učinně tak:

$$2y \, dx + x \, dy = 0$$

Rovnice je skutečně na pohled jednodušší, ale zato přestala být exaktní.

Pro novou rovnici je $M(x, y) = 2y$, $N(x, y) = x$, a tedy $\frac{\partial M}{\partial y} = 2 \neq 1 = \frac{\partial N}{\partial x}$.

Jestliže se původně exaktní rovnice vydělením nějakou funkcí „odexaktněla“, nemohla by neexaktní rovnice vynásobením vhodnou funkcí „zexaktnět“? Pokusme se takovou funkci najít. Označíme ji jako $\mu(x, y)$ a budeme jí říkat **integrační faktor**.

Hledáme tedy funkci $\mu(x, y)$ (předpokládáme $\mu(x, y) \neq 0$), pro kterou by rovnice

$$\mu(x, y)M(x, y) \, dx + \mu(x, y)N(x, y) \, dy = 0$$

byla exaktní, tj. pro kterou by platilo

$$\frac{\partial}{\partial y} (\mu(x, y)M(x, y)) = \frac{\partial}{\partial x} (\mu(x, y)N(x, y)) .$$

Použitím vzorce pro derivaci součinu dostaneme

$$\frac{\partial \mu}{\partial y} \cdot M + \mu \cdot \frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial \mu}{\partial x} \cdot N + \mu \cdot \frac{\partial N}{\partial x} . \quad (1.5)$$

Zdá se, že jsme se dostali z bláta do louže. Rovnice (1.5) je parciální diferenciální rovnice pro neznámou funkci μ a vyřešit ji může být stejně obtížné jako vyřešit původní neexaktní obyčejnou diferenciální rovnici. V některých speciálních případech však funkci μ přece jenom najdeme.

1.3.4 Integrační faktor jako funkce jedné proměnné

Pokud předpokládáme, že funkce μ závisí pouze na jedné proměnné, rovnice (1.5) se zredukuje na tvar, se kterým už si poradíme.

Nejprve hledíme funkci závislou pouze na proměnné x , tj. $\mu = \mu(x)$. V tomto případě je $\frac{\partial \mu}{\partial y} = 0$ a z (1.5) dostaneme

$$\mu(x) \cdot \frac{\partial M}{\partial y} = \mu'(x) \cdot N + \mu(x) \cdot \frac{\partial N}{\partial x} \quad \Rightarrow \quad \mu'(x) \cdot N = \mu(x) \left(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x} \right)$$

$$\text{a nakonec} \quad \frac{\mu'(x)}{\mu(x)} = \frac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}}{N} .$$

Aby tato rovnost mohla být splněna, musí výraz na pravé straně záviset také pouze na x , tedy

$$\frac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}}{N} = \alpha(x) .$$

Tím se rovnice (1.5) značně zjednodušila:

$$\frac{\mu'}{\mu} = \alpha(x)$$

To je rovnice se separovanými proměnnými a jsme schopni ji vyřešit:

$$\frac{d\mu}{\mu} = \alpha(x) dx \quad \Rightarrow \quad \ln |\mu| = \int \alpha(x) dx + c \quad \Rightarrow \quad \mu = c \cdot e^{\int \alpha(x) dx} .$$

Protože nám jde o nalezení jedné konkrétní funkce μ , nikoli všech možných, můžeme konstantu c zvolit, např. $c = 1$. Tím máme

$$\mu(x) = e^{\int \alpha(x) dx} .$$

Podobně by se postupovalo při hledání integračního faktoru μ závislého pouze na proměnné y (zkuste si to sami).

To, k čemu jsme zatím dospěli, můžeme shrnout v následující větě.

Věta 1.9. *Nechť je dána rovnice*

$$M(x, y) dx + N(x, y) dy = 0. \quad (1.6)$$

Je-li $\frac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}}{N} = \alpha(x)$, resp. $\frac{\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}}{M} = \beta(y)$, pak vynásobením rovnice (1.6) integračním faktorem $\mu(x) = e^{\int \alpha(x) dx}$, resp. $\mu(y) = e^{\int \beta(y) dy}$, dostaneme rovnici exaktní.

Integrační faktor lze nalézt i v některých dalších případech, ale o tom zde mluvit nebudeme. Nyní přichází to, na co jste se určitě nejvíc těšili – příklady.

Příklad 1.10. Najděte obecné řešení rovnice

$$(xy + y^2 + y) dx + (x + 2y) dy = 0$$

Řešení: Máme $M(x, y) = xy + y^2 + y$, $N(x, y) = x + 2y$.

$$\frac{\partial M}{\partial y} = x + 2y + 1, \quad \frac{\partial N}{\partial x} = 1, \quad \frac{\partial M}{\partial y} \neq \frac{\partial N}{\partial x} \Rightarrow \text{rovnice není exaktní.}$$

Zkusíme, jestli se nám podaří najít integrační faktor μ jako funkci pouze proměnné x :

$$\frac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}}{N} = \frac{x + 2y + 1 - 1}{x + 2y} = 1.$$

Žádné y se v tomto výrazu po úpravě nevyskytuje, a proto můžeme najít integrační faktor. V našem případě je $\alpha(x) = 1$, a tedy

$$\mu(x) = e^{\int 1 dx} = e^{x+c}.$$

Zadanou rovnici nalezeným integračním faktorem ve tvaru e^x vynásobíme:

$$e^x(xy + y^2 + y) dx + e^x(x + 2y) dy = 0$$

Můžeme se přesvědčit, že tohle už exaktní rovnice je.

Nyní je $M(x, y) = e^x(xy + y^2 + y)$, $N(x, y) = e^x(x + 2y)$.

$$\frac{\partial M}{\partial y} = e^x(x + 2y + 1), \quad \frac{\partial N}{\partial x} = e^x(x + 2y) + e^x \cdot 1 = e^x(x + 2y + 1) \Rightarrow \frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}.$$

Najdeme kmenovou funkci f . (Pokud jste snad zapomněli, jedná se o funkci, pro kterou platí $\frac{\partial f}{\partial x} = M$ a $\frac{\partial f}{\partial y} = N$.) Na první pohled je zřejmé, že bude méně pracné nalézt f integrováním N podle y než integrováním M podle x .

$$f(x, y) = \int e^x(x + 2y) dy = e^x(xy + y^2) + h(x).$$

Nyní využijeme toho, že musí platit $\frac{\partial f}{\partial x} = e^x(xy + y^2 + y)$:

$$\frac{\partial}{\partial x} (e^x(xy + y^2) + h(x)) = e^x(xy + y^2) + e^x \cdot y + h'(x) = e^x(xy + y^2 + y) + h'(x)$$

$$e^x(xy + y^2 + y) + h'(x) = e^x(xy + y^2 + y) \Rightarrow h'(x) = 0 \Rightarrow h(x) = 0.$$

Kmenová funkce je tedy $f(x, y) = e^x(xy + y^2)$ a obecné řešení zadané rovnice je

$$\underline{\underline{e^x(xy + y^2) = c.}}$$

Příklad 1.11. Najděte řešení počáteční úlohy

$$(2xy^2 - y) dx + (y^2 + x + y) dy = 0, \quad y(0) = 1.$$

Řešení. Nejprve najdeme obecné řešení zadané rovnice. Sami se přesvědčte, že rovnice není žádného z dříve probraných typů. Prozkoumáme, jestli existuje integrační faktor jako funkce pouze proměnné x :

$$\frac{\partial M}{\partial y} = 4xy - 1, \quad \frac{\partial N}{\partial x} = 1, \quad \frac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}}{N} = \frac{4xy - 2}{y^2 + x + y}.$$

Poslední výraz závisí na proměnné y , integrační faktor typu $\mu(x)$ proto nenajdeme. Nyní to zkusíme s $\mu(y)$:

$$\frac{\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}}{M} = \frac{1 - (4xy - 1)}{2xy^2 - y} = \frac{2(1 - 2xy)}{y(2xy - 1)} = -\frac{2}{y}.$$

To je funkce pouze proměnné y a integrační faktor $\mu(y)$ je proto

$$\mu(y) = e^{\int -\frac{2}{y} dy} = e^{-2 \ln|y| + c} = e^{\ln y^{-2} + c} = y^{-2} = \frac{c}{y^2}.$$

(Jestli teď užasle hledíte na úpravy provedené při výpočtu $\mu(y)$, osvěžte si prosím v paměti, že $e^{\ln x} = x$ pro $x > 0$.)

Rovnice vynásobená integračním faktorem $\mu(y)$ je

$$\left(2x - \frac{1}{y}\right) dx + \left(1 + \frac{x}{y^2} + \frac{1}{y}\right) dy = 0.$$

Ověřte sami, že se jedná o rovnici exaktní (tím v podstatě uděláte zkoušku, že jsme se při hledání integračního faktoru nedopustili žádné chyby).

Budeme hledat kmenovou funkci f .

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x - \frac{1}{y} \Rightarrow f(x, y) = \int \left(2x - \frac{1}{y}\right) dx = x^2 - \frac{x}{y} + g(y).$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 1 + \frac{x}{y^2} + \frac{1}{y} \Rightarrow \frac{\partial}{\partial y} \left(x^2 - \frac{x}{y} + g(y)\right) = \frac{x}{y^2} + g'(y) = 1 + \frac{x}{y^2} + \frac{1}{y}$$

$$g'(y) = 1 + \frac{1}{y} \Rightarrow g(y) = y + \ln|y|$$

Kmenová funkce je $f(x, y) = x^2 - \frac{x}{y} + y + \ln |y|$ a obecné řešení zadané rovnice je

$$x^2 - \frac{x}{y} + y + \ln |y| = c.$$

Najdeme konstantu c tak, aby řešení vyhovovalo podmínce $y(0) = 1$:

$$0^2 - \frac{0}{1} + 1 + \ln 1 = c \quad \Rightarrow \quad c = 1.$$

Řešení zadané počáteční úlohy je tedy

$$\underline{\underline{x^2 - \frac{x}{y} + y + \ln |y| = 1.}}$$

□

1.4 Shrnutí kapitoly

V této kapitole jsme nejprve připomněli, jak vypadá diferenciální rovnice, co je jejím řešením, jak může řešení vypadat a jaký je rozdíl mezi obecným a partikulárním řešením dané diferenciální rovnice. Dále jsme se věnovali tzv. exaktním rovnicím. Ukázali jsme, jak poznáme, jestli je nějaká rovnice exaktní, a jak takovou rovnici vyřešit. Nakonec jsme se zabývali problémem, jak rovnici, která původně exaktní není, na exaktní rovnici převést. Předvedli jsme, že rovnice, které vyhovují určitým podmínkám, lze vynásobením tzv. integračním faktorem na exaktní rovnici upravit.

Cvičení

1. U každé rovnice rozhodněte, zda je exaktní. Pokud ano, najděte její obecné řešení

- $(2x - 1) dx + (3y + 7) dy = 0$
- $(\sin y - y \sin x) dx + (\cos x + x \cos y - y) dy = 0$
- $(x + y)(x - y) dx + x(x - 2y) dy = 0$
- $\frac{2x}{y} dx - \frac{x^2}{y^2} dy = 0$
- $(1 - 2x^2 - 2y)y' = 4x^3 + 4xy$
- $\left(1 + \ln x + \frac{x}{y}\right) dx = (1 + \ln x) dy$

2. Najděte řešení počátečních úloh

- $(e^x + y)dx + (2 + x + ye^y)dy = 0, y(0) = 1$
- $\frac{3y^2 - x^2}{y^5} y' + \frac{x}{2y^4} = 0, y(1) = 1$

3. Najděte hodnotu konstanty k , pro kterou bude zadaná rovnice exaktní

$$(y^3 + kxy^4 - 2x) dx + (3xy^2 + 20x^2y^3) dy = 0$$

4. Najděte integrační faktor, pomocí něž lze zadanou rovnici převést na rovnici exaktní. Pak najděte obecné řešení rovnice.

a) $6xy \, dx + (4y + 9x^2) \, dy = 0$

b) $(xy + y^2 + y) \, dx + (x + 2y) \, dy = 0$

Výsledky

1. a) $x^2 - x + \frac{3}{2}y^2 + 7y = c;$

b) $x \sin y + y \cos x - \frac{1}{2}y^2 = c;$

c) není exaktní

d) $\frac{x^2}{y} = c$

e) $-x^4 - 2x^2y + y - y^2 = c;$

f) není exaktní

2. a) $e^x + xy + 2y + ye^y - e^y = 3;$

b) $\frac{x^2}{4y^4} - \frac{3}{2y^2} = -\frac{5}{4}$

3. $k = 10$

4. a) $\mu(y) = y^2$, obecné řešení je $3x^2y^3 + y^4 = c;$

b) $\mu(x) = e^x$, obecné řešení je $xye^x + y^2e^x = c$

Maplety

Kliknutím na následující odkazy si lze pomocí mapletů procvičit tato témata:

1. [Určí typ zadané rovnice.](#)
2. [Rozhodnutí zda zadaná funkce je řešení zadané diferenciální rovnice.](#)
3. [Řešení rovnice se separovanými proměnnými po jednotlivých krocích.](#)
4. [Řešení lineární diferenciální rovnice 1. řádu po krocích.](#)
5. [Řešení známých typů rovnic.](#)

2 Některé typy obyčejných diferenciálních rovnic prvního řádu a jejich řešení

2.1 Cíl kapitoly

Cílem této kapitoly je seznámit čtenáře s některými vybranými typy diferenciálních rovnic, jmenovitě s rovnicí Bernoulliovou, Riccatiovou a Clairoutovou, a předvést řešení diferenciálních rovnic pomocí Picardovy metody postupných aproximací.

2.2 Bernoulliova rovnice

Diferenciální rovnice tvaru

$$y' = a(x)y + b(x)y^n, \quad (2.1)$$

kde $n \in \mathbb{R}$, $n \neq 0$ a $n \neq 1$ se nazývá **Bernoulliova rovnice**. Je-li n rovno 1 nebo 0, jde vždy o lineární diferenciální rovnice. Jejich řešení již umíme najít.)

Všimněte si, že pro $n > 0$ má rovnice vždy tzv. triviální řešení $y = 0$.

Rovnici (2.1) můžeme řešit různými metodami. Lze např. použít substituci za y^{1-n} , ale my zde předvedeme jiný způsob, který by vám měl být povědomý.

Nejprve vyřešíme homogenní lineární rovnici

$$y' = a(x)y. \quad (2.2)$$

Obecné řešení této rovnice vyjde ve tvaru $y = C \cdot y_0(x)$, kde

$$y_0(x) = e^{\int a(x)dx}.$$

Řešení původní rovnice (2.1) pak budeme hledat ve tvaru

$$y = C(x) \cdot y_0(x).$$

Připomíná vám to něco? Ano, podobně vypadá metoda variace konstant, používaná při řešení lineárních diferenciálních rovnic.

Ukážeme, že tato cesta skutečně dovede k cíli, tj. že se nám podaří najít funkci $C(x)$, pro kterou je $y = C(x) \cdot y_0(x)$ řešením zadané rovnice. Dosadíme předpokládané řešení do rovnice (2.1):

$$C'(x) \cdot y_0(x) + C(x) \cdot y_0'(x) = a(x) \cdot C(x) \cdot y_0(x) + b(x) \cdot C^n(x) \cdot y_0^n(x). \quad (2.3)$$

Nyní si uvědomme, že $y_0(x)$ je řešením rovnice (2.2), a proto platí $y_0'(x) = a(x) \cdot y_0(x)$. Druhý člen na levé straně rovnice (2.3) je proto roven prvnímu členu na pravé straně a z rovnice nakonec zůstane

$$C'(x) = b(x) \cdot C^n(x) \cdot y_0^{n-1}(x),$$

což je diferenciální rovnice se separovanými proměnnými pro neznámou funkci $C(x)$, kterou z této rovnice spolu s integrační konstantou stanovíme.

Příklad 2.1. Najděte obecné řešení rovnice

$$y' = -\frac{y}{x} + xy^2$$

Řešení. Jedná se o Bernoulliovu rovnici s $n = 2$. Nejprve vyřešíme homogenní lineární rovnici $y' = -\frac{y}{x}$:

$$\int \frac{dy}{y} = - \int \frac{dx}{x} \Rightarrow \ln |y| = -\ln |x| + \ln c \Rightarrow \ln |y| = \ln \frac{c}{|x|} \Rightarrow y = C \cdot \frac{1}{x}.$$

Řešení zadané rovnice budeme hledat jako $y = C(x) \cdot \frac{1}{x}$. Dosazením tohoto řešení do rovnice dostaneme

$$C' \cdot \frac{1}{x} + C \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right) = -\frac{C \cdot \frac{1}{x}}{x} + x \cdot C^2 \frac{1}{x^2} \Rightarrow C' = C^2.$$

To je rovnice se separovanými proměnnými, kterou nyní vyřešíme.

$$\frac{dC}{dC} = C^2 \Rightarrow \int \frac{dC}{C^2} = \int dx \Rightarrow -\frac{1}{C} = x + k \Rightarrow C = -\frac{1}{x + k}.$$

Jednparametrické řešení naší rovnice je tedy

$$y = -\frac{1}{x + k} \cdot \frac{1}{x} \quad \text{neboli} \quad \underline{\underline{y = -\frac{1}{x^2 + kx}}}.$$

Navíc má rovnice ještě tzv. singulární řešení $y = 0$, které z výše uvedeného parametrického řešení nedá získat žádnou volbou konstanty k . \square

Uvedený postup můžete zopakovat pomocí aplikace programu Maple [pro Bernoulliovu rovnici](#)

2.3 Riccatiova rovnice

Diferenciální rovnice tvaru

$$y' = P(x) + Q(x)y + R(x)y^2 \quad (2.4)$$

se nazývá **Riccatiova rovnice**.

Zde asi zažijí trpké zklamání ti, kdo ještě věřili, že každou rovnici (nebo aspoň každou, která se nějak jmenuje) lze analyticky vyřešit. U Riccatiovy rovnice se to podaří jen někdy. (Slovem „vyřešit“ zde myslíme najít řešení vyjádřené pomocí elementárních funkcí nebo aspoň pomocí integrálů z nich.)

Známe-li jedno řešení rovnice (2.4) (např. podaří-li se nám je nějak uhodnout), použitím substituce

$$y = y_1 + u,$$

kde y_1 je ono jedno známé řešení, převedeme Riccatiho rovnici na Bernoulliho rovnici. Předvedme to podrobněji. Dosadíme do rovnice (2.4):

$$\begin{aligned} y_1' + u' &= P(x) + Q(x)(y_1 + u) + R(x)(y_1 + u)^2 \\ y_1' + u' &= P(x) + Q(x)y_1 + R(x)y_1^2 + Q(x)u + R(x)(2y_1u + u^2). \end{aligned}$$

Protože y_1 je řešení rovnice (2.4), platí $y_1' = P(x) + Q(x)y_1 + R(x)y_1^2$, a tedy

$$u' = (Q(x) + 2R(x)y_1)u + R(x)u^2. \quad (2.5)$$

To je Bernoulliho rovnice pro $n = 2$ s neznámou funkcí u , a tu už vyřešit umíme (nenarazíme-li na potíže při výpočtu integrálů, ale to už je jiná otázka).

Příklad 2.2. Najděte obecné řešení rovnice

$$y' = -\frac{4}{x^2} - \frac{1}{x}y + y^2,$$

víme-li, že řešením této rovnice je funkce $y_1 = 2/x$.

Řešení. To, že y_1 je skutečně řešením zadané rovnice, ověřte sami.

Zavedeme substituci

$$y = \frac{2}{x} + u.$$

V našem případě je $P(x) = -4/x^2$, $Q(x) = -1/x$ a $R(x) = 1$ a rovnice (2.5) bude vypadat takto:

$$u' = \left(-\frac{1}{x} + 2 \cdot \frac{2}{x}\right)u + u^2, \quad \text{po snadné úpravě} \quad u' = \frac{3}{x}u + u^2.$$

Vzniklou Bernoulliho rovnici vyřešíme. Nejprve najdeme obecné řešení lineární homogenní rovnice $u' = \frac{3}{x}u$:

$$\int \frac{du}{u} = \int \frac{3}{x} dx \quad \Rightarrow \quad \ln |u| = 3 \ln |x| + \ln c \quad \Rightarrow \quad \ln |u| = \ln (c|x|^3) \quad \Rightarrow \quad u = Cx^3.$$

Řešení Bernoulliovy rovnice nyní budeme hledat jako $y = C(x) \cdot x^3$. Zderivováním a dosazením do rovnice dostaneme

$$C'(x)x^3 + C(x)3x^2 = \frac{3}{x}C(x)x^3 + C^2(x)x^6 \Rightarrow C'(x) = C^2(x)x^3.$$

Vzniklou rovnici s neznámou funkcí C vyřešíme:

$$\frac{dC}{dx} = C^2x^3 \Rightarrow \int \frac{dC}{C^2} = \int x^3 dx \Rightarrow -\frac{1}{C} = \frac{x^4}{4} + k \Rightarrow C = -\frac{1}{\frac{x^4}{4} + k}.$$

C můžeme ještě upravit – čitatele i jmenovatele vynásobíme čtyřmi:

$$C = -\frac{4}{x^4 + 4k} = -\frac{4}{x^4 + K}, \quad \text{kde } K = 4k.$$

Řešení Bernoulliovy rovnice je tedy $u = -\frac{4}{x^4 + K} \cdot x^3$ (navíc máme ještě singulární řešení $u = 0$.)

Nyní se vrátíme k zadané Riccatiho rovnici. Její řešení je

$$y = \frac{2}{x} + u = \frac{2}{x} - \frac{4x^3}{x^4 + K} = \frac{2(x^4 + K) - 4x^4}{x(x^4 + K)}, \quad \text{tj. } y = \underline{\underline{2 \frac{K - x^4}{x(x^4 + K)}}}.$$

Můžete si všimnout, že ze zadání známé řešení $y_1 = 2/x$ z obecného řešení nedostaneme pro žádné K ; toto řešení odpovídá singulárnímu řešení $u = 0$. \square

Uvedený postup můžete zopakovat pomocí aplikace programu Maple [pro Riccatiovu rovnici](#)

2.4 Clairautova rovnice

Všechny rovnice, které jsme dosud probírali, se daly převést na tvar $y' = f(x, y)$. U Clairautovy rovnice je tomu v jistém smyslu naopak – nemáme vyjádřenou derivaci neznámé funkce pomocí x a y , ale y pomocí x a y' , a to konkrétně takto:

$$y = xy' + f(y'). \quad (2.6)$$

Poněkud neobvyklého tvaru rovnice se nemusíte lekat. Uvidíte, že řešení Clairautovy lze najít vcelku bezpracně.

Ukážeme, že řešeními Clairautovy rovnice jsou všechny přímky tvaru

$$y = cx + f(c), \quad (2.7)$$

kde c je libovolná konstanta.

Abychom ověřili, že (2.7) je skutečně řešením rovnice (2.6), dosadíme do levé a pravé strany této rovnice. To je velmi jednoduché, ale pro všechny méně zběhlé raději

zdůrazněme, že při výpočtu y' derivujeme podle x a že $f(c)$ je konstanta. Proto $y' = (cx + f(c))' = c$. A teď už dosadíme:

$$L = y = cx + f(c), \quad P = xy' + f(y') = xc + f(c) \quad \Rightarrow \quad L = P.$$

Rovnice (2.6) může mít ještě další řešení, které je vyjádřené parametricky:

$$x = -f'(t), \quad y = f(t) - tf'(t). \quad (2.8)$$

Prověříme, že (2.8) je opravdu řešením. Nejprve najdeme (za předpokladu, že $f''(t) \neq 0$)

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{f'(t) - f'(t) - tf''(t)}{-f''(t)} = t.$$

Nyní je levá strana L rovnice (2.6) vyjádřena s pomocí (2.8) jako

$$L = f(t) - tf'(t)$$

a pravá strana P rovnice (2.6) je rovna

$$P = -f'(t)t + f(t) = L.$$

Naše prověrka je zakončena.

Toto řešení je singulární, protože jestliže $f''(t) \neq 0$, řešení (2.8) nedostaneme z řešení (2.7) pro žádnou volbu konstanty c .

Příklad 2.3. Najděte řešení rovnice

$$y = xy' + \frac{1}{2}(y')^2.$$

Řešení. V našem případě je $f(y') = (1/2)(y')^2$. To znamená, že řešením je každá přímka tvaru

$$\underline{\underline{y = cx + \frac{1}{2}c^2, \quad c \in \mathbb{R}.$$

Nyní najdeme řešení typu (2.8). Protože $f(t) = (1/2)t^2$, je $f'(t) = t$, a tedy další řešení zadané rovnice je

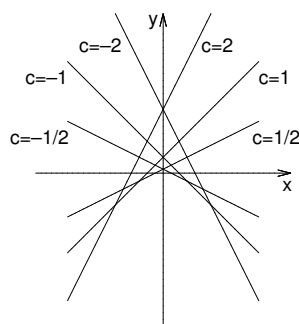
$$x = -t, \quad y = \frac{1}{2}t^2 - t \cdot t = -\frac{1}{2}t^2$$

Parametr t se nám podaří vyloučit a řešení tak dostaneme vyjádřené „normálně“:

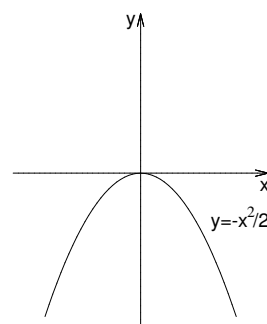
$$x = -t \quad \Rightarrow \quad t = -x \quad \Rightarrow \quad y = -\frac{1}{2}(-x)^2 \quad \Rightarrow \quad \underline{\underline{y = -\frac{1}{2}x^2.}}$$

Tohle řešení mezi přímkami skutečně nepatří. Na obrázcích 2.1 a 2.2 vidíme, že přímkou tvoří jakýsi obal singulárního řešení. □

Uvedený postup můžete zopakovat pomocí aplikace programu Maple [pro Clairautovu rovnici](#)



Obr. 2.1: Několic přímkových řešení rovnice z příkladu 2.3



Obr. 2.2: Singulární řešení rovnice z příkladu 2.3

2.5 Picardova metoda postupných aproximací

V poslední části této kapitoly si ukážeme metodu, která má větší význam teoretický, než že by se pomocí ní skutečně našlo řešení konkrétní diferenciální rovnice.

Snad si ještě pamatujete z numerických metod, že při řešení rovnic $f(x) = 0$ se dala použít metoda, která spočívala v tom, že se rovnice převedla na tvar $x = g(x)$, nějak se odhadla počáteční aproximace řešení x_0 a pak se pořád dokola dosazovalo do vzorce $x_n = g(x_{n-1})$. Ti zdatnější si možná dokonce vzpomenou, že tento postup, odborně zvaný iterační proces, byl použitelný v daleko obecnějším měřítku než jen pro řešení jedné nelineární rovnice. A zde, možná trochu překvapivě, se s ním znovu setkáme.

Budeme se zabývat řešením počáteční úlohy

$$y' = f(x, y), \quad y(x_0) = y_0. \quad (2.9)$$

Rovnici zintegrujeme od x_0 do x :

$$\begin{aligned} \int_{x_0}^x y'(t) dt &= \int_{x_0}^x f(t, y(t)) dt \Rightarrow [y(t)]_{x_0}^x = \int_{x_0}^x f(t, y(t)) dt \\ y(x) - y(x_0) &= \int_{x_0}^x f(t, y(t)) dt \end{aligned}$$

a nakonec dostáváme

$$y(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(t, y(t)) dt. \quad (2.10)$$

To je integrální rovnice, která je s původní diferenciální rovnicí ekvivalentní a která je jakousi analogií onoho $x = g(x)$ z před chvílí připomenuté iterační metody.

Nyní zvolíme počáteční aproximaci řešení $y_0(x)$. Obvykle to bývá konstantní funkce $y_0(x) = y_0$. Další aproximaci řešení vypočteme tím způsobem, že $y_0(x)$ dosadíme do pravé strany (2.10):

$$y_1(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(t, y_0(t)) dt$$

a další aproximace budeme počítat analogicky podle vzorce

$$y_n(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(t, y_{n-1}(t)) dt, \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (2.11)$$

Tím dostáváme posloupnost funkcí $y_0(x), y_1(x), y_2(x), \dots$, která za jistých předpokladů o funkci f stejnoměrně konverguje (na jistém intervalu) k řešení rovnice (2.10), které je ovšem současně řešením původní diferenciální rovnice (2.9). Tento způsob hledání řešení se nazývá **Picardova metoda postupných aproximací**.

Příklad 2.4. Picardovou metodou postupných aproximací řešte počáteční problém

$$y' = y - 1, \quad y(0) = 2.$$

Řešení. V našem případě je $x_0 = 0$, $y_0 = 2$ a $f(t, y(t)) = y(t) - 1$. Jako počáteční aproximaci zvolíme $y_0(x) = 2$ a vypočteme několik dalších aproximací:

$$\begin{aligned} y_1(x) &= 2 + \int_0^x (2 - 1) dt = 2 + \int_0^x dt = 2 + [t]_0^x = 2 + x \\ y_2(x) &= 2 + \int_0^x (2 + t - 1) dt = 2 + \int_0^x (1 + t) dt = 2 + [t + \frac{1}{2} t^2]_0^x = 2 + x + \frac{1}{2} x^2 \\ y_3(x) &= 2 + \int_0^x (1 + t + \frac{1}{2} t^2) dt = 2 + x + \frac{1}{2} x^2 + \frac{1}{2 \cdot 3} x^3 \\ y_4(x) &= 2 + \int_0^x (1 + t + \frac{1}{2} t^2 + \frac{1}{2 \cdot 3} t^3) dt = 2 + x + \frac{1}{2} x^2 + \frac{1}{2 \cdot 3} x^3 + \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 4} x^4. \end{aligned}$$

Indukcí lze dokázat (odvážněji nechtě se o to pokusit), že n -tý člen posloupnosti postupných aproximací je

$$y_n(x) = 2 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^n}{n!} = 1 + \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!}.$$

To znamená, že limita $y_n(x)$ pro n jdoucí do nekonečna je $y(x) = 1 + e^x$. (Pro všechny, kterým je tento závěr nejasný: Vzpomeňte si na rozvoj funkce $y = e^x$ do mocninné řady.) Můžeme se přesvědčit, že funkce $y = 1 + e^x$ je řešením zadané počáteční úlohy:

$$L = y' = (1 + e^x)' = e^x, \quad P = y - 1 = e^x \quad \text{a navíc} \quad y(0) = 1 + e^0 = 2.$$

□

Po zhlédnutí tohoto příkladu se možná některým z vás v hlavě honí něco jako: „Proč to dělat jednoduše, když to jde složitě...“ Nutno přiznat, že máte do značné míry pravdu. Zadaná rovnice se dala vyřešit daleko pohodlněji. Cílem příkladu však ani tak nebylo vyřešit onu rovnici, jako spíš předvést nedůvěřivému čtenáři, že metoda skutečně funguje. Že není zrovna pohodlná, to jsme viděli i na našem velmi jednoduchém příkladu. V případě složitější pravé strany se může výpočet integrálů brzy velmi zkomplikovat a rozeznat funkci, ke které posloupnost postupných aproximací konverguje, to už se vůbec podaří jen výjimečně.

Teď už se asi ptáte všichni: „A na co ta metoda tedy je?“ Tahle otázka – zvlášt, je-li vyslovena s určitou intonací – dokáže občas rozezlít i jinak vlídného pedagoga. (Před nevlídnými pedagogy nebývá pro jistotu nahlas vyřčena.) Tady se vám však odpovědi dostane. Picardova metoda je jedním z hlavních nástrojů pro důkaz věty o existenci a jednoznačnosti řešení diferenciální rovnice, kterou zde nyní připomeneme. Tohle je, konec konců, kurs pro starší a pokročilé, tak proč neukázat i trošku teorie.

Věta 2.5 (Picardova). *Nechť je funkce f spojitá vzhledem k proměnným x a y na oblasti*

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |x - x_0| \leq a, |y - y_0| \leq b\},$$

kde a, b jsou kladné konstanty, a nechť f na této oblasti vyhovuje Lipschitzově podmínce vzhledem k proměnné y (tj. existuje konstanta L taková, že platí

$$|f(x, y) - f(x, z)| \leq L \cdot |y - z|$$

pro libovolné dva body $(x, y), (x, z) \in D$).

Pak má počáteční úloha

$$y' = f(x, y), \quad y(x_0) = y_0$$

právě jedno řešení.

Důkaz (ne, nebojte se, nebudeme ho provádět) je založen právě na použití Picardovy posloupnosti postupných aproximací. Ukáže se, že za uvedených předpokladů tato posloupnost konverguje a její limitou je právě jediné řešení zkoumané počáteční úlohy.

2.6 Shrnutí kapitoly

V této kapitole jsme analyzovali tři typy význačných diferenciálních rovnic: Bernoulliovu, Riccatiovu a Clairtovu. Nejdůležitější poznatky z této kapitoly jsou:

1. Bernoulliho rovnice se řeší podobně jako rovnice lineární. Nejprve najdeme obecné řešení odpovídající homogenní rovnice a pomocí něj pak i řešení samotné Bernoulliho rovnice.
2. Známe-li jedno partikulární řešení y_1 Riccatiho rovnice, můžeme tuto rovnici pomocí substituce $y = y_1 + u$ převést na Bernoulliho rovnici.
3. Clairautova rovnice se svým tvarem odlišuje od všech zatím probraných typů rovnic. Její řešení však najdeme snadno. Jsou to všechny přímky tvaru $y = cx + f(c)$. Navíc existuje ještě řešení, které lze vyjádřit parametricky pomocí vztahů (2.8).

V závěru kapitoly jsme popsali Picardovu metodu postupných aproximací. Tato metoda slouží především jako nástroj pro důkaz věty o existenci a jednoznačnosti řešení diferenciálních rovnic.

Cvičení

1. Najděte obecné řešení Bernoulliho rovnice

a) $xy' + y = \frac{1}{y^2}$.

b) $y' - y = e^x y^2$, které vyhovuje podmínce $y(0) = 1$.

2. Najděte obecné řešení Riccatiho rovnice

a) $y' = -2 - y + y^2$, víme-li, že jedno řešení této rovnice je $y_1 = 2$.

b) $y' = 2x^2 + \frac{1}{x}y - 2y^2$, víme-li, že jedno řešení této rovnice je $y_1 = x$.

3. Vyřešte Clairautovu rovnici

a) $y = xy' - (y')^3$. Najděte i singulární řešení.

b) $xy' - y = e^{y'}$. Najděte i singulární řešení a partikulární řešení vyhovující podmínce $y(0) = -2$.

4. Picardovou metodou najděte první tři aproximace řešení počáteční úlohy

$y' = -y$, $y(0) = 1$. Určete limitu posloupnosti $\{y_n(x)\}$ pro $n \rightarrow \infty$ a ověřte, že tato limita je řešením počáteční úlohy.

Výsledky

1. a) Mezivýsledek: řešení odpovídající lineární rovnice je $y_0(x) = c/x$. Obecné řešení zadané rovnice je $y = \frac{\sqrt[3]{x^3 + c}}{x}$, což lze přepsat např. jako $y^3 = 1 + cx^{-3}$.

b) Mezivýsledky: řešení odpovídající lineární rovnice je $y_0(x) = ce^x$, obecné řešení zadané rovnice je

$$y = -\frac{e^x}{e^{2x}/2 + c},$$

což lze přepsat např. jako $y = -2e^x(e^{2x} + k)^{-1}$.

Řešení počáteční úlohy je

$$y = -\frac{2e^x}{e^{2x} - 3}.$$

;

2. a) Mezivýsledek: Bernoulliho rovnice vzniklá substitucí $y = u + 2$ je $u' = 3u + u^2$. Obecné řešení zadané rovnice je

$$y = 2 - \frac{e^{3x}}{e^{3x}/3 + c}$$

a lze ho přepsat např. jako

$$y = 2 - \frac{3e^{3x}}{e^{3x} + k}.$$

b) Mezivýsledek: Bernoulliho rovnice vzniklá substitucí $y = u + x$ je

$$u' = \left(\frac{1}{x} - 4x\right)u - 2u^2.$$

Obecné řešení zadané rovnice je

$$y = x - \frac{xe^{-2x^2}}{e^{-2x^2}/2 + c}.$$

3. a) $y = cx - c^3$; singulární řešení vyjádřené parametricky je $x = 3t^2, y = 2t^3$, odtud $y = 2\sqrt{\frac{x^3}{27}}$.

b) $y = cx - e^c$; singulární řešení vyjádřené parametricky je $x = e^t, y = -e^t + te^t$, odtud $y = -x + x \ln x$. Řešení počáteční úlohy je $y = x \ln 2 - 2$.

4.

$$y_1(x) = 1 - x,$$

$$y_2(x) = 1 - x + \frac{x^2}{2},$$

$$y_3(x) = 1 - x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6},$$

$$y_n(x) \rightarrow e^{-x} \text{ pro } n \rightarrow \infty.$$

Maplety

Kliknutím na následující odkazy si lze pomocí mapletů procvičit tato témata:

1. [Určí typ zadané rovnice.](#)
2. [Řešení Bernoulliho rovnice.](#)
3. [Řešení Clairautovy rovnice.](#)
4. [Řešení Riccatiový rovnice.](#)

3 Lineární systémy obyčejných diferenciálních rovnic

3.1 Cíl kapitoly

V této kapitole budeme hovořit o lineárních systémech obyčejných diferenciálních rovnic prvního řádu. S tímto tématem jste se již mohli setkat ve druhém nebo třetím ročníku v předmětu *Vybrané partie z matematiky*. Protože však nelze počítat s tím, že tento předmět (nebo jemu podobný na jiné škole) absolvovali všichni, některé věci zde budou zopakovány. Jde zejména o pravidla pro počítání s vektory a s maticemi a o připomenutí konstrukce obecného řešení lineární homogenní diferenciální rovnice s konstantními koeficienty. Uvedeme některé poznatky o tzv. struktuře obecného řešení lineárních systémů. Ukážeme, že má smysl zavést tzv. fundamentální matici, která má jednotlivé sloupce tvořené pomocí řešení systému. Dále předvedeme metodu řešení těchto systémů pomocí tzv. exponenciály matice. V závěru kapitoly zapíšeme vzorce pro řešení jednotlivých typů počátečních úloh pro systémy lineárních diferenciálních rovnic.

3.2 Malé opakování o maticích a vektorech

Tato kapitola je možná zbytečná. Po pravdě řečeno, všichni doufáme, že JE zbytečná. Že následující věci jsou pro každého studenta naprosto samozřejmé. Ale jeden nikdy neví . . .

Každopádně byste tuhle kapitolu měli alespoň rychle proběhnout, byť jen třeba proto, abyste si v duchu odřekli „tohle vím“, „tohle taky vím“, atd.

V prvním semestru se vám **matice** A typu $m \times n$ definovala jako obdélníková tabulka čísel

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

V maticích se však nemusí vyskytovat pouze čísla. Jak v dalším textu uvidíte, prvky matic mohou být např. i funkce.

Nyní na příkladu připomeneme základní operace s maticemi.

Příklad 3.1. Jsou dány matice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{a} \quad B = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 5 & -6 \end{pmatrix}.$$

Vypočtěte matice $A + B$, $3A$ a AB .

Řešení. **Součet** dvou matic stejného typu je matice, jejíž složky jsou součty odpovídajících složek sčítaných matic:

$$A + B = \begin{pmatrix} 1+4 & -1+0 \\ 3+5 & 2+(-6) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & -1 \\ 8 & -4 \end{pmatrix}$$

Násobek matice **konstantou** získáme tak, že každý prvek matice touto konstantou vynásobíme:

$$3A = \begin{pmatrix} 3 \cdot 1 & 3 \cdot (-1) \\ 3 \cdot 3 & 3 \cdot 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -3 \\ 9 & 6 \end{pmatrix}$$

Součin matic A a B získáme o něco složitějším způsobem. Prvek, který je v i -tém řádku a j -tém sloupci výsledné matice, dostaneme jako skalární součin i -tého řádku matice A s j -tým sloupcem matice B (na řádky či sloupce matic se můžeme dívat jako na vektory, proto můžeme mluvit o jejich skalárním součinu). Ve výpočtu je zvýrazněn vznik prvku ve druhém řádku a prvním sloupci:

$$\begin{aligned} AB &= \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 5 & -6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot 4 + (-1) \cdot 5 & 1 \cdot 0 + (-1) \cdot (-6) \\ 3 \cdot 4 + 2 \cdot 5 & 3 \cdot 0 + 2 \cdot (-6) \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} -1 & 6 \\ 22 & -12 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

□

U násobení matic ještě chvíli zůstaneme. V této kapitole se bude velmi často vyskytovat násobek matice se sloupcovým vektorem, který můžeme považovat za matici s jediným sloupcem.

Příklad 3.2. Vypočtěte součin matice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 4 & 0 & 2 \\ -3 & 1 & 5 \end{pmatrix}$$

s vektorem $x = (x_1, x_2, x_3)^T$

Řešení. Všimli jste si toho T u vektoru x ? Jestli ne, tak se znovu podívejte, bez něho by totiž tento příklad neměl řešení. Tohle T znamená, že matici (x_1, x_2, x_3) budeme **transponovat** neboli zaměníme řádky a sloupce – v tomto případě se z jediného řádku stane jediný sloupec. Kdyby vektor x byl řádkový, s maticí A bychom jej vůbec nemohli vynásobit.

$$Ax = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 4 & 0 & 2 \\ -3 & 1 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x_1 + 3x_2 - x_3 \\ 4x_1 + 2x_3 \\ -3x_1 + x_2 + 5x_3 \end{pmatrix}.$$

□

Teď se ještě podíváme, co se stane, vynásobíme-li maticí součet dvou vektorů, resp. konstantní násobek nějakého vektoru. O tomhle určitě také byla v prvním semestru řeč, ale v hektické atmosféře předmětu „Matematika 1“ bakalářského studia tato velmi důležitá věc mohla poněkud zapadnout.

Příklad 3.3. Vypočtěte součin matice A z předchozího příkladu s vektorem $x + y$ a s vektorem $-2x$, kde $x = (x_1, x_2, x_3)^T$ a $y = (y_1, y_2, y_3)^T$.

Řešení.

$$\begin{aligned} A(x + y) &= \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 4 & 0 & 2 \\ -3 & 1 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ x_2 + y_2 \\ x_3 + y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2(x_1 + y_1) + 3(x_2 + y_2) - (x_3 + y_3) \\ 4(x_1 + y_1) + 2(x_3 + y_3) \\ -3(x_1 + y_1) + (x_2 + y_2) + 5(x_3 + y_3) \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 2x_1 + 3x_2 - x_3 \\ 4x_1 + 2x_3 \\ -3x_1 + x_2 + 5x_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2y_1 + 3y_2 - y_3 \\ 4y_1 + 2y_3 \\ -3y_1 + y_2 + 5y_3 \end{pmatrix} = Ax + Ay \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A(-2x) &= \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 4 & 0 & 2 \\ -3 & 1 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2x_1 \\ -2x_2 \\ -2x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2(-2x_1) + 3(-2x_2) - (-2x_3) \\ 4(-2x_1) + 2(-2x_3) \\ -3(-2x_1) + (-2x_2) + 5(-2x_3) \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} -2(2x_1 + 3x_2 - x_3) \\ -2(4x_1 + 2x_3) \\ -2(-3x_1 + x_2 + 5x_3) \end{pmatrix} = -2Ax. \end{aligned}$$

□

V předchozím příkladu jsme pracovali s konkrétní maticí typu 3×3 a s konkrétní konstantou -2 . Kdybychom výpočet provedli s obecnou maticí typu $n \times n$, vektory $x = (x_1, \dots, x_n)^T$, $y = (y_1, \dots, y_n)^T$ a konstantou c , dalo by nám to sice trochu víc psaní (nebo možná naopak trochu méně, kdybychom se pokusili čtenáře zmást použitím sumačních znamení), ale zato by se pak mohlo říct, že jsme provedli důkaz tvrzení, že

$$A(x + y) = Ax + Ay \quad (3.1)$$

$$A(cx) = c(Ax). \quad (3.2)$$

Tento fakt si připomeneme, až se budeme zabývat strukturou řešení homogenní soustavy lineárních diferenciálních rovnic.

Dále bude vhodné připomenout **lineární závislost a nezávislost vektorů**. Opět to bude jen na příkladech, přesné definice si najdete sami.

Příklad 3.4. Rozhodněte, zda jsou vektory u, v a w lineárně závislé nebo nezávislé.

a) $u = (1, 2, 3), v = (1, 1, 1), w = (11, 12, 13)$

b) $u = (1, 2, 3), v = (0, 1, 1), w = (-1, 0, 3)$

Řešení. a) K závěru bychom sice mohli dojít výpočtem, ale zde se dá uhodnout: Vektory jsou lineárně závislé, protože $w = u + 10v$. (Takovéto uhodnutí je někdy cennější než výpočet stylem „cvičená opice“, protože je z něj vidět, že člověk ví, co je to lineární závislost.)

b) Tady řešení na první pohled vidět není, proto budeme počítat. Nejpohodlnější asi bude vypočítat determinant matice, jejíž řádky jsou zadané vektory, a podívat se, vyjde-li nula (lin. závislost), nebo něco nenulového (lin. nezávislost).

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 1 \cdot 1 \cdot 3 + 2 \cdot 1 \cdot (-1) + 3 \cdot 0 \cdot 0 - 3 \cdot 1 \cdot (-1) - 1 \cdot 1 \cdot 0 - 2 \cdot 0 \cdot 3 = 4 \neq 0.$$

Vektory u, v a w jsou tedy lineárně nezávislé. \square

Když už byla řeč o determinantu, připomeňme ještě, že čtvercová matice, jejíž determinant je nenulový, se nazývá **regulární**, zatímco matice s nulovým determinanem je **singulární**. Je-li matice A regulární, existuje matice k ní inverzní, kterou značíme A^{-1} . To je matice, jejíž součin s maticí původní dá jednotkovou matici. Jak se inverzní matice počítá, případně co je to jednotková matice (pokud jste snad zapomněli i tohle), si zopakujte sami nahlédnutím do probrané matematiky v bakalářském studiu.

3.3 Opakování o lineární homogenní rovnici n -tého řádu s konstantními koeficienty

Uvažujme lineární homogenní rovnici n -tého řádu

$$y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \dots + a_1y' + a_0y = 0, \quad (3.3)$$

s konstantními koeficienty a_{n-1}, \dots, a_1, a_0 .

Hledejme řešení rovnice (3.3) ve tvaru

$$y = e^{\lambda t},$$

kde λ je reálné nebo komplexní číslo. Potom λ vyhovuje **charakteristické rovnici**

$$\lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + a_{n-2}\lambda^{n-2} + \dots + a_1\lambda + a_0 = 0. \quad (3.4)$$

V následující větě si připomeneme, jakým způsobem se konstruuje obecné řešení rovnice (3.3) pro všechny možné případy kořenů charakteristické rovnice (3.4).

Věta 3.5.

a) Každému k -násobnému reálnému kořenu λ charakteristické rovnice (3.4) odpovídá k partikulárních (a lineárně nezávislých) řešení tvaru

$$e^{\lambda t}, te^{\lambda t}, t^2e^{\lambda t}, \dots, t^{k-1}e^{\lambda t}.$$

b) Každé dvojici s -násobných komplexně sdružených kořenů $\lambda_1 = \alpha + \beta i$, $\lambda_2 = \alpha - \beta i$ charakteristické rovnice (3.4) odpovídá $2s$ partikulárních (a lineárně nezávislých) řešení tvaru tvaru

$$\begin{aligned} e^{\alpha t} \cos \beta t, & \quad t e^{\alpha t} \cos \beta t, \quad t^2 e^{\alpha t} \cos \beta t, \quad \dots, \quad t^{s-1} e^{\alpha t} \cos \beta t; \\ e^{\alpha t} \sin \beta t, & \quad t e^{\alpha t} \sin \beta t, \quad t^2 e^{\alpha t} \sin \beta t, \quad \dots, \quad t^{s-1} e^{\alpha t} \sin \beta t. \end{aligned}$$

c) Součet násobností všech kořenů je roven stupni charakteristické rovnice n ; proto je počet všech výše uvedených partikulárních řešení n . **Obecné řešení** diferenciální rovnice (3.3) je lineární kombinací těchto partikulárních řešení s libovolnými koeficienty.

Příklad 3.6. Řešme diferenciální rovnici

$$y^{(5)} + y^{(4)} + 2y''' + 2y'' + y' + y = 0. \quad (3.5)$$

Řešení. Je snadné uhodnout, že charakteristická rovnice

$$\lambda^5 + \lambda^4 + 2\lambda^3 + 2\lambda^2 + \lambda + 1 = 0$$

má kořen $\lambda = -1$. Dále

$$\begin{aligned} (\lambda + 1)(\lambda^4 + 2\lambda^2 + 1) &= 0 \implies \\ \lambda_1 = -1, (\lambda^2 + 1)^2 &= 0 \implies \\ \lambda_2 = \lambda_3 = i, \lambda_4 = \lambda_5 &= -i. \end{aligned}$$

Obecné řešení diferenciální rovnice (3.5) je

$$y = c_1 e^{-t} + (c_2 + c_3 t) \cos t + (c_4 + c_5 t) \sin t,$$

kde c_1, c_2, \dots, c_5 jsou libovolné konstanty. □

3.4 Určení partikulárního řešení nehomogenní lineární diferenciální rovnice metodou odhadu

Naším cílem bude určit partikulární řešení nehomogenní lineární diferenciální rovnice n -tého řádu tvaru

$$y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \dots + a_1y' + a_0y = g(x), \quad (3.6)$$

kde a_{n-1}, \dots, a_1, a_0 jsou konstanty za předpokladu, že pravá strana $g(x)$ má speciální předepsaný tvar, který za chvíli uvedeme. Víme, že obecné řešení rovnice (3.6) je rovné součtu obecného řešení přidružené homogenní rovnice

$$y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \dots + a_1y' + a_0y = 0 \quad (3.7)$$

a některého partikulárního řešení nehomogenní rovnice. Postup konstrukce obecného řešení přidružené homogenní rovnice s konstantními koeficienty byl vyložen výše. Informace o tomto obecném řešení homogenní rovnice nám budou užitečné pro nalezení partikulárního řešení nehomogenní rovnice. Níže uvedená metoda se nazývá metodou **odhadu** nebo též metodou **neurčitých koeficientů**. Některé učebnice také píší o **zvláštní pravé straně**. Její použití je možné jen v případě, že pravá strana rovnice (3.6) má speciální tvar.

3.4.1 Věta o metodě odhadu

Použití metoda odhadu je založena na následující větě.

Věta 3.7 (Metoda odhadu). Předpokládejme, že pravá strana rovnice (3.6) má tvar

$$g(x) = e^{\alpha x} \cdot [P_s^1(x) \cos \beta x + P_m^2(x) \sin \beta x], \quad (3.8)$$

kde $P_s^1(x)$ a $P_m^2(x)$ jsou polynomy stupňů s a m . Potom má partikulární řešení rovnice (3.6) (s přesností do koeficientů polynomů) tvar

$$y_p(x) = x^k e^{\alpha x} \cdot [R_r^1(x) \cos \beta x + R_r^2(x) \sin \beta x],$$

kde $R_r^1(x)$ a $R_r^2(x)$ jsou polynomy stupňů nejvíce $r = \max\{s, m\}$. Číslo k je rovné nule, není-li výraz $\alpha + i \cdot \beta$ kořenem charakteristické rovnice asociované homogenní rovnice. V opačném případě udává číslo k násobnost tohoto kořene.

Koeficienty polynomů $R_r^1(x)$ a $R_r^2(x)$ lze určit přesně dosazením tvaru partikulárního řešení $y_p(x)$ do rovnice (3.6) a porovnáním koeficientů při stejných funkcionálních výrazech. Takový je praktický postup přesného „dourčení“. Jak již bylo uvedeno, v případě, že pravá strana $g(x)$ rovnice (3.6) nemá uvedený tvar, metoda odhadu není funkční. V takovém případě lze užít univerzální metodu - metodu varice konstant, kterou uvedeme v části.

3.4.2 Ilustrace metody odhadu

Ukážeme na příkladech, jak lze metodu odhadu použít.

Příklad 3.8. Nalezněte řešení počáteční úlohy

$$\begin{cases} y'' - 2y' + y = 2 - x, \\ y(0) = 3, y'(0) = 6. \end{cases} \quad (3.9)$$

Řešení. Pravá strana rovnice je polynomem prvního stupně. Je tedy funkcí, definovanou na celém intervalu $I = \mathbb{R}$. Proto zde bude definováno také řešení počáteční úlohy (3.9). Řešení úlohy najdeme ve třech krocích:

a) První krok spočívá v nalezení obecného řešení asociované homogenní rovnice

$$y'' - 2y' + y = 0.$$

Charakteristická rovnice má tvar

$$\lambda^2 - 2\lambda + 1 = 0$$

a její kořeny jsou

$$\lambda_1 = \lambda_2 = 1.$$

Obecné řešení asociované homogenní rovnice je určeno tvarem

$$y = (C_1 + C_2 x)e^x,$$

kde C_1 a C_2 jsou libovolné konstanty.

b) Ve druhém kroku najdeme partikulární řešení nehomogenní rovnice. Snadno lze ověřit, že pravá strana uvažované rovnice má tvar (3.8), uvedený ve Větě 3.7 pro

$$\alpha = 0, \beta = 0, P_1^1(x) = -x + 2.$$

Číslo $\alpha + i\beta = 0$ není kořenem charakteristické rovnice. Proto budeme hledat partikulární řešení ve tvaru

$$y_p(x) = x^0 e^{0 \cdot x} [(ax + b) \cos(0 \cdot x) + R_2(x) \sin(0 \cdot x)] = ax + b$$

kde a a b jsou vhodné konstanty. Můžeme je najít dosazením předpokládaného partikulárního řešení $y_p(x)$ do výchozí nehomogenní diferenciální rovnice. Dostáváme

$$y_p'' - 2y_p' + y_p = -2a + ax + b = 2 - x,$$

odkud $a = -1$ a $b = 0$. Po dosazení vidíme, že partikulární řešení je určené vztahem $y_p(t) = -x$.

c) Ve třetím a posledním kroku sestavíme obecné řešení výchozí nehomogenní rovnice a zvolíme hodnoty libovolných konstant tak, abychom obdrželi řešení, vyhovující daným počátečním podmínkám. Obecným řešením asociované nehomogenní rovnice je funkce

$$y(x) = (C_1 + C_2 x)e^x - x,$$

kde C_1 a C_2 jsou libovolné konstanty. Určeme je tak, aby partikulární řešení vyhovovalo počátečním podmínkám. Dosazení počátečních podmínek do nalezeného řešení a do jeho derivace

$$y'(x) = C_2 e^x + (C_1 + C_2 x)e^x - 1$$

vede ke vztahům

$$\begin{aligned} 3 &= C_1, \\ 6 &= C_2 + C_1 - 1. \end{aligned}$$

Tento systém má řešení $C_1 = 3$, $C_2 = 4$. Hledané řešení počáteční úlohy je

$$y(t) = (3 + 4x)e^x - x.$$

□

Příklad 3.9. Najděte obecné řešení nehomogenní rovnice

$$y'' + y = x \cos x + \sin x. \quad (3.10)$$

Řešení. I v tomto příkladu je pravá strana funkcí, definovanou na celém intervalu $I = \mathbb{R}$. Na tomto intervalu bude určeno také obecné řešení rovnice (3.10). Úlohu vyřešíme ve dvou krocích:

a) První krok opět spočívá v nalezení obecného řešení asociované homogenní rovnice

$$y'' + y = 0.$$

Charakteristická rovnice je tvaru

$$\lambda^2 + 1 = 0$$

a má kořeny

$$\lambda_{1,2} = \pm i.$$

Obecné řešení asociované homogenní rovnice je

$$y = C_1 \cos x + C_2 \sin x,$$

kde C_1 a C_2 jsou libovolné konstanty.

b) Druhý krok spočívá v hledání partikulární řešení nehomogenní rovnice. Snadno lze ověřit, že pravá strana uvažované rovnice má tvar (3.8), uvedený ve Větě 3.7 pro

$$\alpha = 0, \beta = 1, P_1^1(x) = x, P_0^2(x) = 1.$$

Číslo $\alpha + i \cdot \beta = i$ je kořenem charakteristické rovnice. Proto budeme hledat partikulární řešení ve tvaru

$$y_p(x) = xe^{0 \cdot x} [(ax + b) \cos x + (cx + d) \sin x] = (ax^2 + bx) \cos x + (cx^2 + dx) \sin x,$$

kde a, b, c a d jsou vhodné konstanty. Najdeme je dosazením předpokládaného partikulárního řešení $y_p(x)$ do výchozí nehomogenní diferenciální rovnice. Po předběžném pomocném výpočtu

$$\begin{aligned} y_p'(x) &= (2ax + b) \cos x + (2cx + d) \sin x - (ax^2 + bx) \sin x + (cx^2 + dx) \cos x = \\ &= (cx^2 + (d + 2a)x + b) \cos x + (-ax^2 + (-b + 2c)x + d) \sin x \end{aligned}$$

a

$$\begin{aligned} y_p''(x) &= (2cx + d + 2a) \cos x + (-2ax - b + 2c) \sin x - \\ &= (cx^2 + (d + 2a)x + b) \sin x + (-ax^2 + (-b + 2c)x + d) \cos x = \\ &= (-ax^2 - bx + 4cx + 2d + 2a) \cos x + (-cx^2 - 4ax - dx + 2c - 2b) \sin x \end{aligned}$$

dostáváme

$$y_p'' + y_p = (4cx + 2d + 2a) \cos x + (-4ax + 2c - 2b) \sin x = x \cos x + \sin x.$$

Porovnáním koeficientů při stejných funkcích vede k hodnotám koeficientů

$$a = 0, b = -\frac{1}{4}, c = \frac{1}{4}, d = 0.$$

Obecným řešením nehomogenní rovnice je funkce

$$y(x) = C_1 \cos x + C_2 \sin x - \frac{1}{4}x \cos x + \frac{1}{4}x^2 \sin x,$$

kde C_1 a C_2 jsou libovolné konstanty. □

3.5 Opakování o nalezení partikulárního řešení nehomogenní lineární diferenciální rovnice metodou variace konstant

Budeme se zabývat nehomogenní lineární diferenciální rovnicí n -tého řádu

$$y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \dots + a_1(x)y' + a_0(x)y = g(x).$$

Ukážeme, jak lze najít její partikulární řešení za předpokladu, že známe obecné řešení asociované homogenní lineární diferenciální rovnice

$$y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \dots + a_1(x)y' + a_0(x)y = 0.$$

Předpokládejme, že systém funkcí

$$y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)$$

je fundamentálním systémem řešení asociované homogenní rovnice. Její obecné řešení má potom tvar

$$y(x) = C_1y_1(x) + C_2y_2(x) + \dots + C_ny_n(x),$$

kde C_1, C_2, \dots, C_n jsou libovolné konstanty. Pokusíme se najít partikulární řešení $y = y_p(x)$ nehomogenní rovnice ve tvaru, který připomíná obecné řešení asociované rovnice:

$$y_p(x) = C_1(x)y_1(x) + C_2(x)y_2(x) + \dots + C_n(x)y_n(x), \quad (3.11)$$

kde

$$C_1(x), C_2(x), \dots, C_n(x) \quad (3.12)$$

jsou prozatím neznámé funkce. Další postup má svým cílem určit systém funkcí (3.12). Přitom budeme požadovat, aby některé další vlastnosti výrazu (3.11) byly analogické vlastnostem obecného řešení homogenní rovnice. Při vysvětlení podstaty se omezíme na případ rovnic druhého řádu.

3.6 Variace konstant v případě rovnic druhého řádu

Uvažujme rovnici

$$y'' + a_1(x)y' + a_0(x)y = g(x).$$

Předpokládejme, že systém funkcí $y_1(x), y_2(x)$ je fundamentálním systémem řešení asociované homogenní rovnice.

$$y'' + a_1(x)y' + a_0(x)y = 0.$$

Její obecné řešení má potom tvar

$$y(x) = C_1y_1(x) + C_2y_2(x),$$

kde C_1, C_2 jsou libovolné konstanty. Pokusíme se najít partikulární řešení $y = y_p(x)$ nehomogenní rovnice ve tvaru

$$y_p(x) = C_1(x)y_1(x) + C_2(x)y_2(x), \quad (3.13)$$

kde

$$C_1(x) \text{ a } C_2(x) \quad (3.14)$$

jsou prozatím neznámé funkce. Najdeme první derivaci výrazu (3.13). Přitom budeme předpokládat, že výsledek bude mít formální tvar stejný, jako kdyby se jednalo o derivaci obecného řešení homogenní rovnice, tj., jako kdyby funkce $C_1(x)$ a $C_2(x)$ byly konstantami. Tento předpoklad vede k požadavku, aby byla označená část výsledku rovna nule:

$$\begin{aligned} y_p'(x) &= C_1(x)y_1'(x) + C_2(x)y_2'(x) + \underbrace{C_1'(x)y_1(x) + C_2'(x)y_2(x)}_{=0} = \\ &= C_1(x)y_1'(x) + C_2(x)y_2'(x). \end{aligned}$$

Najdeme druhou derivaci. Na rozdíl od předchozího výpočtu budeme předpokládat, že označená část výsledku je rovna pravé straně nehomogenní rovnice, tj. funkci $g(x)$:

$$\begin{aligned} y_p''(x) &= C_1(x)y_1''(x) + C_2(x)y_2''(x) + \underbrace{C_1'(x)y_1'(x) + C_2'(x)y_2'(x)}_{=g(x)} = \\ &= C_1(x)y_1''(x) + C_2(x)y_2''(x) + g(x). \end{aligned}$$

Napišme oba předpoklady, které jsme učinili. První derivace hledaných funkcí $C_1(x)$ a $C_2(x)$ musí vyhovovat systému rovnic:

$$\begin{cases} C_1'(x)y_1(x) + C_2'(x)y_2(x) = 0, \\ C_1'(x)y_1'(x) + C_2'(x)y_2'(x) = g(x). \end{cases} \quad (3.15)$$

Systém (3.15) je systémem algebraických rovnic vzhledem k neznámým derivacím $C_1'(x)$ a $C_2'(x)$. Determinant tohoto systému je wronskián

$$W(x) = W(y_1(x), y_2(x)),$$

který je na uvažovaném intervalu I nenulový. Proto má systém (3.15) jediné řešení. Z principiálního hlediska není podstatné znát přesný tvar tohoto řešení (které může být snadno zapsáno s pomocí determinantů). Spokojíme se jen s konstatováním, že toto řešení může být zapsané ve tvaru

$$\begin{cases} C_1'(x) = \omega_1(x), \\ C_2'(x) = \omega_2(x), \end{cases} \quad (3.16)$$

kde funkce $\omega_1(x)$ a $\omega_2(x)$ jsou spojitými funkcemi na intervalu I . Integrací jednotlivých vztahů, uvedených v (3.16) dostáváme hledané funkce $C_1(x), C_2(x)$, vyhovující všem zapsaným požadavkům. Jejich dosazením do předpokládaného tvaru partikulárního řešení (3.11) dostáváme

$$y_p(x) = y_1(x) \int \omega_1(x) dx + y_2(x) \int \omega_2(x) dx.$$

O tom, že tento výraz je skutečně partikulárním řešením nehomogenní rovnice svědčí způsob jeho konstrukce. Můžeme se však zkouškou přímo přesvědčit o správnosti tohoto tvrzení. Poznamenejme ještě, že v případě, když budeme při integraci funkcí $\omega_1(x)$ a $\omega_2(x)$ zapisovat i příslušné libovolné integrační konstanty, dostaneme po dosazení do předpokládaného tvaru partikulárního řešení (3.13) obecné řešení dané nehomogenní rovnice.

3.7 Modifikace metody variace konstant v případě rovnic libovolného řádu

Výše uvedený postup zůstane stejný. Vypišme jen tvar systému, který je analogický uvedenému systému (3.15). Rovnice, kterým musí vyhovovat neznámé funkce (3.14), jsou

$$\begin{cases} C_1'(x)y_1(x) + \cdots + C_n'(x)y_n(x) = 0, \\ C_1'(x)y_1'(x) + \cdots + C_n'(x)y_n'(x) = 0, \\ \dots \\ C_1'(x)y_1^{(n-2)}(x) + \cdots + C_n'(x)y_n^{(n-2)}(x) = 0, \\ C_1'(x)y_1^{(n-1)}(x) + \cdots + C_n'(x)y_n^{(n-1)}(x) = g(x). \end{cases}$$

Dále postupujeme obdobně jako v případě rovnic druhého řádu. Ukažme použití metody variace konstant na příkladu.

Příklad 3.10. Najděte obecné řešení rovnice

$$y'' - 2y' + y = \frac{e^x}{x^2}. \quad (3.17)$$

Řešení. Řešení rovnice (3.17) bude definované na intervalu $I = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ (zdůvodněte proč). Postup řešení rozdělíme do dvou kroků:

a) Nejprve najdeme obecné řešení přidružené homogenní rovnice

$$y'' - 2y' + y = 0.$$

Odpovídající charakteristická rovnice

$$\lambda^2 - 2\lambda + 1 = 0$$

má dvojnásobný kořen $\lambda_{1,2} = 1$ a obecné řešení je

$$y = C_1 e^x + C_2 x e^x,$$

kde C_1 a C_2 jsou libovolné konstanty.

b) Partikulární řešení nehomogenní rovnice hledáme v souladu s metodou variace konstant ve tvaru

$$y_p(x) = C_1(x)e^x + C_2(x)xe^x.$$

Zapišme příslušný systém (3.15):

$$\begin{aligned} C_1'(x)e^x + C_2'(x)xe^x &= 0, \\ C_1'(x)e^x + C_2'(x)(1+x)e^x &= \frac{e^x}{x^2}. \end{aligned}$$

Po úpravě (krácení výrazem e^x) dostaneme

$$\begin{aligned} C_1'(x) + C_2'(x)x &= 0, \\ C_1'(x) + C_2'(x)(1+x) &= \frac{1}{x^2}, \end{aligned}$$

odkud

$$C_1'(x) = -\frac{1}{x}, \quad C_2'(x) = \frac{1}{x^2}$$

a po integraci

$$C_1(x) = -\ln|x|, \quad C_2(x) = -\frac{1}{x}.$$

Partikulární řešení má tvar

$$y_p(x) = -(\ln|x|)e^x - e^x.$$

Obecné řešení rovnice (3.17) je

$$y = C_1e^x + C_2xe^x - (\ln|x|)e^x - e^x.$$

Toto obecné řešení můžeme upravit takto (na základě vašich znalostí provedenou úpravu zdůvodněte)

$$y = D_1e^x + D_2xe^x - (\ln|x|) \cdot e^x,$$

kde D_1 a D_2 jsou libovolné konstanty. □

3.8 Příklad rovnice vyššího řádu popisující elektrický obvod

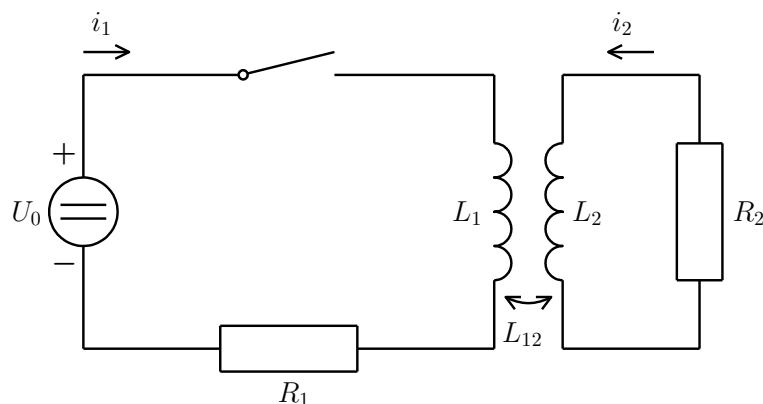
Lineární diferenciální rovnice vyššího řádu mohou mimo jiné sloužit i pro popis dějů v elektrických obvodech. Na ukázkou zde předvedeme jeden příklad.

Příklad 3.11. Uvažujme elektrický obvod znázorněný na obrázku 3.1. Před sepnutím spínače byl obvod v ustáleném stavu, tj. $i_2(0) = 0$. Určete pro $t \geq 0$ průběhy proudů $i_1(t)$ a $i_2(t)$.

Řešení. Aplikací napěťového Kirchhoffova zákona dostaneme rovnice

$$R_1i_1 + L_1 \frac{di_1}{dt} + L_{12} \frac{di_2}{dt} = U_0, \quad (3.18)$$

$$R_2i_2 + L_2 \frac{di_2}{dt} + L_{12} \frac{di_1}{dt} = 0. \quad (3.19)$$



Obr. 3.1: Elektrický obvod z příkladu 3.11

Ze druhé rovnice můžeme vyjádřit $i_1'(t)$ jako

$$\frac{di_1}{dt} = -\frac{1}{L_{12}} \left(R_2 i_2 + L_2 \frac{di_2}{dt} \right). \quad (3.20)$$

Toto vyjádření nyní dosadíme do rovnice (3.18):

$$R_1 i_1 - \frac{L_1}{L_{12}} \left(R_2 i_2 + L_2 \frac{di_2}{dt} \right) + L_{12} \frac{di_2}{dt} = U_0.$$

Jestliže takto vzniklou rovnici zderivujeme a opět dosadíme za $i_1'(t)$ podle (3.20), dostaneme rovnici druhého řádu

$$-\frac{R_1}{L_{12}} \left(R_2 i_2 + L_2 \frac{di_2}{dt} \right) - \frac{L_1}{L_{12}} \left(R_2 \frac{di_2}{dt} + L_2 \frac{d^2 i_2}{dt^2} \right) + L_{12} \frac{d^2 i_2}{dt^2} = 0.$$

Vynásobením této rovnice faktorem $L_{12}/(R_1 R_2)$ dostaneme

$$\left(\frac{L_{12}^2}{R_1 R_2} - \frac{L_1 L_2}{R_1 R_2} \right) \frac{d^2 i_2}{dt^2} - \left(\frac{L_1}{R_1} + \frac{L_2}{R_2} \right) \frac{di_2}{dt} - i_2 = 0. \quad (3.21)$$

Označme $\kappa = L_{12}/\sqrt{L_1 L_2}$ (činitel vazby cívek), $\tau_1 = L_1/R_1$ a $\tau_2 = L_2/R_2$. Potom můžeme psát

$$(\kappa^2 - 1) \tau_1 \tau_2 \frac{d^2 i_2}{dt^2} - (\tau_1 + \tau_2) \frac{di_2}{dt} - i_2 = 0.$$

Charakteristická rovnice je

$$(\kappa^2 - 1) \tau_1 \tau_2 \lambda^2 - (\tau_1 + \tau_2) \lambda - 1 = 0$$

a její kořeny jsou

$$\lambda_{1,2} = \frac{(\tau_1 + \tau_2) \pm \sqrt{(\tau_1 + \tau_2)^2 + 4(\kappa^2 - 1)\tau_1 \tau_2}}{2(\kappa^2 - 1)\tau_1 \tau_2}.$$

Je zřejmé, že kořeny jsou reálné. Řešení rovnice (3.21) proto je

$$i_2(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 e^{\lambda_2 t}.$$

V obvodu tedy nemůže vzniknout kmitavý děj; to je konečně patrné z jeho fyzikální struktury.

Zatím jsme našli obecné řešení rovnice (3.21). Potřebujeme však najít partikulární řešení. Počáteční podmínku pro proud i_2 máme – musí platit $i_2(0) = 0$. Počáteční podmínku pro první derivaci i_2 v $t = 0$ určíme z této úvahy: Protože $i_1(0) = i_2(0) = 0$, dosazením do rovnic (3.18), (3.19) dostaneme

$$\begin{aligned} L_1 \frac{di_1}{dt} \Big|_{t=0} + L_{12} \frac{di_2}{dt} \Big|_{t=0} &= U_0, \\ L_2 \frac{di_2}{dt} \Big|_{t=0} + L_{12} \frac{di_1}{dt} \Big|_{t=0} &= 0. \end{aligned}$$

Z těchto rovnic dostaneme

$$\frac{di_2}{dt} \Big|_{t=0} = \frac{U_0 L_{12}}{L_{12}^2 - L_1 L_2} = \frac{U_0 \kappa^2}{(\kappa^2 - 1) L_{12}}.$$

Integrační konstanty c_1 a c_2 určíme ze soustavy rovnic

$$\begin{aligned} c_1 + c_2 &= 0 \\ \lambda_1 c_1 + \lambda_2 c_2 &= \frac{U_0 \kappa^2}{(\kappa^2 - 1) L_{12}}. \end{aligned}$$

Z první rovnice máme $c_1 = -c_2$. Dosazením do druhé rovnice pak vyjde

$$c_1 = -c_2 = \frac{U_0 \kappa^2}{(\kappa^2 - 1) L_{12} (\lambda_1 - \lambda_2)},$$

takže

$$i_2(t) = \frac{U_0 \kappa^2}{(\kappa^2 - 1) L_{12} (\lambda_1 - \lambda_2)} (e^{\lambda_1 t} - e^{\lambda_2 t}).$$

Zřejmě je $|\lambda_1| < |\lambda_2|$, takže $\lambda_1 - \lambda_2 > 0$ a $e^{\lambda_1 t} - e^{\lambda_2 t} \geq 0$. Protože $\kappa < 1$, je $\kappa^2 - 1 < 0$. Vychází tedy $i_2(t) \leq 0$. Z toho plyne, že proud $i_2(t)$ má opačný směr, než je na obrázku 3.1 znázorněno čítcací šipkou.

Nyní se zabývejme vyšetřením průběhu proudu $i_1(t)$. V novém ustáleném stavu je

$$i_1(\infty) = \frac{U_0}{R_1} = i_{1p}.$$

Z výchozí soustavy rovnic napsané pro $t = 0$ dostaneme

$$\frac{di_1}{dt} \Big|_{t=0} = \frac{U_0 L_2}{L_1 L_2 - L_{12}^2} = \frac{-U_0}{(\kappa^2 - 1) L_1}.$$

Po výpočtu integračních konstant najdeme výsledek

$$i_1(t) = \frac{U_0}{R_1} \left(1 + \lambda_1 \frac{1 + \lambda_2 \tau_1}{\lambda_2 - \lambda_1} e^{\lambda_1 t} - \lambda_2 \frac{1 + \lambda_1 \tau_2}{\lambda_2 - \lambda_1} e^{\lambda_2 t} \right).$$

□

3.9 Vektorový tvar lineárního systému a existence řešení

Budeme se zabývat řešením soustavy n obyčejných diferenciálních rovnic prvního řádu tvaru

$$\begin{aligned} x_1' &= a_{11}(t)x_1 + a_{12}(t)x_2 + \cdots + a_{1n}(t)x_n + f_1(t) \\ x_2' &= a_{21}(t)x_1 + a_{22}(t)x_2 + \cdots + a_{2n}(t)x_n + f_2(t) \\ &\vdots \\ x_n' &= a_{n1}(t)x_1 + a_{n2}(t)x_2 + \cdots + a_{nn}(t)x_n + f_n(t). \end{aligned} \quad (3.22)$$

Tuto soustavu můžeme přepsat jako

$$\begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ \vdots \\ x_n' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}(t) & a_{12}(t) & \cdots & a_{1n}(t) \\ a_{21}(t) & a_{22}(t) & \cdots & a_{2n}(t) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1}(t) & a_{n2}(t) & \cdots & a_{nn}(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} f_1(t) \\ f_2(t) \\ \vdots \\ f_n(t) \end{pmatrix}$$

neboli zkráceně

$$x' = A(t)x + f(t), \quad (3.23)$$

kde

$$x = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{pmatrix}, \quad A(t) = \begin{pmatrix} a_{11}(t) & a_{12}(t) & \cdots & a_{1n}(t) \\ a_{21}(t) & a_{22}(t) & \cdots & a_{2n}(t) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1}(t) & a_{n2}(t) & \cdots & a_{nn}(t) \end{pmatrix}, \quad f(t) = \begin{pmatrix} f_1(t) \\ f_2(t) \\ \vdots \\ f_n(t) \end{pmatrix}.$$

Příklad 3.12. Soustavu diferenciálních rovnic

$$\begin{aligned} x_1' &= -2x_1 + 5x_2 + e^t - 2t \\ x_2' &= 4x_1 - 3x_2 + 10t \end{aligned}$$

můžeme zapsat maticově jako

$$x' = \begin{pmatrix} -2 & 5 \\ 4 & -3 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} e^t - 2t \\ 10t \end{pmatrix},$$

zatímco soustavu

$$x' = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix}$$

můžeme rozepsat po složkách jako

$$\begin{aligned} x_1' &= x_1 - 2x_2 + \cos t \\ x_2' &= 5x_2 + \sin t. \end{aligned}$$

Definice 3.13. Sloupcový vektor

$$x = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{pmatrix}$$

je **řešením** systému diferenciálních rovnic (3.22) na intervalu I , jestliže všechny jeho složky jsou na I diferencovatelné a rovnice (3.22) jsou splněny pro každé $t \in I$.

Příklad 3.14. Ověřte, že vektory

$$x_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^{-2t} = \begin{pmatrix} e^{-2t} \\ -e^{-2t} \end{pmatrix} \quad \text{a} \quad x_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix} e^{6t} = \begin{pmatrix} 3e^{6t} \\ 5e^{6t} \end{pmatrix}$$

jsou řešením soustavy

$$x' = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 3 \end{pmatrix} x$$

na intervalu $(-\infty, \infty)$.

Řešení. Výpočet provedeme pouze pro x_1 ; s x_2 si pak již čtenář určitě poradí sám. Dosadíme vektor x_1 do zadané soustavy rovnic za x a přesvědčíme se, že se levá strana soustavy rovná pravé straně:

$$\begin{aligned} L &= x_1' = \begin{pmatrix} (e^{-2t})' \\ (-e^{-2t})' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2e^{-2t} \\ 2e^{-2t} \end{pmatrix} \\ P &= \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 3 \end{pmatrix} x_1 = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{-2t} \\ -e^{-2t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{-2t} + 3(-e^{-2t}) \\ 5e^{-2t} + 3(-e^{-2t}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2e^{-2t} \\ 2e^{-2t} \end{pmatrix} = L. \end{aligned}$$

□

Stejně jako u jediné diferenciální rovnice, i u systémů diferenciálních rovnic často řešíme tzv. **počáteční úlohu**, která spočívá v tom, že hledáme řešení zadaného systému, které vyhovuje určité počáteční podmínce:

$$x' = A(t)x + f(t), \quad x(t_0) = x_0, \quad (3.24)$$

kde $t_0 \in \mathbb{R}$ je nějaký bod (často, ale nikoli vždy, to bývá 0) a $x_0 = (\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n)^T$.

Příklad 3.15. Vektor x_1 z příkladu 3.14 je řešením soustavy z téhož příkladu, které vyhovuje počáteční podmínce $x(0) = (1, -1)^T$, protože $x_1(0) = (e^0, -e^0)^T = (1, -1)^T$.

Zato počáteční podmínce $x(2) = (3, 4)^T$ by nevyhovovalo ani jedno z řešení x_1, x_2 . Tím ovšem nijak neříkáme, že řešení splňující tuto podmínku neexistuje. Jak je to s existencí řešení soustav lineárních diferenciálních rovnic, o tom mluví následující věta.

Věta 3.16 (O existenci a jednoznačnosti řešení).

Jsou-li všechny prvky matice $A(t)$ a vektoru $f(t)$ funkce spojité na intervalu I , který obsahuje bod t_0 , pak existuje jediné řešení počátečního problému (3.24) na intervalu I .

3.10 Struktura řešení soustav lineárních diferenciálních rovnic

V této kapitole se budeme zabývat tím, jak řešení soustavy lineárních diferenciálních rovnic obecně vypadá a jak se dá zapsat. Postupy pro nalezení řešení budou popsány až v dalších kapitolách. Aniž bychom to dál zdůrazňovali, všude v této kapitole budeme předpokládat, že prvky matice A a vektoru f v soustavě (3.23) jsou spojité funkce na nějakém intervalu I .

3.10.1 Homogenní soustavy

Nejprve se zaměříme na **homogenní soustavy**. To jsou takové soustavy, kde $f(t) \equiv 0$, tj. ze soustavy (3.23) zbude pouze

$$x' = A(t)x. \quad (3.25)$$

Příkladem homogenního systému je systém rovnic z příkladu 3.14. V tomto příkladu byly uvedeny dva vektory, x_1 a x_2 , které byly řešeními uvedené soustavy. Vyzýváme čtenáře, aby samostatně ověřil, že i $2x_1$ je řešením oné soustavy, stejně jako $x_1 + x_2$. Když si to zkusíte, asi již snadno uvěříte následujícímu tvrzení.

Princip superpozice

Věta 3.17 (Princip superpozice).

Nechť x_1, x_2, \dots, x_k , $k \in \mathbb{N}$, jsou řešení homogenního systému (3.25) na intervalu I . Pak je také libovolná lineární kombinace

$$x = c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_kx_k, \quad c_i \in \mathbb{C}, i = 1, \dots, k,$$

řešením tohoto systému na intervalu I .

Zůstaňme ještě chvíli u příkladu 3.14. Známe dvě konkrétní řešení zadané soustavy a nyní jsme ukázali, že pomocí nich dostaneme hromadu dalších řešení. Teď se možná ptáte, jestli takhle, tj. coby lineární kombinace x_1 a x_2 , dostaneme úplně všechna řešení. Zde je odpověď ANO. Proč to tak je, to asi na první pohled zřejmé není, takže tomu pro tenhle moment prostě uvěřte.

Kdybychom však měli k dispozici řešení $x_1 = (e^{-2t}, -e^{-2t})^T$ a $x_3 = 2x_1 = (2e^{-2t}, -2e^{-2t})^T$ (že tohle je taky řešení, si snadno ověříte), všechna řešení bychom jako jejich lineární kombinace nedostali. To je vidět docela dobře, stačí se podívat na řešení $x_2 = (3e^{6t}, 5e^{6t})^T$. Ať se budeme snažit sebevíc, takové konstanty c_1 a c_2 , pro které by platilo $x_2 = c_1x_1 + c_2x_3$, nenajdeme.

Nyní se zamyslete, v čem je ten zásadní rozdíl mezi dvojicemi řešení x_1, x_2 a x_1, x_3 . Následující definice snad napoví.

Lineární závislost a nezávislost řešení

Definice 3.18 (Lineární závislost a nezávislost řešení).

Nechť x_1, x_2, \dots, x_k jsou řešení homogenního systému (3.25) na intervalu I . Řekneme, že tato řešení jsou **lineárně závislá** na tomto intervalu, jestliže existují konstanty

$$c_1, c_2, \dots, c_k$$

ne všechny rovné nule, takové že

$$c_1 x_1(t) + c_2 x_2(t) + \dots + c_k x_k(t) = 0$$

pro každé $t \in I$. Jestliže vektory nejsou na I lineárně závislé, říkáme, že jsou **lineárně nezávislé**.

Lineární závislost obyčejných číselných vektorů už znáte, a proto vás asi nepřekvapí, že vektory jsou lineárně závislé, pokud lze jeden z nich vyjádřit jako lineární kombinaci ostatních (pro dva vektory to znamená, že jeden je konstantním násobkem druhého).

K rozeznání toho, zda n -tice řešení soustavy n diferenciálních rovnic je či není lineárně závislá, slouží tzv. Wronskián. Pod tímto vznešeným vědeckým jménem se skrývá determinant matice poskládané z jednotlivých vektorů řešení.

Věta 3.19 (Kritérium pro lineární nezávislost řešení).

Nechť x_1, x_2, \dots, x_n jsou řešení homogenního systému (3.25) na intervalu I ,

$$x_1 = \begin{pmatrix} x_{11} \\ x_{21} \\ \vdots \\ x_{n1} \end{pmatrix}, x_2 = \begin{pmatrix} x_{12} \\ x_{22} \\ \vdots \\ x_{n2} \end{pmatrix}, \dots, x_n = \begin{pmatrix} x_{1n} \\ x_{2n} \\ \vdots \\ x_{nn} \end{pmatrix}.$$

Tato řešení jsou lineárně nezávislá, právě když je Wronskián

$$W(x_1, x_2, \dots, x_n) = \begin{vmatrix} x_{11} & x_{12} & \dots & x_{1n} \\ x_{21} & x_{22} & \dots & x_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_{n1} & x_{n2} & \dots & x_{nn} \end{vmatrix} \neq 0 \quad (3.26)$$

pro každé $t \in I$.

Dá se ukázat, že jsou-li x_1, x_2, \dots, x_n vektory řešení soustavy (3.25), pak je buďto

$$W(x_1, x_2, \dots, x_n) \neq 0 \quad \text{pro každé } t \in I,$$

nebo

$$W(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0 \quad \text{pro každé } t \in I.$$

Pokud tedy ukážeme, že je Wronskián nenulový v jediném bodě $t_0 \in I$, plyne z toho již, že je nenulový na celém intervalu I . Tento fakt se vám možná nezdá nijak převratný, nicméně vězte, že slouží k důkazům mnoha tvrzení, která zde dále uvedeme. (Uvedeme ta tvrzení, nikoli jejich důkazy. Kdyby přece jenom někdo chtěl vědět, proč něco platí, a ne jenom, že to platí, nechtě se s důvěrou obrátit na svého učitele. Určitě ho svým zájmem potěší.)

Příklad 3.20. Ukažte, že vektory

$$x_1 = \begin{pmatrix} \cos t \\ -\frac{1}{2} \cos t + \frac{1}{2} \sin t \\ -\cos t - \sin t \end{pmatrix}, x_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ e^t \\ 0 \end{pmatrix}, x_3 = \begin{pmatrix} \sin t \\ -\frac{1}{2} \sin t - \frac{1}{2} \cos t \\ -\sin t + \cos t \end{pmatrix},$$

které jsou řešeními systému

$$x' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & -1 \end{pmatrix} x,$$

jsou lineárně nezávislé.

Řešení. To, že jsou vektory x_1, x_2, x_3 řešeními nějaké soustavy, uvádíme jenom pro pořádek. Z cvičných důvodů to můžete sami ověřit. Tady budeme řešit, co bylo zadáno, tj. zjišťovat, jestli jsou tyto vektory lineárně nezávislé. Vypočteme Wronskián:

$$\begin{aligned} W(x_1, x_2, x_3) &= \begin{vmatrix} \cos t & 0 & \sin t \\ -\frac{1}{2} \cos t + \frac{1}{2} \sin t & e^t & -\frac{1}{2} \sin t - \frac{1}{2} \cos t \\ -\cos t - \sin t & 0 & -\sin t + \cos t \end{vmatrix} = \\ &= \cos t \cdot e^t \cdot (-\sin t + \cos t) - \sin t \cdot e^t \cdot (-\cos t - \sin t) = e^t \neq 0. \end{aligned}$$

Wronskián je nenulový pro všechna reálná t , a proto jsou vektory x_1, x_2, x_3 lineárně nezávislé. \square

Fundamentální množina řešení

Definice 3.21 (Fundamentální množina řešení).

Jakákoli n -tice x_1, x_2, \dots, x_n lineárně nezávislých řešení homogenního systému (3.25) na intervalu I se nazývá **fundamentální množina řešení** na tomto intervalu.

Pomocí fundamentální množiny budeme moci zapsat jakékoli řešení systému. Jestli si teď děláte starosti, jestli se vždy podaří najít k soustavě n rovnic n lineárně nezávislých řešení, následující věta vás jistě uklidní.

Věta 3.22. *Fundamentální množina řešení homogenního systému (3.25) na intervalu I vždy existuje.*

Věta o struktuře obecného řešení homogenního systému

Definice 3.23 (Obecné řešení homogenního systému).

Nechť x_1, x_2, \dots, x_n je fundamentální množina řešení homogenního systému (3.25) na nějakém intervalu I . Obecné řešení systému na tomto intervalu se definuje jako

$$x = c_1 x_1 + c_2 x_2 + \dots + c_n x_n, \quad (3.27)$$

kde $c_i, i = 1, 2, \dots, n$, jsou libovolné konstanty.

Dá se ukázat, že každé řešení systému (3.25) lze zapsat ve tvaru (3.27), tj. ke každému řešení x najdeme konstanty c_1, \dots, c_n tak, aby platilo (3.27).

Příklad 3.24. Zapište obecné řešení soustavy z příkladu 3.20.

Řešení. Známe tři řešení zadané soustavy – x_1, x_2 a x_3 . V příkladu 3.20 jsme ověřili, že jsou to řešení lineárně nezávislá. Proto tvoří fundamentální množinu řešení a obecné řešení soustavy je tedy

$$x = c_1 \begin{pmatrix} \cos t \\ -\frac{1}{2} \cos t + \frac{1}{2} \sin t \\ -\cos t - \sin t \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 0 \\ e^t \\ 0 \end{pmatrix} + c_3 \begin{pmatrix} \sin t \\ -\frac{1}{2} \sin t - \frac{1}{2} \cos t \\ -\sin t + \cos t \end{pmatrix}.$$

□

3.10.2 Nehomogenní soustavy

Nyní se zaměříme na **nehomogenní systémy** (tj. funkce $f(t)$ v systému (3.23) už nebude nulová).

Partikulární řešení x_p nehomogenního systému je libovolný vektor neobsahující volitelné konstanty, který vyhovuje soustavě rovnic (3.23).

Příklad 3.25. Ověřte, že vektor

$$x_p = \begin{pmatrix} 3t - 4 \\ -5t + 6 \end{pmatrix}$$

je partikulární řešení nehomogenního systému

$$x' = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 3 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 12t - 11 \\ -3 \end{pmatrix}$$

na intervalu $(-\infty, \infty)$

Řešení. Dosadíme vektor x_p do zadané soustavy rovnic a přesvědčíme se, že se levá strana soustavy rovná pravé straně:

$$\begin{aligned} L &= x'_p = \begin{pmatrix} 3 \\ -5 \end{pmatrix} \\ P &= \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 3 \end{pmatrix} x_p + \begin{pmatrix} 12t - 11 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3t - 4 \\ -5t + 6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 12t - 11 \\ -3 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 1 \cdot (3t - 4) + 3 \cdot (-5t + 6) + 12t - 11 \\ 5 \cdot (3t - 4) + 3 \cdot (-5t + 6) - 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -5 \end{pmatrix} = L. \end{aligned}$$

□

Všimněte si, prosím, že pokud z pravé strany soustavy diferenciálních rovnic, kterou jsme v tomto příkladu zkoumali, vypustíme vektor $f(t) = (12t - 11, -3)^T$, zůstane nám homogenní systém, kterým jsme se zabývali v příkladu 3.14. Víme již, že řešením tohoto homogenního systému je např. vektor $x_1 = (e^{-2t}, -e^{-2t})^T$. V následujícím příkladu se podíváme, co se stane, jestliže sečteme jedno partikulární řešení nehomogenního systému diferenciálních rovnic s jedním řešením příslušného homogenního systému.

Příklad 3.26. Ověřte, že vektor

$$x = x_p + x_1 = \begin{pmatrix} 3t - 4 \\ -5t + 6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e^{-2t} \\ -e^{-2t} \end{pmatrix}$$

je také řešením systému z příkladu 3.25.

Řešení. Jestli si teď říkáte, že je to pořád na jedno brdo a že tenhle příklad přeskočíte, počkejte s tím přeskakováním ještě chvíli. Příklad totiž vyřešíme jinak než ten předchozí, způsobem, který by vás měl dovést k tomu, abyste snáze uvěřili větě, která bude následovat.

Víme již, že x_p je řešením nehomogenního systému, zatímco x_1 je řešením homogenního systému se stejnou maticí

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}.$$

Tedy platí $x_p' = Ax_p + f$, zatímco $x_1' = Ax_1$. Jak to dopadne pro součet, který jsme označili jako x ?

$$x' = (x_p + x_1)' = x_p' + x_1' = Ax_p + f + Ax_1 = A(x_p + x_1) + f = Ax + f.$$

Dokázali jsme tedy, že x vyhovuje soustavě $x' = Ax + f$.

Když si tento postup ještě jednou prohlédnete, uvidíte, že jsme vlastně nikde nepracovali s konkrétními čísly nebo funkcemi, ani se nikde neprojevovalo, že se jedná o soustavu dvou rovnic a ne třeba tří. Všechno bylo provedeno obecně pro vektor x_p , který je řešením nehomogenního systému $x' = Ax + f$, a pro vektor x_1 , který je řešením homogenního systému $x' = Ax$. Když si ještě vzpomeneme, jak vypadá obecné řešení homogenního systému, můžeme tímto považovat následující větu za dokázanou. \square

Věta 3.27. *Nechť x_1, x_2, \dots, x_k , $k \in \mathbb{N}$, jsou řešení homogenního systému (3.25) na intervalu I a nechť x_p je libovolné řešení nehomogenního systému (3.23) na totéž intervalu. Pak*

$$x = c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_kx_k + x_p,$$

kde c_1, c_2, \dots, c_k jsou libovolné konstanty, je také řešením nehomogenního systému (3.23) na intervalu I .

Věta o struktuře obecného řešení nehomogenního systému

Definice 3.28 (Obecné řešení nehomogenního systému).

Nechť x_p je jedno dané řešení nehomogenního systému (3.23) na nějakém intervalu I a nechť

$$x_c = c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n$$

je obecné řešení odpovídajícího homogenního systému (3.25) na tomtéž intervalu. **Obecné řešení** nehomogenního systému na intervalu I lze zapsat jako

$$x = x_c + x_p. \quad (3.28)$$

Obecné řešení x nehomogenního systému (3.23) je tedy rovno součtu obecného řešení x_c přidruženého homogenního systému (3.25) a některého partikulárního řešení x_p nehomogenního systému (3.23).

Jak se dalo očekávat, každé řešení systému (3.23) lze zapsat ve tvaru (3.28), tj. ke každému řešení x najdeme konstanty c_1, \dots, c_n tak, aby platilo (3.28).

Příklad 3.29. Zapište obecné řešení nehomogenního systému z příkladu 3.25.

Řešení. V příkladu 3.25 jsme ověřili, že partikulárním řešením zadaného systému je např. vektor $x_p = (3t - 4, -5t + 6)^T$. V příkladu 3.14 byla uvedena dvě řešení příslušného homogenního systému: $x_1 = (e^{-2t}, -e^{-2t})^T$ a $x_2 = (3e^{6t}, 5e^{6t})^T$. Sami ověřte, že jsou to řešení lineárně nezávislá. Obecné řešení homogenního systému je proto

$$x_c = c_1 \begin{pmatrix} e^{-2t} \\ -e^{-2t} \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 3e^{6t} \\ 5e^{6t} \end{pmatrix}.$$

Na základě definice 3.28 je tedy obecné řešení zadaného nehomogenního systému

$$x = x_c + x_p = c_1 \begin{pmatrix} e^{-2t} \\ -e^{-2t} \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 3e^{6t} \\ 5e^{6t} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3t - 4 \\ -5t + 6 \end{pmatrix},$$

a to na intervalu $(-\infty, \infty)$. □

3.10.3 Fundamentální matice a její vlastnosti

Jak jste viděli, zápis obecného řešení soustavy diferenciálních rovnic je dost dlouhý a může být poněkud nepřehledný. K němu něco kratšímu zápisu může sloužit tzv. **fundamentální matice**, o které nyní bude řeč.

Vrátíme se nyní k homogenním soustavám. Jak již jsme řekli, jestliže x_1, x_2, \dots, x_n je fundamentální množina řešení homogenního systému (3.25) na intervalu I , pak obecné řešení systému na tomto intervalu je $x = c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n$. Toto řešení rozepíšeme a trochu si s jeho zápisem pohrajeme:

$$x = c_1 \begin{pmatrix} x_{11} \\ x_{21} \\ \vdots \\ x_{n1} \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} x_{12} \\ x_{22} \\ \vdots \\ x_{n2} \end{pmatrix} + \cdots + c_n \begin{pmatrix} x_{1n} \\ x_{2n} \\ \vdots \\ x_{nn} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} c_1x_{11} + c_2x_{12} + \cdots + c_nx_{1n} \\ c_1x_{21} + c_2x_{22} + \cdots + c_nx_{2n} \\ \vdots \\ c_1x_{n1} + c_2x_{n2} + \cdots + c_nx_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_{11}c_1 + x_{12}c_2 + \cdots + x_{1n}c_n \\ x_{21}c_1 + x_{22}c_2 + \cdots + x_{2n}c_n \\ \vdots \\ x_{n1}c_1 + x_{n2}c_2 + \cdots + x_{nn}c_n \end{pmatrix}.$$

Vidíme, že obecné řešení homogenního systému můžeme zapsat jako maticový součin

$$x = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & \cdots & x_{1n} \\ x_{21} & x_{22} & \cdots & x_{2n} \\ \vdots & & & \vdots \\ x_{n1} & x_{n2} & \cdots & x_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}. \quad (3.29)$$

Definice 3.30 (Fundamentální matice).

Nechť

$$x_1 = \begin{pmatrix} x_{11} \\ x_{21} \\ \vdots \\ x_{n1} \end{pmatrix}, x_2 = \begin{pmatrix} x_{12} \\ x_{22} \\ \vdots \\ x_{n2} \end{pmatrix}, \dots, x_n = \begin{pmatrix} x_{1n} \\ x_{2n} \\ \vdots \\ x_{nn} \end{pmatrix}$$

je fundamentální množina řešení homogenního systému (3.25) na intervalu I . Matice

$$\Phi(t) = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & \cdots & x_{1n} \\ x_{21} & x_{22} & \cdots & x_{2n} \\ \vdots & & & \vdots \\ x_{n1} & x_{n2} & \cdots & x_{nn} \end{pmatrix}$$

se nazývá **fundamentální matice** systému na tomto intervalu.

Vztah (3.29) říká, že obecné řešení homogenního systému (3.25) můžeme zapsat pomocí fundamentální matice systému jako $x = \Phi(t)c$, kde c je $n \times 1$ sloupcový vektor libovolných konstant.

Příklad 3.31. Zapište obecné řešení homogenní soustavy z příkladu 3.14 pomocí fundamentální matice.

Řešení. Víme, že vektory

$$x_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^{-2t} = \begin{pmatrix} e^{-2t} \\ -e^{-2t} \end{pmatrix} \quad \text{a} \quad x_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix} e^{6t} = \begin{pmatrix} 3e^{6t} \\ 5e^{6t} \end{pmatrix}$$

tvorí fundamentální množinu řešení zadané soustavy na intervalu $(-\infty, \infty)$.

Fundamentální matice je proto

$$\Phi(t) = \begin{pmatrix} e^{-2t} & 3e^{6t} \\ -e^{-2t} & 5e^{6t} \end{pmatrix}$$

a obecné řešení je

$$x = \begin{pmatrix} e^{-2t} & 3e^{6t} \\ -e^{-2t} & 5e^{6t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}.$$

□

U fundamentální matice ještě chvíli zůstaneme. Budeme zkoumat různé její vlastnosti, které přijdou vhod později.

Protože $x = \Phi(t)c$ je řešením soustavy $x' = A(t)x$, musí platit

$$\Phi'(t)c = A(t)\Phi(t)c \quad \text{neboli} \quad (\Phi'(t) - A(t)\Phi(t))c = o.$$

Jelikož tento vztah platí pro každé $t \in I$ a pro jakýkoli sloupcový vektor konstant c , musí být

$$\Phi'(t) - A(t)\Phi(t) = o,$$

a tedy

$$\Phi'(t) = A(t)\Phi(t). \quad (3.30)$$

Další důležitou vlastností fundamentální matice je to, že její determinant je vždy různý od nuly. To je vidět z toho, že determinant fundamentální matice je vlastně Wronskián $W(x_1, x_2, \dots, x_n)$. Protože řešení x_1, \dots, x_n jsou lineárně nezávislá, je $\det \Phi(t) = W(x_1, \dots, x_n) \neq 0$ pro každé $t \in I$. Odtud hned plyne platnost následující věty.

Věta 3.32 (Fundamentální matice má inverzi).

Nechť $\Phi(t)$ je fundamentální matice homogenního systému (3.25) na intervalu I . Pak $\Phi(t)^{-1}$ existuje pro každé $t \in I$.

Zkuste se nyní trochu zamyslet nad tím, jestli k dané soustavě diferenciálních rovnic existuje pouze jediná fundamentální matice, nebo jestli jich může být víc. Už jste něco vymysleli? Správná odpověď je, že fundamentální matice jednoznačně dána není. Např. v příkladu 3.31 by stačilo v matici Φ prohodit sloupce a už bychom měli jinou fundamentální matici. Fundamentálních matic k danému systému existuje dokonce nekonečně mnoho. Nás teď bude zajímat jedna – označíme ji speciálně $\Psi(t)$, která mezi všemi ostatními vyniká tou vlastností, že v určitém vybraném bodě $t_0 \in I$ platí

$$\Psi(t_0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix} = E, \quad (3.31)$$

kde E je jednotková matice typu $n \times n$.

Fundamentální množinu řešení, ze kterých je matice Ψ poskládaná, tvoří vektory v_i , $i = 1, \dots, n$, takové že

$$v_1(t_0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v_2(t_0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \dots, \quad v_n(t_0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (3.32)$$

Najít matici Ψ s vlastností (3.31) není úplně jednoduché. Jedna možnost je využít libovolnou fundamentální matici $\Phi(t)$, kterou už jsme nějak získali. Matici Ψ pak můžeme vypočítat jako

$$\Psi(t) = \Phi(t)\Phi(t_0)^{-1}.$$

Později ukážeme, jakým jiným způsobem se dá matice Ψ najít a k čemu vlastně může být dobrá.

3.11 Exponenciála matice a její užití

3.11.1 Definice exponenciály matice

V této části definujeme pojem takzvané exponenciály matice. Definice, kterou nyní uvedeme je motivována známým rozkladem exponenciální funkce do Mac'laurinovy řady

$$e^t = 1 + \frac{1}{1!} \cdot t + \frac{1}{2!} \cdot t^2 + \dots + \frac{1}{n!} \cdot t^n + \dots,$$

která konverguje pro všechny hodnoty $t \in \mathbb{R}$.

Uvedme ještě jednu motivaci. Předpokládejme, že máme najít řešení skalární úlohy

$$y' = ay, \quad y(0) = y_0. \quad (3.33)$$

Použijme metodu postupných aproximací. Potom

$$\begin{aligned} y_1(t) &= y_0 + \int_0^t a \cdot y_0 ds = y_0 + aty_0 = (1 + at)y_0, \\ y_2(t) &= y_0 + \int_0^t a \cdot y_1(s) ds = y_0 + \int_0^t (a \cdot y_0 + a^2 s \cdot y_0) ds = \\ &\quad \left(1 + \frac{1}{1!} at + \frac{1}{2!} a^2 t^2\right) y_0, \\ &\dots \\ y_k(t) &= \left(1 + \frac{1}{1!} at + \frac{1}{2!} a^2 t^2 + \dots + \frac{1}{k!} a^k t^k\right) y_0, \\ &\dots \end{aligned}$$

V limitě pak dostáváme

$$y(t) = \left(1 + \frac{1}{1!} at + \frac{1}{2!} a^2 t^2 + \dots + \frac{1}{k!} a^k t^k + \dots\right) y_0 = e^{at} \cdot y_0.$$

Budeme-li místo skalární úlohy (3.33) uvažovat systém

$$y' = Ay, \quad y(0) = y_0 \quad (3.34)$$

s konstantní $n \times n$ maticí A a s číselným vektorem y_0 , pak analogický postup dává

$$\begin{aligned} y_1(t) &= y_0 + \int_0^t A \cdot y_0 ds = y_0 + tAy_0 = (1 + tA)y_0, \\ y_2(t) &= y_0 + \int_0^t A \cdot y_1(s) ds = y_0 + \int_0^t (A \cdot y_0 + tAa^2 \cdot y_0) = \\ &\quad \left(1 + \frac{t}{1!}A + \frac{1}{2!}t^2A^2\right) y_0, \\ &\dots \\ y_k(t) &= \left(1 + \frac{t}{1!}A + \frac{1}{2!}t^2A^2 + \dots + \frac{1}{k!}t^kA^k\right) y_0, \\ &\dots \end{aligned}$$

Výsledkem je nekonečná řada

$$y(t) = \left(1 + \frac{1}{1!}tA + \frac{1}{2!}t^2A^2 + \dots + \frac{1}{k!}t^kA^k + \dots\right) y_0,$$

která je součinem tzv. exponenciály matice A (v závorkách) a vektoru y_0 .

Definice 3.33. Pro $n \times n$ matici $B(t)$ definujme *exponenciálu matice* jako novou $n \times n$ matici pomocí řady

$$e^{B(t)} := \exp[B(t)] = E + \frac{1}{1!}B(t) + \frac{1}{2!}B^2(t) + \dots + \frac{1}{n!}B^n(t) + \dots \quad (3.35)$$

Každý prvek matice $\exp[B(t)]$ je součtem některé řady a výše uvedená definice v sobě zahrnuje celkem $n \times n$ řad. Lze ukázat, že každá tato řada konverguje, a tím prokázat korektnost této definice. Použitím Definice 3.33 se snadno dokáže následující

Věta 3.34. *Je-li O nulová $n \times n$ matice, pak*

$$e^O = E.$$

Další vlastnost říká, že pro exponenciálu matice platí podobná výpočetní pravidla jako pro exponenciální funkci

Věta 3.35. *Jestliže $n \times n$ matice A a B komutují, tj. platí-li $AB = BA$, potom*

$$e^A \cdot e^B = e^{A+B} = e^B \cdot e^A.$$

Důkaz této věty jenom naznačíme s důrazem na ten moment, kdy je zapotřebí komutativita matic. Pro jednoduchost budeme dokazovat rovnost dvou posledních výrazů (podobně by se dokázala rovnost prvních dvou). Podle definice rozvineme druhý výraz

$$e^{A+B} = E + \frac{A+B}{1!} + \frac{(A+B)^2}{2!} + \dots$$

$$\begin{aligned}
&= E + \frac{A}{1!} + \frac{B}{1!} + \frac{1}{2}(A+B)(A+B) + \dots \\
&= E + \frac{A}{1!} + \frac{B}{1!} + \frac{1}{2}(A^2 + AB + BA + B^2) + \dots \\
&= E + \frac{A}{1!} + \frac{B}{1!} + \frac{1}{2}(A^2 + 2AB + B^2) + \dots
\end{aligned}$$

Nyní vypočteme podle definice třetí výraz:

$$\begin{aligned}
e^B \cdot e^A &= \left[E + \frac{B}{1!} + \frac{B^2}{2!} + \frac{B^3}{3!} + \dots \right] \\
&\quad \times \left[E + \frac{A}{1!} + \frac{A^2}{2!} + \frac{A^3}{3!} + \dots \right] \\
&= E^2 + \frac{A}{1!} + \frac{B}{1!} + \frac{A^2}{2!} + \frac{BA}{1!1!} + \frac{B^2}{2!} + \dots \\
&= E^2 + \frac{A}{1!} + \frac{B}{1!} + \frac{1}{2}(A^2 + 2BA + B^2) + \dots
\end{aligned}$$

Vidíme, že oba dva výrazy jsou si rovny s přesností do kvadratických členů. Podobně bychom v prokazování rovnosti kubických členů a členů vyšších mocnin pokračovali dále. □

Výsledek Věty 3.35 implikuje při volbě $B = -A$, že exponenciála matice e^A je invertibilní a že platí

$$(e^A)^{-1} = e^{-A}.$$

Příklad 3.36. Najděte (pomocí definice) exponenciály matice e^{At} v případě, že

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Řešení. Přímým výpočtem obdržíme

$$A^n = \begin{pmatrix} 3^n & 0 \\ 0 & 2^n \end{pmatrix} \quad \text{pro } n = 1, 2, \dots$$

Proto

$$\begin{aligned}
e^{At} &= E + \frac{t}{1!}A + \frac{t^2}{2!}A^2 + \frac{t^3}{3!}A^3 + \dots \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \frac{t}{1!} \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} + \frac{t^2}{2!} \begin{pmatrix} 3^2 & 0 \\ 0 & 2^2 \end{pmatrix} + \frac{t^3}{3!} \begin{pmatrix} 3^3 & 0 \\ 0 & 2^3 \end{pmatrix} + \dots \\
&= \begin{pmatrix} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(3t)^k}{k!} & 0 \\ 0 & \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(2t)^k}{k!} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{3t} & 0 \\ 0 & e^{2t} \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

□

Uvedme ještě jednu větu, která v některých případech umožňuje najít exponenciálu matice bez použití definice.

Věta 3.37. *Je-li A matice typu $n \times n$ a P je regulární matice taková, že*

$$P^{-1}AP = \Lambda := \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix},$$

potom platí

$$e^A = P \exp(\Lambda) P^{-1} = P \cdot \begin{pmatrix} e^{\lambda_1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & e^{\lambda_n} \end{pmatrix} \cdot P^{-1}.$$

Zvolíme-li v této větě matici P jako 2×2 jednotkovou matici, obdržíme ihned výsledek příkladu č. 3.36.

Příklad 3.38. Najděte (pomocí definice) exponenciálu matice e^{At} v případě, že

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Řešení. Přímým výpočtem obdržíme

$$A^2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad A^3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad A^4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{a} \quad A^5 = A.$$

Proto

$$\begin{aligned} e^{At} &= E + \frac{t}{1!}A + \frac{t^2}{2!}A^2 + \frac{t^3}{3!}A^3 + \frac{t^4}{4!}A^4 + \dots \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \frac{t}{1!} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \frac{t^2}{2!} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} + \frac{t^3}{3!} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} + \frac{t^4}{4!} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \dots \\ &= \begin{pmatrix} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{t^{2k}}{(2k)!} & -\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{t^{2k+1}}{(2k+1)!} \\ \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{t^{2k+1}}{(2k+1)!} & \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{t^{2k}}{(2k)!} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

□

3.12 Užítí exponenciály matice

Je-li A konstantní $n \times n$ matice pak s pomocí vzorce (3.35) dostaneme

$$(e^{At})' = Ae^{At}. \quad (3.36)$$

Tento vztah dává možnost zapsat obecné řešení homogenního systému diferenciálních lineárních rovnic (3.36) s konstantní maticí A , tj. systému

$$\frac{dy}{dt} = Ay. \quad (3.37)$$

Věta 3.39. *Fundamentální matice systému (3.37) s konstantní maticí A je dána vztahem*

$$Y(t) = e^{At}.$$

Důkaz. S pomocí vztahu (3.36) dostaneme

$$Y'(t) = Ae^{At} = AY(t),$$

tj. matice $Y(t)$ je skutečně řešením systému (3.37). Kromě toho

$$Y(0) = E,$$

tj. sloupce této matice jsou generované pomocí lineárně nezávislých řešení systému (3.36).

□

Přímou prověrkou můžeme dokázat platnost následující věty (provedte samostatně):

Věta 3.40. *Obecné řešení $y = y(t)$ lineárního systému (3.37) je dané vzorcem*

$$y = y(t) = e^{At} \cdot C \quad (3.38)$$

kde C je konstantní vektor.

Přímý výpočet exponenciály matice podle definice (tj. podle vzorce (3.35)) je obvykle nepoužitelný kvůli tomu, že není možné najít součet definiční řady. Jak vyplývá z Věty 3.40 je pro nalezení některého řešení (nebo pro nalezení obecného řešení systému (3.37)) užitečné mít metody pro výpočet exponenciály matice. Takové metody existují. Nyní uvedeme jednu z nich.

3.13 Metoda pro nalezení exponenciály matice

Metoda nalezení exponenciály matice, kterou nyní uvedeme, vyžaduje nalezení jistého partikulárního řešení lineární diferenciální rovnice n -tého řádu s konstantními koeficienty.

Proto si zopakujte látku, která byla v bakalářském studiu této problematice věnována. Určitě si vzpomenete, že důležitou roli hrál pojem tzv. *charakteristického polynomu* a *charakteristické rovnice*. Tyto pojmy se vyskytují i při řešení systémů lineárních diferenciálních rovnic s konstantními koeficienty. Předpokládejme, že je dána konstantní $n \times n$ matice

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Charakteristickým polynomem matice A nazýváme polynom $p(\lambda)$ definovaný pomocí determinantu

$$p(\lambda) = \begin{vmatrix} \lambda - a_{11} & -a_{12} & \dots & -a_{1n} \\ -a_{21} & \lambda - a_{22} & \dots & -a_{2n} \\ \dots & & & \\ -a_{n1} & -a_{n2} & \dots & \lambda - a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Je zřejmé, že po provedení výpočtu determinantu lze polynom $p(\lambda)$ zapsat ve schématickém tvaru skutečného polynomu například takto

$$p(\lambda) = \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + a_{n-2}\lambda^{n-2} + \dots + a_1\lambda + a_0,$$

kde koeficienty $a_{n-1}, a_{n-2}, \dots, a_1, a_0$ dostaneme, když determinant spočítáme. V následující větě předpokládáme, že charakteristický polynom byl získán právě tímto způsobem. Poukažme ještě na to, že v řadě učebnic se charakteristický polynom definuje jako determinant

$$\begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & \dots & a_{2n} \\ \dots & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} - \lambda \end{vmatrix},$$

který má po provedení výpočtu hodnotu $(-)^n p(\lambda)$ (víte proč?). Tento znaménkový rozdíl se stírá, hovoříme-li o tzv. *charakteristické rovnici* matice A , která má tvar

$$p(\lambda) = 0.$$

Věta 3.41. *Předpokládejme, že A je konstantní $n \times n$ matice, jejíž charakteristický polynom má tvar*

$$p(\lambda) = \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \dots + a_1\lambda + a_0.$$

Předpokládejme dále, že $y(t)$ je řešení počáteční úlohy pro lineární homogenní diferenciální rovnici n -tého řádu se stejnými koeficienty:

$$y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \dots + a_1y' + a_0y = 0, \quad (3.39)$$

$$y(0) = y'(0) = \dots = y^{(n-2)}(0) = 0, \quad y^{(n-1)}(0) = 1. \quad (3.40)$$

Označme

$$\begin{pmatrix} z_1(t) \\ z_2(t) \\ \vdots \\ z_n(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-1} & 1 \\ a_2 & a_3 & \cdots & 1 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y(t) \\ y'(t) \\ \vdots \\ y^{(n-1)}(t) \end{pmatrix}. \quad (3.41)$$

Pak pro exponenciálu matice platí vztah:

$$e^{At} = z_1(t)I + z_2(t)A + \cdots + z_n(t)A^{n-1}.$$

3.14 Řešení Cauchyovy úlohy pro lineární systémy užitím fundamentálních matic

3.14.1 Cauchyova úloha pro homogenní systém

Uvažujme počáteční (Cauchyovu) úlohu pro homogenní systém

$$\frac{dy}{dt} = A(t)y, \quad y(t_0) = y_0, \quad (3.42)$$

kde $t_0 \in \mathcal{I}$. Tato úloha má jediné řešení. Zapišme toto řešení pomocí fundamentální matice, která je normovaná v bodě $t = t_0$. Taková matice je řešením úlohy $Y' = AY(t)$, $Y(t_0) = E$, tj.,

$$Y(t) := \Phi(t; t_0), \quad \Phi(t_0; t_0) = E.$$

Nyní lze snadno ověřit, že řešení úlohy (3.42) je dáno vztahem

$$y(t) = \Phi(t; t_0)y_0. \quad (3.43)$$

3.14.2 Cauchyova úloha pro homogenní systém s konstantní maticí

V případě že uvažujme počáteční (Cauchyovu) úlohu pro homogenní systém s konstantní maticí

$$\frac{dy}{dt} = Ay, \quad y(t_0) = y_0, \quad (3.44)$$

kde $t_0 \in \mathcal{I}$, lze s pomocí vztahu (3.38) ve Větě 3.40 vyjádřit normovanou fundamentální maticí v bodě $t = t_0$ jako maticový exponenciál

$$\Phi(t; t_0) = e^{(t-t_0)A} \quad (3.45)$$

a řešení (3.43) zapsat vztahem (3.38), tj.,

$$y(t) = e^{(t-t_0)A}y_0.$$

3.14.3 Cauchyova úloha pro nehomogenní systém

Zapišme nyní řešení počáteční (Cauchyovy) úlohy pro nehomogenní systém

$$\frac{dy}{dt} = A(t)y + b(t), \quad y(t_0) = y_0, \quad (3.46)$$

kde $t_0 \in \mathcal{I}$. Také tato úloha má jediné řešení. Obecné řešení odpovídající homogenní úlohy můžeme zapsat ve tvaru

$$y(t) = \Phi(t; t_0) \cdot C,$$

kde $C = (C_1, C_2, \dots, C_n)^T$ je libovolný číselný vektor. V souladu s metodou variace konstant se pokusíme najít řešení $y(t)$ (partikulární) úlohy (3.46) na intervalu \mathcal{I} ve tvaru

$$y(t) = \Phi(t; t_0) \cdot C(t) \quad (3.47)$$

tak, aby platilo $y(t_0) = y_0$. Vztah, kterému vyhovuje vektorová funkce $C(t)$ je

$$C'(t) = \Phi^{-1}(t; t_0)b(t).$$

Jeho integrací (v mezích t_0 a t , $t_0, t \in \mathcal{I}$) dostáváme

$$C(t) = C(t_0) + \int_{t_0}^t \Phi^{-1}(s; t_0)b(s)ds.$$

Abychom dostali řešení (partikulární) požadovaných vlastností, volíme $C(t_0) = y_0$. Potom

$$y(t) = \Phi(t; t_0)y_0 + \Phi(t; t_0) \int_{t_0}^t \Phi^{-1}(s; t_0)b(s)ds. \quad (3.48)$$

Tvar (3.48) upravme na

$$y(t) = \Phi(t; t_0)y_0 + \int_{t_0}^t \Phi(t; t_0)\Phi^{-1}(s; t_0)b(s)ds$$

a konečnou podobu mu dejme užitím vztahu:

$$\Phi(t; t_0)\Phi^{-1}(s; t_0) = \Phi(t; s), \quad t, t_0, s \in \mathcal{I}, \quad (3.49)$$

tj.,

$$y(t) = \Phi(t; t_0)y_0 + \int_{t_0}^t \Phi(t; s)b(s)ds. \quad (3.50)$$

3.14.4 Cauchyova úloha pro nehomogenní systém s konstantní maticí

V případě že uvažujeme počáteční (Cauchyovu) úlohu pro nehomogenní systém s konstantní maticí

$$\frac{dy}{dt} = Ay + b(t), \quad y(t_0) = y_0, \quad (3.51)$$

kde $t_0 \in \mathcal{I}$, můžeme užitím vztahu (3.45) nalezené řešení (3.50) zjednodušit. Protože

$$\Phi(t; t_0) = e^{(t-t_0)A} \quad \text{a} \quad \Phi(t; s) = e^{(t-s)A},$$

má řešení (3.50) tvar

$$y(t) = e^{(t-t_0)A}y_0 + \int_{t_0}^t e^{(t-s)A}b(s)ds. \quad (3.52)$$

3.15 Transformace lineární rovnice n -tého řádu na systém

Na závěr této kapitoly ukážeme, jak lze libovolnou lineární diferenciální rovnicí n -tého řádu převést na lineární systém. Tato možnost převedení je velice významná, neboť umožňuje použít veškerou vyloženou teorii taktéž k rovnicím n -tého řádu.

Uvažujme lineární obyčejnou diferenciální rovnicí n -tého řádu

$$u^{(n)} + a_{n-1}(t)u^{(n-1)} + \dots + a_1(t)u' + a_0(t)u = b^*(t), \quad (3.53)$$

kde koeficienty $a_{n-1}(t), \dots, a_1(t), a_0(t)$ a nehomogenní člen $b^*(t)$ jsou spojité funkce na intervalu \mathcal{I} . Budeme rovnici (3.53) transformovat na systém rovnic. Nechť jsou y_1, y_2, \dots, y_n nové závislé funkce, definované jako

$$y_1 = u, \quad y_2 = u', \quad y_3 = u'', \quad \dots, \quad y_n = u^{(n-1)}.$$

Tímto předpisem byl definován vektor $(y_1, y_2, \dots, y_n)^T$. Pak je lineární obyčejná diferenciální rovnice n -tého řádu (3.53) ekvivalentní systému

$$\frac{dy}{dt} = A(t)y + b(t), \quad (3.54)$$

kde

$$A(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ -a_0(t) & -a_1(t) & -a_2(t) & -a_3(t) & \dots & -a_{n-1}(t) \end{pmatrix},$$

a

$$b(t) = (0, 0, \dots, 0, b^*(t))^T.$$

Podobně se ukáže, že počáteční problém

$$\begin{aligned} u^{(n)} + a_{n-1}(t)u^{(n-1)} + \dots + a_1(t)u' + a_0(t)u &= b^*(t), \\ u(t_0) = u_1, \quad u'(t_0) = u_2, \dots, \quad u^{(n-1)}(t_0) &= u_n \end{aligned} \quad (3.55)$$

je ekvivalentní počáteční úloze

$$y' = A(t)y + b(t), \quad y(t_0) = y_0, \quad (3.56)$$

kde

$$y_0 = (u_1, u_2, \dots, u_n)^T.$$

3.16 Shrnutí kapitoly

Tato kapitola byla věnována lineárním systémům obyčejných diferenciálních rovnic prvního řádu. Po nezbytném připomenutí pomocných poznatků byla vyložena struktura obecného řešení lineárních homogenních i nehomogenních systémů. Další část kapitoly byla věnována jedné z metod řešení homogenních lineárních systémů s konstantními koeficienty. Její podstatou bylo využití exponenciály matice. V závěru kapitoly byly využity vlastnosti fundamentálních matic k vytvoření řešení počátečních úloh pro různé typy lineárních systémů.

3.17 Řešené příklady

Příklad 3.42. Najděme obecné řešení systému

$$\begin{aligned}y_1' &= 2y_1 + y_2, \\y_2' &= -3y_1 + 6y_2\end{aligned}$$

s pomocí exponenciály matice.

Řešení. Nejprve najdeme charakteristický polynom matice A :

$$\det(\lambda E_2 - A) = \begin{vmatrix} \lambda - 2 & -1 \\ 3 & \lambda - 6 \end{vmatrix} = \lambda^2 - 8\lambda + 15 = (\lambda - 3) \cdot (\lambda - 5).$$

Pomocná počáteční úloha typu (3.39), (3.40) je druhého řádu:

$$y'' - 8y' + 15y = 0, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 1.$$

Tato úloha má obecné řešení $y(t) = d_1 e^{3t} + d_2 e^{5t}$. Dále platí $y'(t) = 3d_1 e^{3t} + 5d_2 e^{5t}$,

$$y(0) = 0, \quad y'(0) = 1 \implies d_1 = -1/2, \quad d_2 = 1/2$$

a

$$y(t) = -\frac{1}{2}e^{3t} + \frac{1}{2}e^{5t}.$$

Definujme v souladu se vztahem (3.41)

$$\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{1}{2}e^{3t} + \frac{1}{2}e^{5t} \\ -\frac{3}{2}e^{3t} + \frac{5}{2}e^{5t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{5}{2}e^{3t} - \frac{3}{2}e^{5t} \\ -\frac{1}{2}e^{3t} + \frac{1}{2}e^{5t} \end{pmatrix}.$$

Exponenciála matice má tvar

$$\begin{aligned}e^{At} &= \begin{pmatrix} \frac{5}{2}e^{3t} - \frac{3}{2}e^{5t} & 0 \\ 0 & \frac{5}{2}e^{3t} - \frac{3}{2}e^{5t} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\frac{1}{2}e^{3t} + \frac{1}{2}e^{5t} \\ -\frac{3}{2}e^{3t} + \frac{5}{2}e^{5t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -3 & 6 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{3}{2}e^{3t} - \frac{1}{2}e^{5t} & -\frac{1}{2}e^{3t} + \frac{1}{2}e^{5t} \\ \frac{3}{2}e^{3t} - \frac{3}{2}e^{5t} & -\frac{1}{2}e^{3t} + \frac{3}{2}e^{5t} \end{pmatrix}.\end{aligned}$$

Výsledné obecné řešení je dáno vztahem

$$y = e^{At} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix},$$

kde c_1 a c_2 jsou libovolné konstanty. □

Příklad 3.43. Najděme obecné řešení systému

$$\begin{aligned} y_1' &= 12y_1 - 6y_2, \\ y_2' &= 2y_1 + 4y_2 \end{aligned} \quad (3.57)$$

s pomocí exponenciály matice.

Řešení. Podobně jako ve výše uvedeném Příkladu 3.42 dostáváme

$$\det(\lambda E_2 - A) = \begin{vmatrix} \lambda - 12 & 6 \\ -2 & \lambda - 4 \end{vmatrix} = \lambda^2 - 16\lambda + 60 = (\lambda - 6) \cdot (\lambda - 10).$$

Pomocná počáteční úloha má tvar

$$y'' - 16y' + 60y = 0, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 1$$

a její obecné řešení je: $y(t) = d_1 e^{6t} + d_2 e^{10t}$. Dále máme: $y'(t) = 6d_1 e^{6t} + 10d_2 e^{10t}$. S pomocí počátečních podmínek pak snadno obdržíme hodnoty konstant:

$$y(0) = 0, \quad y'(0) = 1 \implies d_1 = -1/4, \quad d_2 = 1/4$$

a

$$y(t) = -\frac{1}{4}e^{6t} + \frac{1}{4}e^{10t}.$$

Definujme vektor $z(t)$:

$$\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -16 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{1}{4}e^{6t} + \frac{1}{4}e^{10t} \\ -\frac{3}{2}e^{6t} + \frac{5}{2}e^{10t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{5}{2}e^{6t} - \frac{3}{2}e^{10t} \\ -\frac{1}{4}e^{6t} + \frac{1}{4}e^{10t} \end{pmatrix}.$$

Nakonec

$$e^{At} = \begin{pmatrix} \frac{5}{2}e^{6t} - \frac{3}{2}e^{10t} & 0 \\ 0 & \frac{5}{2}e^{6t} - \frac{3}{2}e^{10t} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\frac{1}{4}e^{6t} + \frac{1}{4}e^{10t} \\ -\frac{1}{4}e^{6t} + \frac{1}{4}e^{10t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 12 & -6 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2}e^{6t} + \frac{3}{2}e^{10t} & \frac{3}{2}e^{6t} - \frac{3}{2}e^{10t} \\ -\frac{1}{2}e^{6t} + \frac{1}{2}e^{10t} & \frac{3}{2}e^{6t} - \frac{1}{2}e^{10t} \end{pmatrix}.$$

Obecné řešení úlohy (3.57) je

$$y = e^{At} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix},$$

kde c_1, c_2 jsou libovolné konstanty. □

Příklad 3.44. Pomocí exponenciály matice najděme obecné řešení systému

$$\begin{aligned}y_1' &= 2y_1 + y_2, \\y_2' &= -y_1 + 4y_2.\end{aligned}$$

Řešení. Podobně jako ve výše uvedených příkladech dostáváme

$$\det(\lambda E_2 - A) = \begin{vmatrix} \lambda - 2 & -1 \\ 1 & \lambda - 4 \end{vmatrix} = \lambda^2 - 6\lambda + 9 = (\lambda - 3)^2.$$

Pomocný počáteční problém má tvar

$$y'' - 6y' + 9y = 0, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 1$$

a jeho obecné řešení je $y(t) = (d_1 + d_2 t)e^{3t}$. Derivace řešení je $y'(t) = 3(d_1 + d_2 t)e^{3t} + d_2 e^{3t}$. Využijeme počáteční podmínky. Dostáváme:

$$y(0) = 0, \quad y'(0) = 1 \implies d_1 = 0, \quad 3d_1 + d_2 = 1 \implies d_2 = 1.$$

Definujeme

$$y(t) = te^{3t}.$$

Pak

$$\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} te^{3t} \\ (1 + 3t)e^{3t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (1 - 3t)e^{3t} \\ te^{3t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 - 3t \\ t \end{pmatrix} \cdot e^{3t}.$$

Odpovídající maticová exponenciála má tvar

$$\begin{aligned}e^{At} &= (1 - 3t)e^{3t} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + te^{3t} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} (1 - 3t)e^{3t} + 2te^{3t} & te^{3t} \\ -te^{3t} & (1 - 3t)e^{3t} + 4te^{3t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 - t & t \\ -t & 1 + t \end{pmatrix} \cdot e^{3t}.\end{aligned}$$

Obecné řešení výchozí úlohy je dáno vztahem:

$$y = e^{At} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1(1 - t) + c_2 t \\ -c_1 t + c_2(1 + t) \end{pmatrix} \cdot e^{3t},$$

kde c_1 a c_2 jsou libovolné konstanty. Zapišme tento výsledek v jiném tvaru. Předefinujme konstanty (nahradíme dané libovolné konstanty jinými libovolnými konstantami). Nechť $c_1 = -K_2$ a $c_2 = K_1 + K_2$, kde K_1 a K_2 jsou libovolná čísla. Pak lze výsledek zapsat ve tvaru

$$\begin{aligned}y_1(t) &= K_1 e^{3t} + K_2 t e^{3t}, \\y_2(t) &= K_1 e^{3t} + K_2(1 + t) \cdot e^{3t}.\end{aligned}$$

□

Příklad 3.45. Jsou dány vektory

$$\vec{y}_1(x) = \begin{pmatrix} \frac{\sin x}{x} \\ \frac{\cos x}{x} \end{pmatrix}, \quad \vec{y}_2(x) = \begin{pmatrix} -\frac{\cos x}{x} \\ \frac{\sin x}{x} \end{pmatrix}, \quad x > 0.$$

Ověřte, že tyto vektory tvoří fundamentální systém řešení homogenní soustavy rovnic příslušné k nehomogenní soustavě

$$y_1' = -\frac{y_1}{x} + y_2 + 2 \sin x, \quad x > 0$$

$$y_2' = -y_1 - \frac{y_2}{x} + 2 \cos x, \quad x > 0$$

a najděte její obecné řešení.

Řešení. Úloha je typem nehomogenní soustavy: $y' = A(t)y + b(t)$. Vektory $\vec{y}_1(x)$, $\vec{y}_2(x)$ jsou lineárně nezávislé. Ukážeme, že \vec{y}_1 je řešením homogenního systému

$$y_1' = -\frac{y_1}{x} + y_2,$$

$$y_2' = -y_1 - \frac{y_2}{x}.$$

První souřadnici vektoru $\vec{y}_1(x)$ dosadíme za y_1 a druhou souřadnici za y_2 , tj.

$$\vec{y}_1(x) = \begin{pmatrix} \frac{y_{11}}{x} \\ \frac{y_{12}}{x} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\sin x}{x} \\ \frac{\cos x}{x} \end{pmatrix}.$$

Potom

$$y_{11}'(x) = \frac{(\cos x)x - (\sin x)1}{x^2} = -\frac{\sin x}{x} + \frac{\cos x}{x} = -\frac{y_{11}}{x} + y_{12},$$

$$y_{12}'(x) = \frac{-(\sin x)x - (\cos x)1}{x^2} = -\frac{\sin x}{x} - \frac{\cos x}{x} = -y_{11} - \frac{y_{12}}{x}.$$

Podobně se ukáže, že i souřadnice druhého řešení vyhovují danému systému.

Najdeme obecné řešení. Vektor pravých stran $\vec{b}(x)$ je

$$\vec{b}(x) = \begin{pmatrix} 2 \sin x \\ 2 \cos x \end{pmatrix}.$$

Fundamentální matice je tvořena z lineárně nezávislých vektorů:

$$\Phi(x) = \begin{pmatrix} \frac{\sin x}{x} & -\frac{\cos x}{x} \\ \frac{\cos x}{x} & \frac{\sin x}{x} \end{pmatrix}.$$

Použijeme vzorec

$$\vec{y}_{ob}(x) = \Phi(x)\vec{C} + \int_{x_0}^x \Phi(x, s)\vec{b}(s) ds.$$

Najdeme matici $\Phi(x, s) = \Phi(x)(\Phi(s))^{-1}$. Nejprve určíme inverzní matici k matici

$$\Phi(s) = \begin{pmatrix} \frac{\sin s}{s} & -\frac{\cos s}{s} \\ \frac{\cos s}{s} & \frac{\sin s}{s} \end{pmatrix}.$$

Inverzní matici hledáme s pomocí adjungované matice. Tj. máme-li matici \mathcal{B} , pak $\mathcal{B}^{-1} = \frac{1}{\det \mathcal{B}} \cdot \text{adj} \mathcal{B}$. Postup při hledání adjungované matice:

1. Nahradíme každý prvek matice jeho algebraickým doplňkem (tj. determinantem matice vzniklého po vyškrtnutí příslušného řádku a příslušného sloupce, vynásobeným mocninou (součtem indexů odpovídajícího prvku) čísla -1).

2. Získanou matici transponujeme.

Tedy:

$$\det \Phi = \begin{vmatrix} \frac{\sin s}{\cos s} & -\frac{\cos s}{\sin s} \\ \frac{s}{\cos s} & \frac{\sin s}{s} \end{vmatrix} = \frac{\sin^2 s}{s^2} + \frac{\cos^2 s}{s^2} = \frac{1}{s^2} > 0,$$

$$\text{adj } \Phi = \begin{pmatrix} \frac{\sin s}{\cos s} & -\frac{\cos s}{\sin s} \\ \frac{s}{\cos s} & \frac{\sin s}{s} \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} \frac{\sin s}{s} & \frac{\cos s}{\sin s} \\ -\frac{\cos s}{s} & \frac{\sin s}{s} \end{pmatrix},$$

$$\Phi^{-1}(s) = \frac{1}{\frac{1}{s^2}} \cdot \begin{pmatrix} \frac{\sin s}{\cos s} & -\frac{\cos s}{\sin s} \\ \frac{s}{\cos s} & \frac{\sin s}{s} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s \sin s & s \cos s \\ -s \cos s & s \sin s \end{pmatrix}.$$

Matice $\Phi(x, s) = \Phi(x) \cdot \Phi^{-1}(s)$

$$\Phi(x, s) = \begin{pmatrix} \frac{\sin x}{x} & -\frac{\cos x}{x} \\ \frac{\cos x}{x} & \frac{\sin x}{x} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} s \sin s & s \cos s \\ -s \cos s & s \sin s \end{pmatrix}$$

a $\Phi(x, s) \cdot \vec{b}(s) =$

$$\begin{pmatrix} \frac{s}{x} \sin x \sin s + \frac{s}{x} \cos x \cos s & \frac{s}{x} \sin x \cos s - \frac{s}{x} \cos x \sin s \\ \frac{s}{x} \cos x \sin s - \frac{s}{x} \sin x \cos s & \frac{s}{x} \cos x \cos s + \frac{s}{x} \sin x \sin s \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \sin s \\ 2 \cos s \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} \frac{2s}{x} \sin x \sin^2 s + \frac{2s}{x} \cos x \cos s \sin s + \frac{2s}{x} \sin x \cos^2 s - \frac{2s}{x} \cos x \sin s \cos s \\ \frac{2s}{x} \cos x \sin^2 s - \frac{2s}{x} \sin x \cos s \sin s + \frac{2s}{x} \cos x \cos^2 s + \frac{2s}{x} \sin x \cos s \sin s \end{pmatrix} =$$

$$= 2 \frac{s}{x} \cdot \begin{pmatrix} \sin x \\ \cos x \end{pmatrix} = 2s \cdot \begin{pmatrix} \frac{\sin x}{x} \\ \frac{\cos x}{x} \end{pmatrix}.$$

Obecné řešení je dáno vzorcem

$$\vec{y}_{ob}(x) = \Phi(x) \vec{C} + \int_{x_0}^x \Phi(x, s) \vec{b}(s) ds$$

Dosadíme za $\Phi(x)$, $\Phi(x, s)$, \vec{C} , $\vec{b}(s)$ a dostaneme

$$\vec{y}_{ob}(x) = \begin{pmatrix} \frac{\sin x}{x} & -\frac{\cos x}{x} \\ \frac{\cos x}{x} & \frac{\sin x}{x} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix} + \int_{x_0}^x 2s \cdot \begin{pmatrix} \frac{\sin x}{x} \\ \frac{\cos x}{x} \end{pmatrix} ds =$$

$$= \begin{pmatrix} C_1 \frac{\sin x}{x} - C_2 \frac{\cos x}{x} \\ C_1 \frac{\cos x}{x} + C_2 \frac{\sin x}{x} \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} \frac{\sin x}{x} \\ \frac{\cos x}{x} \end{pmatrix} \int_{x_0}^x s ds =$$

$$= \begin{pmatrix} C_1 \frac{\sin x}{x} - C_2 \frac{\cos x}{x} \\ C_1 \frac{\cos x}{x} + C_2 \frac{\sin x}{x} \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} \frac{\sin x}{x} \\ \frac{\cos x}{x} \end{pmatrix} \frac{s^2}{2} \Big|_{x_0}^x =$$

Obecné řešení je tedy

$$\vec{y}_{ob}(x) = \begin{pmatrix} C_1 \frac{\sin x}{x} - C_2 \frac{\cos x}{x} \\ C_1 \frac{\cos x}{x} + C_2 \frac{\sin x}{x} \end{pmatrix} + (x^2 - x_0^2) \begin{pmatrix} \frac{\sin x}{x} \\ \frac{\cos x}{x} \end{pmatrix}.$$

Položíme $x_0 = 0$ a dostáváme

$$\vec{y}_{ob}(x) = \begin{pmatrix} C_1 \frac{\sin x}{x} - C_2 \frac{\cos x}{x} \\ C_1 \frac{\cos x}{x} + C_2 \frac{\sin x}{x} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x \sin x \\ x \cos x \end{pmatrix}.$$

□

Cvičení

1. Pomocí exponenciály matice najděte obecné řešení systému

a)

$$\begin{aligned} y_1' &= 17y_1 + 9y_2, \\ y_2' &= -25y_1 - 13y_2 \end{aligned}$$

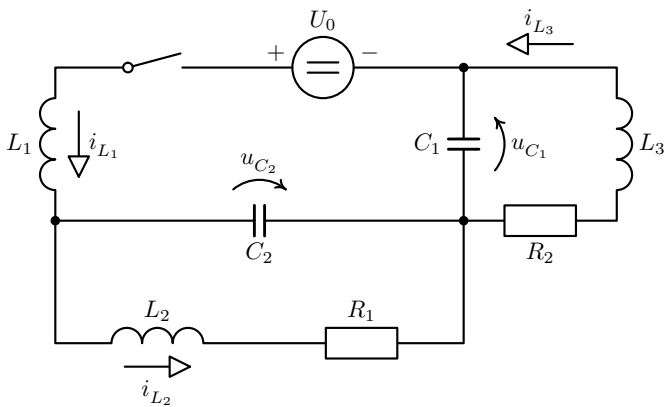
b)

$$\begin{aligned} y_1' &= y_2 + y_3, \\ y_2' &= y_1 + y_3, \\ y_3' &= y_1 + y_2. \end{aligned}$$

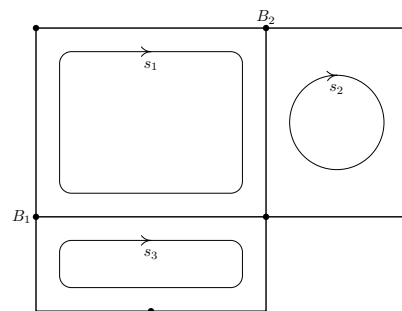
c)

$$\begin{aligned} y_1' &= -3y_1 + 4y_2 - 2y_3, \\ y_2' &= y_1 + y_3, \\ y_3' &= 6y_1 - 6y_2 + 5y_3. \end{aligned}$$

2. Sestavte a řešte systém odpovídající obvodu na obrázku 3.2. Volte smyčky podle návodu na obrázku 3.3

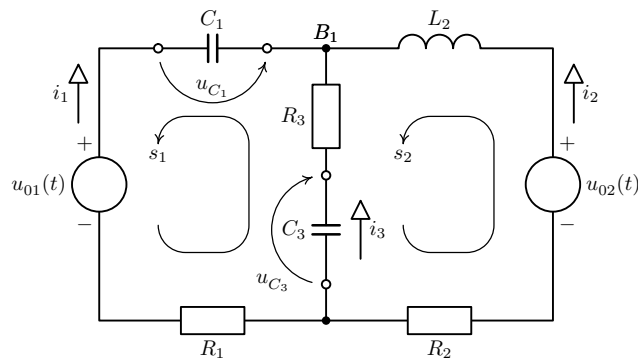


Obr. 3.2: Obvod č.1



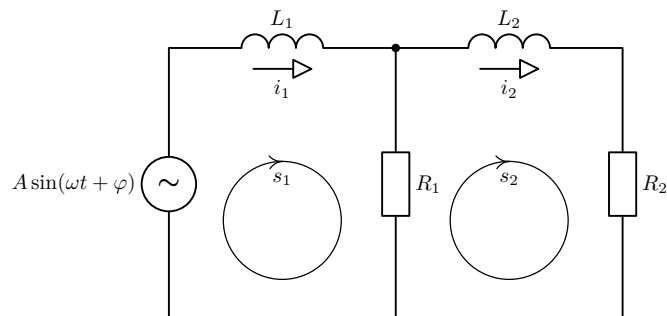
Obr. 3.3: Smyčky k obvodu č.1

3. Sestavte a řešte systém odpovídající obvodu na obrázku 3.4.



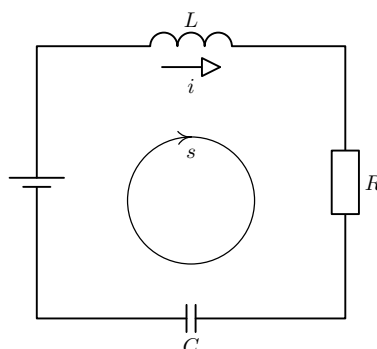
Obr. 3.4: Obvod č.2

4. Sestavte a řešte systém odpovídající obvodu na obrázku 3.5.



Obr. 3.5: Obvod č.3

5. Sestavte a řešte systém odpovídající obvodu na obrázku 3.6.



Obr. 3.6: Obvod č.4

Výsledky

1. a) Obecné řešení systému má tvar

$$\begin{aligned} y_1(t) &= -3K_1e^{2t} - (3x + 2)K_2te^{2t}, \\ y_2(t) &= 5K_1e^{2t} + (5x + 3)K_2 \cdot e^{2t}. \end{aligned}$$
- b) Obecné řešení systému má tvar

$$\begin{aligned} y_1(t) &= K_1e^{-t} + K_2e^{-t} + K_3e^{2t}, \\ y_2(t) &= -K_1e^{-t} + K_3e^{2t}, \\ y_3(t) &= -K_2e^{-t} + K_3e^{2t}. \end{aligned}$$
- c) Obecné řešení systému má tvar

$$\begin{aligned} y_1(t) &= K_1e^t + K_2e^{-t}, \\ y_2(t) &= K_1e^t + K_3e^{2t}, \\ y_3(t) &= -K_2e^{-t} + 2K_3e^{2t}. \end{aligned}$$

Maplety

Kliknutím na následující odkazy si lze pomocí mapletů procvičit tato témata:

1. Nalezení řešení lineární diferenciální rovnice 2. řádu s konstantními koeficienty a speciální pravou stranou.
2. Nalezení řešení lineární diferenciální rovnice 2. řádu s konstantními koeficienty a partikulární řešení pomocí variace konstant.
3. Nalezení řešení systému lineárních rovnic 1. Gaussovou eliminační metodou.
4. Nalezení inverzní matice.
5. Nalezení exponenciálu konstantní matice.

4 Soustavy lineárních diferenciálních rovnic s konstantními koeficienty - řešení na bázi zobecněných vlastních vektorů

4.1 Cíl kapitoly

V předchozí kapitole jsme se naučili využívat exponenciálu matice. Její nalezení však není jednoduchá záležitost. Proto uvedeme postup, pomocí kterého lze řešit soustavu lineárních diferenciálních rovnic s konstantními koeficienty pomocí konstrukce tzv. vlastních vektorů. Předností této metody je, že dává řešení tak, jak o něm bylo hovořeno ve větách o struktuře řešení. Jinými slovy, metoda umožní nalézt n lineárně nezávislých řešení soustavy. Lineární kombinace těchto řešení dá obecné řešení soustavy. Při použití metody budeme pracovat s charakteristickým rovnicí a s jejími kořeny. Cílem je sestavit obecné řešení v závislosti na tom, jaké tyto kořeny jsou (reálné, komplexní, násobné).

4.2 Formulace problému a postup jeho řešení

V této části se budeme zabývat soustavou lineárních diferenciálních rovnic s konstantními koeficienty. Zapišeme ji ve tvaru

$$x' = Ax, \quad (4.1)$$

kde A je reálná čtvercová matice s konstantními prvky, $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$ a tento vektor je vektorem hledaného řešení, závislého na (nezávislé) proměnné t , tj. $x = x(t)$. Předpokládejme, že řešení soustavy (4.1) má tvar

$$x = v \exp(\lambda t), \quad (4.2)$$

kde λ je vhodné reálné nebo komplexní číslo a v je vhodný (reálný či komplexní) konstantní vektor. Poznamenejme, že máme na mysli hledání řešení netriviálních. Implicitně tedy předpokládáme, že $x(t) \neq 0$ na \mathbb{R} . To vede ke zřejmému konstatování, že nás budou zajímat jen takové vektory v , které nejsou identické s nulovým vektorem o . Po dosazení tvaru (4.2) do soustavy (4.1) dostáváme

$$\lambda v \exp(\lambda t) = Av \exp(\lambda t)$$

nebo

$$(Av) \exp(\lambda t) - (\lambda v) \exp(\lambda t) = (A - \lambda E)v \exp(\lambda t) = o, \quad (4.3)$$

ve kterém je E čtvercová jednotková matice rozměru $n \times n$ a o je již zmíněný nulový vektor. Ve vektorovém vztahu (4.3) lze krátit výrazem $\exp(\lambda t)$. Dostáváme vztah

$$(A - \lambda E)v = o, \quad (4.4)$$

Zdůrazněme, že ve vztahu (4.4) již **není přítomna nezávislá proměnná t** . Tu se povedlo krácením eliminovat. Vztah (4.4) je vztahem mezi konstantní maticí A , neznámým (konstantním) vektorem v a hledaným číslem λ . Soustava (4.4) je lineární algebraickou soustavou rovnic vzhledem ke složkám vektoru v . Z teorie lineárních soustav vyplývá, že soustava (4.4) bude mít nenulové řešení v pouze tehdy, když bude její matice singulární. Musí tedy být

$$\det(A - \lambda E) = 0. \quad (4.5)$$

Rovnice (4.5) je polynomiální rovnicí (stupně n) vzhledem k λ . Jinými slovy je to rovnice, které hledané číslo λ vyhovuje. Současně vidíme, že číslo λ nemusí být jediné. Obecně může mít rovnice (4.5) celkem n reálných a navzájem různých kořenů. Polynom

$$p(\lambda) := \det(A - \lambda E) \quad (4.6)$$

nacházející se v levé straně rovnice (4.5) nazýváme **charakteristickým polynomem** a samotnou rovnici (4.5), tj. rovnici

$$p(\lambda) = 0 \quad (4.7)$$

nazýváme **charakteristickou rovnicí**. Kořeny **charakteristické rovnice** nazýváme **vlastní čísla** matice A . Je-li $\lambda = \lambda^*$ vlastním číslem matice A a vektor $v = v^*$ je řešením soustavy (4.4), tj. soustavy

$$(A - \lambda^* E)v = o,$$

nazýváme vektor v^* **vlastním vektorem** matice A (který přísluší vlastnímu číslu λ^*). Ještě jednou podtrhněme fakt, že z uvedeného vyplývá, že pro každou dvojici vlastního čísla a odpovídajícího vlastního vektoru λ^* , v^* je vektorová funkce

$$x = v^* \exp(\lambda^* t)$$

jedním z řešení soustavy (4.1).

4.3 Příklad reálných a navzájem různých kořenů charakteristické rovnice

V případě, že má charakteristická rovnice (4.5) n navzájem různých vlastních čísel (která jsou samozřejmě reálná)

$$\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n \quad (4.8)$$

a vektory

$$v_1, v_2, \dots, v_n \quad (4.9)$$

jsou jim odpovídající vlastní vektory, je konstrukce obecného řešení soustavy rovnic (4.1) jednoduchá. Snadno lze prověřit, že tato soustava vlastních vektorů je lineárně nezávislá. Pak z obecné teorie lineárních soustav okamžitě vyplývá tento výsledek:

Věta 4.1 (případ nenásobných vlastních čísel). *Má-li matice A celkem n navzájem různých vlastních čísel (4.8), kterým odpovídají vlastní vektory (4.9), potom n vektorových funkcí*

$$v_1 \exp(\lambda_1 t), v_2 \exp(\lambda_2 t), \dots, v_n \exp(\lambda_n t) \quad (4.10)$$

tvorí **fundamentální systém řešení** soustavy rovnic (4.1). *Obecné řešení této soustavy lze vyjádřit ve tvaru:*

$$x(t) = C_1 v_1 \exp(\lambda_1 t) + C_2 v_2 \exp(\lambda_2 t) + \dots + C_n v_n \exp(\lambda_n t), \quad (4.11)$$

kde C_1, C_2, \dots, C_n jsou libovolné konstanty.

Příklad 4.2. Metodou popsanou výše určete obecné řešení soustavy rovnic:

$$\begin{aligned} x_1' &= -2x_1 - 2x_2, \\ x_2' &= -3x_1 - x_2. \end{aligned} \quad (4.12)$$

Řešení. Soustava (4.12) je speciálním případem soustavy (4.1) pro $n = 2$ a matici

$$A = \begin{pmatrix} -2 & -2 \\ -3 & -1 \end{pmatrix}.$$

Nalezneme vlastní čísla matice A jako řešení charakteristické rovnice

$$\det(A - \lambda E) = 0$$

tj. rovnice

$$\begin{vmatrix} -2 - \lambda & -2 \\ -3 & -1 - \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + 3\lambda - 4 = (\lambda - 1)(\lambda + 4) = 0.$$

Její kořeny (a tedy hledaná vlastní čísla) jsou $\lambda_1 = 1$ a $\lambda_2 = -4$. Máme tedy dvě reálná a různá vlastní čísla. Proto lze při hledání obecného řešení soustavy (4.12) využít Větu 4.1.

Najdeme nyní vlastní vektory, odpovídající vlastním číslům. Prvním vlastním vektorem

$$v_1 = (v_{11}, v_{12})^T,$$

odpovídajícím vlastnímu číslu $\lambda_1 = 1$ je libovolný nenulový vektor, splňující vztah

$$(A - \lambda_1 E)v_1 = o.$$

Jeho rozepsáním dostáváme soustavu

$$\begin{pmatrix} -3 & -2 \\ -3 & -2 \end{pmatrix} \cdot v_1 = o.$$

Vzhledem k lineární závislosti řádků matice se soustava redukuje na jediný vztah

$$-3v_{11} - 2v_{12} = 0$$

a jedno nenulové řešení je například $v_1 = (2, -3)^T$. Řešení soustavy (4.12) odpovídající tomuto vlastnímu vektoru a vlastnímu číslu je

$$x_1(t) = (x_{11}(t), x_{12}(t)) = (2, -3)^T \cdot e^t.$$

Podobným způsobem postupujeme v případě druhého vlastního čísla $\lambda_2 = -4$. Vlastní vektor $v_2 = (v_{21}, v_{22})^T$, odpovídající vlastnímu číslu $\lambda_2 = -4$ je libovolný nenulový vektor, splňující vztah

$$(A - \lambda_2 E)v_2 = 0.$$

Po rozepsání dostáváme soustavu

$$\begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -3 & 3 \end{pmatrix} \cdot v_2 = 0.$$

Tato soustava se redukuje na jediný vztah

$$2v_{21} - 2v_{22} = 0$$

a jedno její nenulové řešení je například $v_2 = (1, 1)^T$. Řešení soustavy (4.12), které odpovídá tomuto vlastnímu vektoru a vlastnímu číslu je

$$x_2(t) = (x_{21}(t), x_{22}(t)) = (1, 1)^T \cdot e^{-4t}.$$

Fundamentální systém řešení soustavy (4.12) je tvořen dvojicí lineárně nezávislých řešení

$$(2, -3)^T \cdot e^t \quad \text{a} \quad (1, 1)^T \cdot e^{-4t}$$

a její obecné řešení $x(t)$ je dáno lineární kombinací

$$x(t) = C_1(2, -3)^T \cdot e^t + C_2(1, 1)^T \cdot e^{-4t} = C_1 \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix} \cdot e^t + C_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot e^{-4t}$$

s libovolnými konstantami C_1 a C_2 . Na závěr ještě rozepíšeme poslední vztah po složkách. Protože $x(t) = (x_1(t), x_2(t))^T$, máme

$$\begin{aligned} x_1(t) &= 2C_1e^t + C_2e^{-4t}, \\ x_2(t) &= -3e^t + C_2e^{-4t}. \end{aligned}$$

□

4.4 Příklad komplexních nenásobných vlastních čísel

Předpokládejme, že charakteristická rovnice (4.5) má komplexní kořen

$$\lambda = \alpha + \beta \cdot i,$$

kde i je imaginární jednotka. Protože koeficienty charakteristického polynomu (4.6) jsou reálná čísla (tento závěr vyplývá z předpokladu reálnosti matice A) je kořenem charakteristické rovnice i číslo komplexně sdružené s kořenem λ , tedy číslo

$$\bar{\lambda} = \alpha - \beta \cdot i.$$

Předpokládejme dále, že v je vlastní vektor odpovídající vlastnímu číslu λ . Pak je vektor

$$x(t) = v \exp(\lambda t)$$

řešením soustavy (4.1). Ukažme nyní, že řešením soustavy (4.1) je také vektor komplexně sdružený k vektoru $x(t)$, tj. vektor

$$\bar{x}(t) = \overline{v \exp(\lambda t)} = \bar{v} \exp(\bar{\lambda} t).$$

Číslo λ a odpovídající vlastní vektor v vyhovují soustavě (4.4), tj. vztahu

$$(A - \lambda E)v = o.$$

Protože se jedná o vztah mezi komplexními čísly musí se sobě rovnat (v případě zapsání komplexních čísel v algebraickém tvaru) reálné a imaginární složky čísel na levých a pravých stranách. V případě uvedeného vztahu jsou pravé strany nulové, proto jsou jak reálné, tak i komplexní složky čísel na levých stranách nulové. Proto je tedy jasné, že tento vztah bude platit také v případě, že budeme porovnávat čísla komplexně sdružená, tj. bude platit

$$\overline{(A - \lambda E)v} = \bar{o}.$$

Úpravami, které jsou běžné při počítání s komplexními čísly tento vztah redukuje na vztah

$$(\bar{A} - \bar{\lambda} E)\bar{v} = o$$

a nakonec na vztah

$$(A - \bar{\lambda} E)\bar{v} = o. \tag{4.13}$$

Tento vztah lze interpretovat takto: vyhovují-li číslo λ a odpovídající vlastní vektor v soustavě (4.4) pak této soustavě vyhovují i veličiny komplexně sdružené - číslo $\bar{\lambda}$ a vektor \bar{v} . To tedy znamená, že výše formulované tvrzení platí - je-li vektor

$$x(t) = v \exp(\lambda t)$$

řešením soustavy (4.1), pak je také vektor

$$\bar{x}(t) = \bar{v} \exp(\bar{\lambda} t)$$

řešením této soustavy. Obě dvě řešení $x(t)$ a $\bar{x}(t)$ jsou komplexními funkcemi. Vzhledem k linearitě uvažované soustavy (4.1) a k podmínce, že matice A je reálná opět dospíváme k závěru, že po dosazení libovolného z těchto řešení $x(t)$ nebo $\bar{x}(t)$ vyjádřených v algebraickém tvaru do soustavy (4.1) musí být jak reálná tak imaginární složka libovolné levé strany nulová. To současně znamená, že řešením soustavy (4.1) je jak odděleně vzatá reálná složka řešení, tak i odděleně vzatá imaginární složka řešení. Každá z těchto složek je již **reálnou** funkcí. Tímto postupem jsme ze **dvou komplexních řešení** $x(t)$ a $\bar{x}(t)$ získali **dvě reálná řešení** $\operatorname{Re} x(t)$ a $\operatorname{Im} x(t)$. Definujme tedy tato dvě reálná řešení formulami

$$\begin{aligned} y_1(t) &= \operatorname{Re} x(t) = \frac{1}{2}(x(t) + \bar{x}(t)), \\ y_2(t) &= \operatorname{Im} x(t) = \frac{1}{2i}(x(t) - \bar{x}(t)). \end{aligned} \tag{4.14}$$

Snadno lze ukázat, že jak dvě komplexní řešení $x(t)$ a $\bar{x}(t)$ tak i dvě reálná řešení $\operatorname{Re} x(t)$ a $\operatorname{Im} x(t)$ jsou **lineárně nezávislá**. Získaný výsledek sformulujeme jako větu.

Věta 4.3 (komplexní nenásobná vlastní čísla). *Je-li komplexní číslo $\lambda = \alpha + \beta \cdot i$ vlastním číslem matice A a je-li v odpovídající vlastní vektor, pak má soustava (4.4) dvě lineárně nezávislá a reálná řešení $y_1(t)$ a $y_2(t)$ daná vztahy*

$$\begin{aligned} y_1(t) &= \operatorname{Re} [v \exp(\lambda t)], \\ y_2(t) &= \operatorname{Im} [v \exp(\lambda t)]. \end{aligned} \tag{4.15}$$

Příklad 4.4. Určete obecné řešení soustavy rovnic:

$$\begin{aligned} x_1' &= x_1 + 3x_2, \\ x_2' &= -3x_1 + x_2. \end{aligned} \tag{4.16}$$

Řešení. Soustava (4.16) je speciálním případem soustavy (4.1) pro $n = 2$ a matici

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}.$$

Nalezneme vlastní čísla matice A jako řešení charakteristické rovnice

$$\det(A - \lambda E) = 0$$

tj. rovnice

$$\begin{vmatrix} 1 - \lambda & 3 \\ -3 & 1 - \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 2\lambda + 10 = (\lambda - 1 - 3i)(\lambda - 1 + 3i) = 0.$$

Její kořeny (a tedy hledaná vlastní čísla) jsou komplexní: $\lambda_1 = 1 + 3i$ a $\lambda_2 = 1 - 3i$. Máme tedy dvojici komplexně sdružených vlastních čísel. Proto lze při hledání obecného řešení soustavy (4.16) využít Větu 4.3.

Určeme nyní vlastní vektory, odpovídající prvnímu vlastnímu číslu. Vlastní vektor $v_1 = (v_{11}, v_{12})^T$, odpovídající vlastnímu číslu $\lambda_1 = 1 + 3i$ je libovolný nenulový vektor, splňující vztah

$$(A - \lambda_1 E)v_1 = o.$$

Jeho rozepsáním dostáváme soustavu

$$\begin{pmatrix} -3i & 3 \\ -3 & -3i \end{pmatrix} \cdot v_1 = o.$$

Vzhledem k lineární závislosti řádků matice (první řádek je i -násobkem druhého) se soustava redukuje na jediný vztah

$$-3iv_{11} + 3v_{12} = 0$$

a jedno nenulové řešení je například $v_1 = (1, i)^T$. Řešení soustavy (4.16) odpovídající tomuto vlastnímu vektoru a vlastnímu číslu je

$$\begin{aligned} x_1(t) = (x_{11}(t), x_{12}(t)) &= (1, i)^T \cdot e^{(1+3i)t} = \\ &= (1, i)^T \cdot e^t (\cos 3t + i \sin 3t) = e^t \cdot \begin{pmatrix} \cos 3t + i \sin 3t \\ -\sin 3t + i \cos 3t \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Pomocí vztahů (4.14) nebo (4.15) nyní určíme dvojici lineárně nezávislých reálných řešení, tj. reálný fundamentální systém $y_1(t)$, $y_2(t)$ soustavy (4.16):

$$\begin{aligned} y_1(t) &= \operatorname{Re} x_1(t) = \frac{1}{2} (x_1(t) + \bar{x}_1(t)) = e^t \cdot \begin{pmatrix} \cos 3t \\ -\sin 3t \end{pmatrix}, \\ y_2(t) &= \operatorname{Im} x_1(t) = \frac{1}{2i} (x_1(t) - \bar{x}_1(t)) = e^t \cdot \begin{pmatrix} \sin 3t \\ \cos 3t \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Obecné řešení $x(t)$ soustavy (4.16) je dáno lineární kombinací

$$x(t) = C_1 y_1(t) + C_2 y_2(t) = C_1 e^t \cdot \begin{pmatrix} \cos 3t \\ -\sin 3t \end{pmatrix} + C_2 e^t \cdot \begin{pmatrix} \sin 3t \\ \cos 3t \end{pmatrix}$$

s libovolnými konstantami C_1 a C_2 . Na závěr ještě rozepíšeme poslední vztah po složkách. Protože $x(t) = (x_1(t), x_2(t))^T$, máme

$$\begin{aligned} x_1(t) &= (C_1 \cos 3t + C_2 \sin 3t) \cdot e^t, \\ x_2(t) &= (-C_1 \sin 3t + C_2 \cos 3t) \cdot e^t. \end{aligned}$$

□

Příklad 4.5. Určete obecné řešení soustavy rovnic:

$$\begin{aligned} x_1' &= x_1 + 3x_2, \\ x_2' &= -5x_1 + x_2 - x_3, \\ x_3' &= -6x_1 - 6x_2 - 2x_3. \end{aligned} \tag{4.17}$$

Řešení. Soustava (4.17) je speciálním případem soustavy (4.1) pro $n = 3$ a matici

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ -5 & 1 & -1 \\ -6 & -6 & -2 \end{pmatrix}.$$

Nalezneme vlastní čísla matice A jako řešení charakteristické rovnice

$$\det(A - \lambda E) = 0$$

tj. rovnice

$$\begin{vmatrix} 1 - \lambda & 3 & 0 \\ -5 & 1 - \lambda & -1 \\ -6 & -6 & -2 - \lambda \end{vmatrix} = (\text{po úpravě}) = -(\lambda + 2)[(\lambda - 1)^2 + 9] = 0.$$

Její kořeny (a tedy hledaná vlastní čísla) jsou $\lambda_1 = -2$, $\lambda_2 = 1 + 3i$ a $\lambda_3 = 1 - 3i$. Máme tedy tři nenásobná a různá vlastní čísla. Jedno reálné a dvě komplexně sdružená. Proto při hledání obecného řešení soustavy (4.41) využijeme v případě kořene $\lambda_1 = -2$ Větu 4.1 a v případě komplexně sdružených kořenů $\lambda_2 = 1 + 3i$ a $\lambda_3 = 1 - 3i$ využijeme Větu 4.3. Hledejme vlastní vektory, odpovídající vlastním číslům. První vlastní vektor

$$v_1 = (v_{11}, v_{12}, v_{13})^T,$$

odpovídající vlastnímu číslu $\lambda_1 = -2$ je libovolný nenulový vektor, splňující vztah

$$(A - \lambda_1 E)v_1 = o.$$

Jeho rozepsáním dostáváme soustavu

$$\begin{pmatrix} 3 & 3 & 0 \\ -5 & 3 & -1 \\ -6 & -6 & 0 \end{pmatrix} \cdot v_1 = o.$$

Třetí řádek lze vynechat a soustavu redukovat na tvar

$$\begin{cases} v_{11} + v_{12} + 0 = 0, \\ -5v_{11} + 3v_{12} - v_{13} = 0 \end{cases}.$$

Jedno nenulové řešení je například $v_1 = (-1, 1, 8)^T$. Řešení soustavy (4.17) odpovídající tomuto vlastnímu vektoru a vlastnímu číslu je

$$x_1(t) = (x_{11}(t), x_{12}(t), x_{13}(t)) = (-1, 1, 8)^T \cdot e^{-2t}.$$

Druhý vlastní vektor $v_2 = (v_{21}, v_{22}, v_{23})^T$, odpovídající vlastnímu číslu $\lambda_2 = 1 + 3i$ je libovolný nenulový vektor, splňující vztah

$$(A - \lambda_2 E)v_2 = o.$$

Jeho rozepsáním dostáváme soustavu

$$\begin{pmatrix} -3i & 3 & 0 \\ -5 & -3i & -1 \\ -6 & -6 & -3 - 3i \end{pmatrix} \cdot v_2 = o.$$

Přičteme-li ke druhému řádku první řádek vynásobený číslem $(5/3)i$ a ke třetímu řádku první vynásobený číslem $2i$ dostáváme

$$\begin{pmatrix} -3i & 3 & 0 \\ 0 & 2i & -1 \\ 0 & -6 + 6i & -3 - 3i \end{pmatrix} \cdot v_2 = o.$$

Dále přičteme druhý řádek násobený číslem $-3(1+i)$ ke třetímu řádku. Máme

$$\begin{pmatrix} -3i & 3 & 0 \\ 0 & 2i & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot v_2 = o.$$

Nyní snadno určíme jedno nenulové řešení. Je jím například vektor $v_2 = (-i, 1, 2i)^T$. Řešení soustavy (4.17) odpovídající tomuto vlastnímu vektoru a vlastnímu číslu je

$$\begin{aligned} x_2(t) &= (x_{21}(t), x_{22}(t), x_{23}(t)) = (-i, 1, 2i)^T \cdot e^{(1+3i)t} = \\ &= (-i, 1, 2i)^T \cdot e^t (\cos 3t + i \sin 3t) = e^t \cdot \begin{pmatrix} \sin 3t - i \cos 3t \\ \cos 3t + i \sin 3t \\ -2 \sin 3t + 2i \cos 3t \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Pomocí vztahů (4.14) nebo (4.15) nyní určíme dvojici lineárně nezávislých reálných řešení $y_2(t)$, $y_3(t)$ soustavy (4.17), odpovídajících komplexnímu řešení $x_2(t)$:

$$\begin{aligned} y_2(t) &= \operatorname{Re} x_2(t) = \frac{1}{2} (x_2(t) + \bar{x}_2(t)) = e^t \cdot \begin{pmatrix} \sin 3t \\ \cos 3t \\ -2 \sin 3t \end{pmatrix}, \\ y_3(t) &= \operatorname{Im} x_2(t) = \frac{1}{2i} (x_2(t) - \bar{x}_2(t)) = e^t \cdot \begin{pmatrix} -\cos 3t \\ \sin 3t \\ 2 \cos 3t \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Fundamentální systém řešení soustavy (4.17) je tvořen trojicí lineárně nezávislých řešení

$$e^{-2t} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 8 \end{pmatrix}, e^t \cdot \begin{pmatrix} \sin 3t \\ \cos 3t \\ -2 \sin 3t \end{pmatrix}, e^t \cdot \begin{pmatrix} -\cos 3t \\ \sin 3t \\ 2 \cos 3t \end{pmatrix}.$$

Její obecné řešení $x(t)$ je dáno lineární kombinací

$$x(t) = C_1 e^{-2t} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 8 \end{pmatrix} + C_2 e^t \cdot \begin{pmatrix} \sin 3t \\ \cos 3t \\ -2 \sin 3t \end{pmatrix} + C_3 e^t \cdot \begin{pmatrix} -\cos 3t \\ \sin 3t \\ 2 \cos 3t \end{pmatrix}$$

s libovolnými konstantami C_1 , C_2 a C_3 . □

4.5 Příklad násobných vlastních čísel

V částech 4.3 a 4.4 byly rozebrány případy nenásobných vlastních čísel jak reálných, tak i komplexních. Bylo ukázáno, že v každém z těchto případů má řešení tvar, který byl předpokládán, tj. tvar (4.2). V případech, kdy jsou kořeny charakteristické rovnice (4.7) násobné je konstrukce fundamentálního systému komplikovanější. Ukazuje se, že každému násobnému vlastnímu číslu λ odpovídá přesně tolik lineárně nezávislých řešení, jaká je jeho násobnost. Mezi těmito řešeními se vždy vyskytuje alespoň jedno řešení, jehož tvar jsme předpokládali, tj. řešení ve tvaru (4.2). Lineárně nezávislých řešení tvaru (4.2) může být i několik. Mohou však přibýt další řešení, která již tento tvar nemají. V této části popíšeme konstrukci těchto řešení. Můžeme přibližně říci, že každé následující lineárně nezávislé řešení (které již nemá tvar (4.2)) odpovídající násobnému vlastnímu číslu λ je násobkem každé souřadnice řešení tvaru (4.2) vhodným polynomem (vzhledem k nezávislé proměnné) stupně nejvýše prvního. Další řešení (pokud existuje) je odvozeno z prvního řešení (4.2) opět násobením každé jeho souřadnice vhodným polynomem stupně nejvýše druhého atd.

V případě, že násobné vlastní číslo λ je komplexní, bude (vzhledem k tomu, že matice A je reálná) komplexně sdružené číslo $\bar{\lambda}$ také vlastní číslem stejné násobnosti. Podobně jako v části 4.4 lze ukázat, že v případě existence komplexního řešení $x = x(t)$ soustavy (4.1) můžeme pomocí vzorců (4.15) obdržet dvě reálná řešení $y_1(t)$ a $y_2(t)$ soustavy (4.1).

Uvedme nyní postup, vedoucí k nalezení fundamentálního systému řešení soustavy (4.1).

4.6 Zobecněné vlastní vektory

Vektor v nazýváme **zobecněným vlastním vektorem hodnosti r** , odpovídající vlastnímu číslu λ , jestliže platí

$$(A - \lambda E)^r v = o \quad (4.18)$$

a

$$(A - \lambda E)^{r-1} v \neq o. \quad (4.19)$$

Je-li dán zobecněný vlastní vektor v hodnosti r , odpovídající vlastnímu číslu λ , pak k němu definujeme odpovídající **řetězec zobecněných vlastních vektorů**

$$v_1, v_2, \dots, v_r \quad (4.20)$$

délky r takto:

$$\begin{cases} v_r & = v, \\ v_{r-1} & = (A - \lambda E)v_r = (A - \lambda E)v, \\ v_{r-2} & = (A - \lambda E)v_{r-1} = (A - \lambda E)^2 v, \\ \dots & \\ v_1 & = (A - \lambda E)v_2 = (A - \lambda E)^{r-1} v. \end{cases} \quad (4.21)$$

Poznamenejme, že z uvedené podmínky (4.18) okamžitě vyplývá, že vektor v_1 v řetězci (4.20) je **vlastním** vektorem odpovídajícím vlastnímu číslu λ , neboť dle (4.19)

a (4.21) je $v_1 \neq o$ a dle (4.18) je $(A - \lambda E)v_1 = o$. Jednomu vlastnímu číslu může odpovídat několik různých řetězců, které mohou mít různé délky. Bez důkazu uvedme následující poznatky o zobecněných vlastních vektorech (příslušné důkazy k těmto a k dalším poznatkům jsou obsaženy v některých učebnicích algebry).

Věta 4.6. *Všechny vektory řetězce (4.20) jsou lineárně nezávislé. Odpovídá-li jednomu vlastnímu číslu několik zobecněných vlastních vektorů, které nejsou lineárně závislé, pak je množina vektorů tvořená všemi příslušnými řetězci lineárně nezávislou množinou. Součet délek všech lineárně nezávislých řetězců odpovídajících danému vlastnímu číslu je roven jeho násobnosti. Zobecněné vlastní vektory odpovídající různým vlastním číslům jsou lineárně nezávislé.*

4.7 Metoda vlastních vektorů

4.7.1 Konstrukce fundamentálního systému

Poznatky uvedené ve Větě 4.6 jsou teoretickým základem garantujícím správnost a úplnost níže uvedeného postupu konstrukce fundamentálního systému řešení soustavy (4.1). Předpokládejme, že λ je vlastní číslo matice A , vektor v je zobecněným vlastním vektorem hodnoty s a (4.20) je odpovídající řetězec vlastních vektorů. Jak bylo uvedeno výše, platí

$$(A - \lambda E)v_1 = o. \quad (4.22)$$

Jinými slovy, v_1 je vlastní vektor matice A , příslušející vlastnímu číslu λ . Proto je vektor

$$y_1 := v_1 e^{\lambda t} \quad (4.23)$$

řešením soustavy (4.1). Definujme vektor

$$y_2 := (v_1 t + v_2) e^{\lambda t} \quad (4.24)$$

a ukažme, že je řešením soustavy (4.1). Skutečně, pomocí vztahů (4.21) (ze kterých mj. vyplývá $(A - \lambda E)v_2 = v_1$, tj. $Av_2 = \lambda v_2 + v_1$) a (4.22) (tj. $\lambda v_1 = Av_1$) dostáváme

$$\begin{aligned} y_2' &= [(v_1 t + v_2) e^{\lambda t}]' = v_1 e^{\lambda t} + \lambda (v_1 t + v_2) e^{\lambda t} = [(\lambda v_1 t) + \lambda v_2 + v_1] e^{\lambda t} = \\ &= t (\lambda v_1 e^{\lambda t}) + (\lambda v_2 + v_1) e^{\lambda t} = t (Av_1 e^{\lambda t}) + Av_2 e^{\lambda t} = \\ &= A(v_1 t + v_2) e^{\lambda t} = Ay_2. \end{aligned}$$

Tím je tvrzení, že vektor y_2 je řešením soustavy (4.1) prověřeno. Definujme další vektor

$$y_3 := \left(v_1 \cdot \frac{t^2}{2} + v_2 t + v_3 \right) e^{\lambda t}$$

a také ukažme, že je řešením soustavy (4.1). Dostáváme (kromě výše uvedených vztahů použijeme ještě $Av_3 = \lambda v_3 + v_2$)

$$\begin{aligned}
 y_3' &= \left[\left(v_1 \cdot \frac{t^2}{2} + v_2 t + v_3 \right) e^{\lambda t} \right]' = (v_1 t + v_2) e^{\lambda t} + \\
 &\lambda \left(v_1 \cdot \frac{t^2}{2} + v_2 t + v_3 \right) e^{\lambda t} = \left(\lambda v_1 \cdot \frac{t^2}{2} + (\lambda v_2 + v_1) t + (\lambda v_3 + v_2) \right) e^{\lambda t} = \\
 &\frac{t^2}{2} (\lambda v_1 e^{\lambda t}) + t(\lambda v_2 + v_1) e^{\lambda t} + (\lambda v_3 + v_2) e^{\lambda t} = \\
 &\frac{t^2}{2} (A v_1 e^{\lambda t}) + t A v_2 e^{\lambda t} + A v_3 e^{\lambda t} = \\
 &A \left(v_1 \frac{t^2}{2} + v_2 t + v_3 \right) e^{\lambda t} = A y_3.
 \end{aligned}$$

Podobným způsobem konstruujeme další vektory až po vektor

$$y_r := \left(v_1 \cdot \frac{t^{r-1}}{(r-1)!} + v_2 \cdot \frac{t^{r-2}}{(r-2)!} + \dots + v_{r-1} t + v_r \right) e^{\lambda t}.$$

Protože jsou vektory řetězce (4.20) dle Věty 4.6 lineárně nezávislé a

$$y_1(0) = v_1, y_2(0) = v_2, \dots, y_r(0) = v_r,$$

jsou vektory

$$y_1(t), y_2(t), \dots, y_r(t) \tag{4.25}$$

také lineárně nezávislé. Získali jsme tedy r lineárně nezávislých řešení (4.25) soustavy (4.1).

Věta 4.7. *Množina všech vektorů (konstruovaných výše uvedeným způsobem) odpovídajících všem vlastním číslům a všem jim odpovídajícím řetězcům zobecněných vlastních vektorů tvoří **fundamentální systém** soustavy (4.1).*

Stranou jsme prozatím nechali otázku kolik zobecněných vlastních vektorů odpovídá násobnému vlastnímu číslu λ . Odpověď na ni vyplývá z teorie algebraických lineárních systémů a je obsažena v následující větě. Označme hodnotu matice

$$A - \lambda E \tag{4.26}$$

písmenem h a její nulitu písmenem ν , kde $\nu = n - h$.

Věta 4.8. *Počet zobecněných vlastních vektorů odpovídajících násobnému vlastnímu číslu λ je roven nulitě ν matice (4.26).*

Ilustrujme popsany postup několika příklady.

4.7.2 Ilustrace - konstrukce fundamentálního systému

Příklad 4.9. Určete obecné řešení soustavy rovnic:

$$\begin{aligned}
 x_1' &= x_1 + x_2 - x_3, \\
 x_2' &= -x_1 + x_2 - x_3, \\
 x_3' &= -x_2 + 2x_3.
 \end{aligned} \tag{4.27}$$

Řešení. Soustava (4.27) je speciálním případem soustavy (4.1) pro $n = 3$ a matici

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Nalezneme vlastní čísla matice A jako řešení charakteristické rovnice

$$\det(A - \lambda E) = 0$$

tj. rovnice

$$\begin{vmatrix} 1 - \lambda & 1 & -1 \\ -1 & 1 - \lambda & -1 \\ 0 & -1 & 2 - \lambda \end{vmatrix} = (\text{po úpravě}) = -(\lambda - 1)^2(\lambda - 2) = 0.$$

Vlastní čísla jsou: nenásobné číslo $\lambda_1 = 2$ a dvojnásobné číslo $\lambda_2 = \lambda_3 = 1$. Hledejme vlastní vektory, odpovídající vlastním číslům. První vlastní vektor

$$v_1 = (v_{11}, v_{12}, v_{13})^T,$$

odpovídající vlastnímu číslu $\lambda_1 = 2$ je libovolný nenulový vektor, splňující vztah

$$(A - \lambda_1 E)v_1 = o.$$

Jeho rozepsáním dostáváme soustavu

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot v_1 = o.$$

Druhý řádek matice soustavy je lineární kombinací prvního a třetího řádku. Proto lze soustavu redukovat na

$$\begin{aligned} v_{11} &+ v_{13} = 0, \\ v_{12} &= 0 \end{aligned}$$

a jedno nenulové řešení je například $v_1 = (-1, 0, 1)^T$. Řešení soustavy (4.27) odpovídající tomuto vlastnímu vektoru a vlastnímu číslu je

$$x_1(t) = (x_{11}(t), x_{12}(t), x_{13}(t)) = (-1, 0, 1)^T \cdot e^{2t}.$$

Druhý vlastní vektor $v_2 = (v_{21}, v_{22}, v_{23})^T$, odpovídající vlastnímu číslu $\lambda_2 = 1$ je libovolný nenulový vektor, splňující vztah

$$(A - \lambda_2 E)v_2 = o.$$

Jeho rozepsáním dostáváme soustavu

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot v_2 = o. \quad (4.28)$$

Snadno lze ověřit, že matice soustavy (4.28) má hodnotu $h = 2$ a nulitu $\nu = 3 - 2 = 1$. Vlastnímu číslu $\lambda_2 = 1$ tedy bude odpovídat jeden zobecněný vlastní vektor hodnoti $r = 2$. Třetí řádek matice soustavy je opačným prvním řádkem a soustavu lze redukovat na

$$\begin{aligned} v_{22} - v_{23} &= 0, \\ v_{21} + v_{23} &= 0 \end{aligned}$$

a jedno nenulové řešení je například $v_2 = (-1, 1, 1)^T$. Jedno z řešení soustavy (4.27) odpovídající tomuto vlastnímu vektoru a vlastnímu číslu je

$$x_2(t) = (x_{21}(t), x_{22}(t), x_{23}(t)) = (-1, 1, 1)^T \cdot e^t.$$

Vytvořme řetězec zobecněných vlastních vektorů, odpovídajících uvažovanému vlastnímu číslu. Hledejme nenulový vektor

$$v_3 = (v_{31}, v_{32}, v_{33})^T,$$

splňující vztah

$$(A - \lambda_3 E)v_3 = v_2.$$

Jeho rozepsáním dostáváme soustavu

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot v_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

První a třetí řádek jsou lineárně závislé. Soustavu lze tedy redukovat na tvar

$$\begin{aligned} v_{32} - v_{33} &= -1, \\ -v_{31} - v_{33} &= 1 \end{aligned}$$

a jedno nenulové řešení je například $v_3 = (-2, 0, 1)^T$. Další řešení soustavy (4.27) odpovídající vlastnímu číslu $\lambda_2 = 1$ je

$$x_3(t) = (x_{31}(t), x_{32}(t), x_{33}(t)) = (v_2 t + v_3) \cdot e^t = ((-1, 1, 1)^T t + (-2, 0, 1)^T) \cdot e^t.$$

Všechna tři řešení soustavy (4.27) tvoří fundamentální systém řešení. Obecné řešení je dáno lineární kombinací

$$\begin{aligned} x(t) &= C_1(-1, 0, 1)^T \cdot e^{2t} + C_2(-1, 1, 1)^T \cdot e^t + \\ &C_3 \left((-1, 1, 1)^T t + (-2, 0, 1)^T \right) \cdot e^t = \\ &C_1 \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot e^{2t} + C_2 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot e^t + C_3 \left(\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} t + \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right) \cdot e^t \end{aligned}$$

s libovolnými konstantami C_1 , C_2 a C_3 .

4.8 Weyrova maticová metoda

Postup vedoucí k nalezení fundamentálního systému řešení soustavy rovnic (4.1), který byl uveden výše naprosto postačuje v případě, že uvažované soustavy rovnic mají malý počet rovnic. V případě většího počtu rovnic může být, například, komplikací určení hodnoty zobecněného vlastního vektoru v ve vztazích (4.18)–(4.21). (V příkladech, řešených v předchozí části tato skutečnost nebyla na závadu. Příslušné hodnoty se daly snadno určit porovnáním násobností kořenů a počtu vlastních vektorů.) Tento problém nevzniká v metodě, kterou nyní popíšeme a jejíž zvládnutí je cílem této kapitoly. Je nazývána *Weyrovou maticovou metodou* a umožňuje celkové zmechanizování hledání fundamentálního systému. Fakticky se jedná o doplnění a modifikování předchozího postupu, na který se budeme odvolávat.

4.8.1 Schéma Weyrovy maticové metody

Předpokládejme, že λ je k -násobným ($2 \leq k \leq n$) kořenem charakteristické rovnice (4.7). Utvořme posloupnost matic

$$\begin{aligned} (A - \lambda E)^0 &= E, \\ (A - \lambda E)^1 &= A - \lambda E, \\ (A - \lambda E)^2, \\ (A - \lambda E)^3, \\ \dots \\ (A - \lambda E)^m, \end{aligned} \tag{4.29}$$

kde číslo m určíme tak, aby matice $(A - \lambda E)^m$ měla hodnotu $n - k$. Přiřaďme jim posloupnost jejich hodnot

$$h_0, h_1, h_2, h_3, \dots, h_m.$$

V této posloupnosti je $n = h_0$. Lze dokázat, že pro tyto hodnoty platí

$$h_0 > h_1 > h_2 > h_3 > \dots > h_m = n - k$$

a že pro posloupnost nulit uvedených matic (viz vysvětlení následující za vztahem (4.26)) je

$$0 = \nu_0 < \nu_1 < \nu_2 < \nu_3 < \dots < \nu_m = k.$$

Počet matic v posloupnosti (4.29) je $m + 1$. Definujme dále čísla

$$\sigma_1 = \nu_1 - \nu_0, \sigma_2 = \nu_2 - \nu_1, \dots, \sigma_m = \nu_m - \nu_{m-1},$$

která se nazývají **charakteristiky matice** A (odpovídající vlastnímu číslu λ). Platí pro ně vztahy:

$$\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \dots \geq \sigma_m$$

a

$$\sigma_1 + \sigma_2 + \dots + \sigma_m = k. \tag{4.30}$$

Charakteristiky matice A určují rozmístění řetězců zobecněných vlastních vektorů v_{js} , $j = 1, 2, \dots, m$, $s = 1, 2, \dots, \sigma_j$, odpovídajících zobecněných vlastním vektorům

$$v_{m1}, \dots, v_{m\sigma_m}, v_{m-1, \sigma_m+1}, \dots, v_{m-1, \sigma_{m-1}}, \dots, v_{2\sigma_2}, \dots, v_{1\sigma_1}, \quad (4.31)$$

které jsou rozmístěny v tabulce, která má m řádků a σ_1 sloupců:

v_{11}	v_{12}	\vdots	$v_{1\sigma_m}$	v_{1, σ_m+1}	\vdots	$v_{1, \sigma_{m-1}}$	\vdots	$v_{1\sigma_2}$	\vdots	$v_{1\sigma_1}$
v_{21}	v_{22}	\vdots	$v_{2\sigma_m}$	v_{2, σ_m+1}	\vdots	$v_{2, \sigma_{m-1}}$	\vdots	$v_{2\sigma_2}$		
\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots			
$v_{m-1,1}$	$v_{m-1,2}$	\vdots	v_{m-1, σ_m}	v_{m-1, σ_m+1}	\vdots	$v_{m-1, \sigma_{m-1}}$				
v_{m1}	v_{m2}	\vdots	$v_{m\sigma_m}$							

(4.32)

Počet vektorů v každém řádku je určen příslušnou charakteristikou. Je-li například $\sigma_2 = 4$, znamená to, že ve druhém řádku (určeném indexem charakteristiky) tabulky (4.32) jsou čtyři (lineárně nezávislé) vektory. Obecně je v j -tém řádku tabulky celkem σ_j vektorů. Protože je součet všech charakteristik roven k (viz vztah (4.30)), počet všech vektorů v tabulce je také roven číslu k , tj. násobnosti vlastního čísla λ . Každý vektor v tabulce (4.32) je nenulový.

4.8.2 Konstrukce tabulky Weyrovoy metody

Každý sloupec tabulky (4.32) je řetězcem zobecněných vlastních vektorů, odpovídajícím zobecněnému vlastnímu vektoru, kterým sloupec končí. Protože jsou **hodnosti** zobecněných vlastních vektorů **známy**, můžeme při výpočtu řetězců postupovat tak, jako v části 4.7. Je však možné výpočet modifikovat a postupovat například takto:

1. Nejprve **určit poslední vektor v každém sloupci** - tedy určit zobecněné (lineárně nezávislé) vlastní vektory uvedené v (4.31). To znamená, že je nutné pro každou hodnotu indexu $j = 1, 2, \dots, m$ najít netriviální vektor, vyhovující rovnici

$$(A - \lambda E)^j v_{js} = 0, \quad s = \sigma_{j+1} + 1, \sigma_{j+1} + 2, \dots, \sigma_j, \quad (4.33)$$

kde položíme $\sigma_{m+1} = 0$ v případě, že je voleno $j = m$. Pro úplnost ještě dodejme, že v případě když $\sigma_{j+1} + 1 > \sigma_j$ není vztah (4.33) definován.

2. Následně **určit všechny předcházející vektory v každém sloupci**. Tj. pro každou hodnotu dvojice indexů (j, s) , kde $j \in \{1, 2, \dots, m\}$ a $s \in \{\sigma_{j+1} + 1, \sigma_{j+1} + 2, \dots, \sigma_j\}$, kde položíme $\sigma_{m+1} = 0$ v případě, že je voleno $j = m$ najít řetězec netriviálních vektorů pomocí vztahů

$$v_{\ell-1, s} = (A - \lambda E)v_{\ell s}, \quad \ell = j, j-1, \dots, 2. \quad (4.34)$$

Následující věta je analogií Věty 4.6 a Věty 4.7. Poznamenejme, že výše uvedenou konstrukci je možné formálně aplikovat i v případě nenásobných kořenů, i když výsledek aplikace bude stejný jako v částech 4.3 a 4.4. Tuto poznámku děláme jen kvůli úplnosti metody.

Věta 4.10. Předpokládejme, že λ je k -násobným kořenem charakteristické rovnice (4.7) a že jsou nalezeny všechny vektory (netriviální) uvedené v tabulce (4.32). Pak je pro každou (fixovanou) hodnotu dvojice indexů (j, s) , kde $j \in \{1, 2, \dots, m\}$ a $s \in \{\sigma_{j+1} + 1, \sigma_{j+1} + 2, \dots, \sigma_j\}$, kde položíme $\sigma_{m+1} = 0$ v případě, že je voleno $j = m$ systém vektorových funkcí

$$\begin{aligned} y_{1s} &:= v_{1s} e^{\lambda t}, \\ y_{2s} &:= (v_{1s} \cdot t + v_{2s}) e^{\lambda t}, \\ \dots & \\ y_{js} &:= \left(v_{1s} \cdot \frac{t^{j-1}}{(j-1)!} + v_{2s} \cdot \frac{t^{j-2}}{(j-2)!} + \dots + v_{j-1,s} \cdot t + v_{js} \right) e^{\lambda t} \end{aligned} \quad (4.35)$$

systémem lineárně nezávislých řešení systému (4.1). Jestliže zkonstruujeme systém lineárně nezávislých řešení (4.35) systému (4.1) pro každou (fixovanou) hodnotu dvojice indexů (j, s) , kde $j \in \{1, 2, \dots, m\}$ a $s \in \{\sigma_{j+1} + 1, \sigma_{j+1} + 2, \dots, \sigma_j\}$, dostaneme celkem k lineárně nezávislých řešení (4.1), tedy tolik řešení jaká je násobnost kořene λ . Fundamentální systém řešení je sjednocení všech množin lineárně nezávislých řešení odpovídajících všem kořenům charakteristické rovnice (4.7).

Poznámka 4.11. Následující poznámka je terminologická. V některých příručkách se (na rozdíl od námi zavedené terminologie) užívá termín **zobecněné vlastní vektory** pro vektory $y_{1s}, y_{2s}, \dots, y_{js}$ systému (4.35) a nikoli pro **řetězec zobecněných vlastních vektorů** $v_{1s}, v_{2s}, \dots, v_{js}$ (viz (4.20)).

4.9 Shrnutí kapitoly

Tato kapitola byla poslední kapitolou věnovanou lineárním systémům. Byl probrán efektivní algoritmus konstrukce fundamentální množiny řešení a obecného řešení. Pro její úspěšné použití bylo nutné vytvořit posloupnost matic (4.29), vypočítat charakteristiky matice A a sestavit tabulku (4.32). Poslední fází bylo nalezení systému řešení (4.35) a sestavení obecného řešení.

Metoda konstrukce se lišila v závislosti na tom, zdali kořeny byly reálné či komplexní a násobné či nenásobné. V případě násobných kořenů se některá řešení lišila od původně předpokládaného tvaru. Vždy však jedno z řešení tento tvar mělo.

4.10 Řešené příklady

Příklad 4.12. Určete obecné řešení soustavy rovnic:

$$\begin{aligned} x_1' &= x_1 - x_2 + x_3, \\ x_2' &= x_1 + x_2 - x_3, \\ x_3' &= -x_2 + 2x_3. \end{aligned} \quad (4.36)$$

Řešení. Soustava (4.36) je speciálním případem soustavy (4.1) pro $n = 3$ a matici

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Nalezneme vlastní čísla matice A jako řešení charakteristické rovnice

$$\det(A - \lambda E) = 0$$

tj. rovnice

$$\begin{vmatrix} 1 - \lambda & -1 & 1 \\ 1 & 1 - \lambda & -1 \\ 0 & -1 & 2 - \lambda \end{vmatrix} = (\text{po úpravě}) = -(\lambda - 1)^2(\lambda - 2) = 0.$$

Vlastní čísla jsou: nenásobné číslo $\lambda_1 = 2$ a dvojnásobné číslo $\lambda_2 = \lambda_3 = 1$. Hledejme vlastní vektor

$$v_1^* = (v_{11}^*, v_{12}^*, v_{13}^*)^T,$$

odpovídající vlastnímu číslu $\lambda_1 = 2$. Je to libovolný nenulový vektor, splňující vztah

$$(A - \lambda_1 E)v_1^* = o.$$

Jeho rozepsáním dostáváme soustavu

$$\begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot v_1^* = o.$$

Druhý řádek matice soustavy je lineární kombinací prvního a třetího řádku. Proto lze soustavu redukovat na

$$\begin{aligned} -v_{11}^* &+ v_{13}^* = 0, \\ &- v_{12}^* = 0 \end{aligned}$$

a jedno nenulové řešení je například $v_1^* = (1, 0, 1)^T$. Řešení soustavy (4.36) odpovídající tomuto vlastnímu vektoru a vlastnímu číslu je

$$x_1(t) = (x_{11}(t), x_{12}(t), x_{13}(t)) = (1, 0, 1)^T \cdot e^{2t}.$$

Dále na základě Weyrovy metody určíme řešení odpovídající dvojnásobnému vlastnímu číslu $\lambda_{2,3} = 1$. Matice

$$A - \lambda_{2,3}E = A - E = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

má hodnotu $h_1 = 2$. Posloupnost hodnotí ukončíme ve chvíli, kdy $h_m = n - k = 3 - 2 = 1$. Protože $h_1 = 2 \neq 1$ určíme další člen této posloupnosti. Nalézáme matici

$$(A - \lambda_{2,3}E)^2 = (A - E)^2 = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Její hodnost $h_2 = 1 = n - k$ a $m = 2$. To znamená, že již není potřeba určovat další člen posloupnosti a příslušná tabulka (4.32) bude mít dva řádky. Sestavme posloupnost příslušných nulit:

$$\nu_0 = 0, \nu_1 = 1, \nu_2 = 2$$

a posloupnost charakteristik

$$\sigma_1 = 1, \sigma_2 = 1.$$

V prvním i ve druhém řádku tabulky (4.32) bude jen po jednom pomocném vektoru a tabulka bude mít tvar:

$$\begin{array}{|c|} \hline v_{11} \\ \hline v_{21} \\ \hline \end{array}.$$

Vektor $v_{21} = (v_{21}^1, v_{22}^2, v_{23}^3)^T$ určíme ze vztahu (4.33) ve kterém položíme $j = 2$ a $s = 1$ (tato kombinace indexů je jedinou přípustnou kombinací):

$$\begin{pmatrix} -1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \cdot v_{21} = o. \quad (4.37)$$

Nenulové řešení je například $v_{21} = (1, 1, 1)^T$. Určíme vektor $v_{11} = (v_{11}^1, v_{12}^2, v_{13}^3)^T$ pomocí vztahů (4.34), kde $j = 2$, $s = 1$ a tedy jediná možná volba je $\ell = 2$. Tedy

$$v_{11} = (A - \lambda E)v_{21} = (A - E)v_{21} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} v_{21} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Nalezený vektor je bohužel triviální. Abychom obdrželi netriviální vektor, musíme změnit volbu vektoru v_{21} . Obecné řešení systému (4.37) je dvouparametrickou množinou. Vektor $v_{21} = (1, -1, 0)^T$ je také řešením systému (4.37) a vektor

$$v_{11} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} v_{21} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

je již netriviální. Aplikujme nyní Větu 4.10 a utvořme systém vektorových funkcí (4.35):

$$\begin{aligned} y_{11} &:= v_{11} \cdot e^t &= (1, 1, 1)^T \cdot e^t, \\ y_{21} &:= (v_{11} \cdot t + v_{21}) e^t &= ((1, 1, 1)^T \cdot t + (1, -1, 0)^T) \cdot e^t. \end{aligned}$$

Všechna tři řešení $x_1(t)$, y_{11} a y_{21} soustavy (4.36) tvoří její fundamentální systém řešení. Obecné řešení soustavy (4.36) je dáno lineární kombinací

$$\begin{aligned} x(t) &= C_1 x_1(t) + C_2 y_{11} + C_3 y_{21} = C_1 (1, 0, 1)^T \cdot e^{2t} + C_2 (1, 1, 1)^T \cdot e^t + \\ &\quad C_3 ((1, 1, 1)^T \cdot t + (1, -1, 0)^T) \cdot e^t = \\ C_1 &\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot e^{2t} + C_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot e^t + C_3 \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} t + \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right) \cdot e^t = \begin{pmatrix} e^{2t} & e^t & (t+1)e^t \\ 0 & e^t & (t-1)e^t \\ e^{2t} & e^t & te^t \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

s libovolnými konstantami C_1 , C_2 a C_3 . □

Příklad 4.13. Určete obecné řešení soustavy rovnic:

$$\begin{aligned} x_1' &= x_1 + x_2, \\ x_2' &= \quad + 4x_2 - x_3, \\ x_3' &= -x_1 + 3x_2 + x_3. \end{aligned} \tag{4.38}$$

Řešení. Soustava (4.38) je speciálním případem soustavy (4.1) pro $n = 3$ a matici

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & -1 \\ -1 & 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

Nalezneme vlastní čísla matice A jako řešení charakteristické rovnice

$$\det(A - \lambda E) = 0$$

tj. rovnice

$$\begin{vmatrix} 1 - \lambda & 1 & 0 \\ 0 & 4 - \lambda & -1 \\ -1 & 3 & 1 - \lambda \end{vmatrix} = (\text{po úpravě}) = -(\lambda - 2)^3 = 0.$$

Vlastní číslo je jen jedno a je trojnásobné tj. $\lambda = \lambda_{1,2,3} = 2$. Na základě Weyrovy metody určíme řešení odpovídající trojnásobnému vlastnímu číslu. Matice

$$A - \lambda_{1,2,3}E = A - 2E = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \\ -1 & 3 & -1 \end{pmatrix}$$

má hodnotu $h_1 = 2$. Nulita $\nu_1 = n - h_1 = 3 - 2 = 1$ a charakteristika matice $\sigma_1 = \nu_1 - \nu_0 = 1 - 0 = 1$. To znamená, že v prvním řádku tabulky (4.32) je jen jeden pomocný vektor v_{11} . Vzhledem k tomu, že vlastní číslo je trojnásobné a že počet vektorů v tabulce (4.32) nemůže být v následujícím řádku vyšší než v předcházejícím můžeme bez výpočtu stanovit: $\sigma_2 = 1$, $\sigma_3 = 1$ a $m = 3$. Tabulka (4.32) má tvar

$$\begin{array}{|c|} \hline v_{11} \\ \hline v_{21} \\ \hline v_{31} \\ \hline \end{array}.$$

V tomto případě jsme určili rozmístění pomocných vektorů bez toho, abychom sestavovali odpovídající posloupnost matic (4.29). Násobení matic $A - 2E$, které potřebujeme ve vztahu (4.33) s $j = 3$ a $s = 1$ tj.

$$(A - 2E)^3 v_{31} = o$$

k určení vektoru v_{31} se v tomto případě vyhneme také. Ze vztahu $\sigma_2 = \nu_2 - \nu_1$ máme $\nu_2 = 2$ a ze vztahu $\sigma_3 = \nu_3 - \nu_2$ dostáváme $\nu_3 = 3$. Pak pro hodnoty platí $h_2 = n - \nu_2 = 1$ a $h_3 = n - \nu_3 = 0$. Poslední vztah však znamená, že hodnota matice $(A - 2E)^3$ je nula. Jinými slovy tato matice je nulová, a proto je možné volit vektor v_{31} libovolně. Definujme

$$v_{31} = (1, 0, 0)^T.$$

Vektor $v_{21} = (v_{21}^1, v_{22}^2, v_{23}^3)^T$ určíme pomocí vztahů (4.34), kde $j = 3$ a $s = 1$:

$$v_{21} = (A - \lambda E)v_{31} = (A - 2E)v_{31} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \\ -1 & 3 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Určíme vektor $v_{11} = (v_{11}^1, v_{12}^2, v_{13}^3)^T$ pomocí vztahů (4.34), kde $j = 2$, $s = 1$:

$$v_{11} = (A - \lambda E)v_{21} = (A - 2E)v_{21} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \\ -1 & 3 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Aplikujme nyní Větu 4.10 a utvořme systém vektorových funkcí (4.35):

$$y_{11} := v_{11} \cdot e^{2t} = (1, 1, 2)^T \cdot e^{2t},$$

$$y_{21} := (v_{11} \cdot t + v_{21}) \cdot e^{2t} = ((1, 1, 2)^T \cdot t + (-1, 0, -1)^T) \cdot e^{2t}$$

$$y_{31} := \left(v_{11} \cdot \frac{t^2}{2} + v_{21} \cdot t + v_{31} \right) \cdot e^{2t} = \left((1, 1, 2)^T \cdot \frac{t^2}{2} + (-1, 0, -1)^T \cdot t + (1, 0, 0)^T \right) \cdot e^{2t}.$$

Všechna tři řešení soustavy (4.38) tvoří její fundamentální systém řešení. Obecné řešení je dáno lineární kombinací

$$\begin{aligned} x(t) &= C_1 y_{11}(t) + C_2 y_{21} + C_3 y_{31} = C_1 (1, 1, 2)^T \cdot e^{2t} + C_2 ((1, 1, 2)^T \cdot t + (-1, 0, -1)^T) \cdot e^{2t} + \\ & C_3 \left((1, 1, 2)^T \cdot \frac{t^2}{2} + (-1, 0, -1)^T \cdot t + (1, 0, 0)^T \right) \cdot e^{2t} = \\ C_1 & \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot e^{2t} + C_2 \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot t + \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right) \cdot e^{2t} + C_3 \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \frac{t^2}{2} + \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \cdot t + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right) \cdot e^{2t} = \\ & \begin{pmatrix} 1 & t-1 & \frac{t^2}{2} - t + 1 \\ 1 & t & \frac{t^2}{2} \\ 2 & 2t-1 & t^2 - t \end{pmatrix} \cdot e^t \cdot \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

s libovolnými konstantami C_1 , C_2 a C_3 . □

Příklad 4.14. Najděte řešení soustavy rovnic:

$$\begin{aligned} x_1' &= 2x_1 - x_2 - x_3, \\ x_2' &= -x_1 + 2x_2 + x_3, \\ x_3' &= 2x_1 - 2x_2 - x_3, \end{aligned} \tag{4.39}$$

vyhovující Cauchyovým podmínkám $x_1(0) = 2$, $x_2(0) = 1$, $x_3(0) = 2$.

Řešení. Soustava (4.39) je speciálním případem soustavy (4.1) pro $n = 3$ s maticí

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 2 & -2 & -1 \end{pmatrix}.$$

Nalezneme vlastní čísla matice A jako řešení charakteristické rovnice

$$\det(A - \lambda E) = 0$$

tj. rovnice

$$\begin{vmatrix} 2 - \lambda & -1 & -1 \\ -1 & 2 - \lambda & 1 \\ 2 & -2 & -1 - \lambda \end{vmatrix} = (\text{po úpravě}) = -(\lambda - 1)^3 = 0.$$

Vlastní číslo je jen jedno a je trojnásobné tj. $\lambda = \lambda_{1,2,3} = 1$. Matice

$$A - \lambda_{1,2,3}E = A - E = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 2 & -2 & -2 \end{pmatrix}$$

má hodnotu $h_1 = 1$. Nulita $\nu_1 = n - h_1 = 3 - 1 = 2$ a charakteristika matice $\sigma_1 = \nu_1 - \nu_0 = 2 - 0 = 2$. To znamená, že v prvním řádku tabulky (4.32) jsou dva pomocné vektory v_{11}, v_{12} a ve druhém řádku je jen jeden pomocný vektor v_{21} . Proto můžeme hned stanovit: $\sigma_2 = 1$. Tabulka (4.32) má tvar

$$\begin{array}{|c|c|} \hline v_{11} & v_{12} \\ \hline v_{21} & \\ \hline \end{array}.$$

Dále: $m = 2$, $\nu_2 = \sigma_2 + \nu_1 = 1 + 2 = 3$ a $h_2 = n - \nu_2 = 3 - 3 = 0$. Odtud vyplývá, že matice $(A - E)^2$ je nulová a vztah

$$(A - E)^2 v_{21} = o,$$

který je důsledkem vztahu (4.33) s $j = 2$ a $s = 1$ je ekvivalentní vztahu

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} v_{21} = o,$$

a jeho řešením je libovolný vektor v_{21} . Při jeho výběru musíme dát pozor na to, aby předcházející vektor v_{11} , který určíme pomocí vztahů (4.34), kde $j = 2$ a $s = 1$ nebyl nulový. Položíme-li například $v_{21} = (1, 0, 0)^T$, potom

$$v_{11} = (A - \lambda E)v_{21} = (A - E)v_{21} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 2 & -2 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Aplikujme nyní Větu 4.10 a utvořme systém lineárně nezávislých vektorových funkcí (4.35) odpovídajících prvnímu sloupci tabulky:

$$\begin{aligned}y_{11} &:= v_{11} \cdot e^t = (1, -1, 2)^T \cdot e^t, \\y_{21} &:= (v_{11} \cdot t + v_{21}) \cdot e^t = ((1, -1, 2)^T \cdot t + (1, 0, 0)^T) \cdot e^t.\end{aligned}$$

Třetí řešení sestavíme pomocí druhého sloupce tabulky, ve kterém je jen jeden pomocný vektor v_{12} . Jde tedy o vlastní vektor. I nyní můžeme formálně aplikovat vztah (4.33) s $j = 1$ a $s = 2$ a určit netriviální vektor v_{12} tak, aby

$$(A - E)v_{12} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 2 & -2 & -2 \end{pmatrix} v_{12} = o.$$

Takovým vektorem je například vektor $v_{12} = (1, 1, 0)^T$ a příslušné řešení soustavy (4.39) je

$$y_{12} := v_{12} \cdot e^t = (1, 1, 0)^T \cdot e^t.$$

Zapišme obecné řešení soustavy (4.39) ve skalární formě:

$$\begin{aligned}x_1(t) &= C_1 e^t + C_2(t+1)e^t + C_3 e^t, \\x_2(t) &= -C_1 e^t - C_2 t e^t + C_3 e^t, \\x_3(t) &= 2C_1 e^t + 2C_2 t e^t,\end{aligned}$$

kde C_1 , C_2 a C_3 jsou libovolné konstanty. Nakonec určíme konkrétní hodnoty konstant C_1 , C_2 a C_3 tak, aby získané partikulární řešení vyhovovalo daným počátečním podmínkám. Pro $t = 0$ musí platit

$$\begin{aligned}x_1(0) &= C_1 + C_2 + C_3 = 2, \\x_2(0) &= -C_1 + C_3 = 1, \\x_3(0) &= 2C_1 = 2.\end{aligned}$$

Jediným řešením této soustavy jsou hodnoty $C_1 = 1$, $C_2 = -1$ a $C_3 = 2$. Hledané partikulární řešení je proto:

$$\begin{aligned}x_1(t) &= e^t - (t+1)e^t + 2e^t = e^t(2-t), \\x_2(t) &= -e^t + te^t + 2e^t = e^t(t+1), \\x_3(t) &= 2e^t - 2te^t = 2e^t(1-t).\end{aligned}$$

□

Příklad 4.15. Určete obecné řešení soustavy rovnic:

$$\begin{aligned}x_1' &= x_1 - x_2 + x_3, \\x_2' &= -x_1 - x_2 + x_3, \\x_3' &= x_1 + x_2 + x_3.\end{aligned}\tag{4.40}$$

Řešení. Soustava (4.40) je speciálním případem soustavy (4.1) pro $n = 3$ a matici

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Nalezneme vlastní čísla matice A jako řešení charakteristické rovnice

$$\det(A - \lambda E) = 0$$

tj. rovnice

$$\begin{vmatrix} 1 - \lambda & -1 & 1 \\ -1 & -1 - \lambda & 1 \\ 1 & 1 & 1 - \lambda \end{vmatrix} = (\text{po úpravě}) = -(\lambda - 1)(\lambda - 2)(\lambda + 2) = 0.$$

Její kořeny (a tedy hledaná vlastní čísla) jsou $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 2$ a $\lambda_3 = -2$. Máme tři reálná a různá vlastní čísla. Proto můžeme při hledání obecného řešení soustavy (4.40) opět využít Větu 4.1.

Hledejme vlastní vektory, odpovídající vlastním číslům. První vlastní vektor

$$v_1 = (v_{11}, v_{12}, v_{13})^T,$$

odpovídající vlastnímu číslu $\lambda_1 = 1$ je libovolný nenulový vektor, splňující vztah

$$(A - \lambda_1 E)v_1 = o.$$

Jeho rozepsáním dostáváme soustavu

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot v_1 = o.$$

První řádek matice soustavy je součtem druhého a třetího řádku. Proto lze soustavu redukovat na

$$\begin{aligned} -v_{11} - 2v_{12} + v_{13} &= 0, \\ v_{11} + v_{12} &= 0 \end{aligned}$$

a jedno nenulové řešení je například $v_1 = (-1, 1, 1)^T$. Řešení soustavy (4.40) odpovídající tomuto vlastnímu vektoru a vlastnímu číslu je

$$x_1(t) = (x_{11}(t), x_{12}(t), x_{13}(t)) = (-1, 1, 1)^T \cdot e^t.$$

Druhý vlastní vektor $v_2 = (v_{21}, v_{22}, v_{23})^T$, odpovídající vlastnímu číslu $\lambda_2 = 2$ je libovolný nenulový vektor, splňující vztah

$$(A - \lambda_2 E)v_2 = o.$$

Jeho rozepsáním dostáváme soustavu

$$\begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ -1 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot v_2 = o.$$

Třetí řádek matice soustavy je opačným prvním řádkem a soustavu lze redukovat na

$$\begin{array}{rcl} -v_{21} & - & v_{22} + v_{23} = 0, \\ & - & 2v_{22} = 0 \end{array}$$

a jedno nenulové řešení je například $v_2 = (1, 0, 1)^T$. Řešení soustavy (4.40) odpovídající tomuto vlastnímu vektoru a vlastnímu číslu je

$$x_2(t) = (x_{21}(t), x_{22}(t), x_{23}(t)) = (1, 0, 1)^T \cdot e^{2t}.$$

Přejděme k nalezení posledního vlastního vektoru $v_3 = (v_{31}, v_{32}, v_{33})^T$, odpovídajícího vlastnímu číslu $\lambda_3 = -2$. Je to libovolný nenulový vektor, splňující vztah

$$(A - \lambda_3 E)v_3 = o.$$

Jeho rozepsáním dostáváme soustavu

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \cdot v_3 = o.$$

Přičtením dvojnásobku druhého řádku k prvním dostáváme třetí řádek matice soustavy. Soustavu lze tedy redukovat na tvar

$$\begin{array}{rcl} 3v_{31} & - & v_{32} + v_{33} = 0, \\ -v_{31} & + & v_{32} + v_{33} = 0 \end{array}$$

a jedno nenulové řešení je například $v_3 = (-1, -2, 1)^T$. Řešení soustavy (4.40) odpovídající tomuto vlastnímu vektoru a vlastnímu číslu je

$$x_3(t) = (x_{31}(t), x_{32}(t), x_{33}(t)) = (-1, -2, 1)^T \cdot e^{-2t}.$$

Fundamentální systém řešení soustavy (4.40) je tvořen trojicí lineárně nezávislých řešení

$$(-1, 1, 1)^T \cdot e^t, (1, 0, 1)^T \cdot e^{2t} \text{ a } (-1, -2, 1)^T \cdot e^{-2t}$$

a její obecné řešení $x(t)$ je dáno lineární kombinací

$$\begin{aligned} x(t) &= C_1(-1, 1, 1)^T \cdot e^t + C_2(1, 0, 1)^T \cdot e^{2t} + C_3(-1, -2, 1)^T \cdot e^{-2t} = \\ & C_1 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot e^t + C_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot e^{2t} + C_3 \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot e^{-2t} \end{aligned}$$

s libovolnými konstantami C_1 , C_2 a C_3 . Na závěr ještě rozepíšme poslední vztah po složkách. Protože $x(t) = (x_1(t), x_2(t), x_3(t))^T$, máme

$$\begin{aligned} x_1(t) &= -C_1 e^t + C_2 e^{2t} - C_3 e^{-2t}, \\ x_2(t) &= C_1 e^t - 2C_3 e^{-2t}, \\ x_3(t) &= C_1 e^t + C_2 e^{2t} + C_3 e^{-2t}. \end{aligned} \quad (4.41)$$

Příklad 4.16. Nalezněte řešení soustavy rovnic (4.40) splňující podmínku

$$x(0) = (1, 0, -1)^T. \quad (4.42)$$

Řešení. Obecné řešení této soustavy již bylo nalezeno v příkladu 4.15. Nyní je potřeba vybrat konstanty C_1 , C_2 a C_3 tak, aby platil vztah

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = C_1 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + C_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + C_3 \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Zapišme poslední soustavu ve tvaru

$$\begin{aligned} -C_1 + C_2 - C_3 &= 1, \\ C_1 - 2C_3 &= 0, \\ C_1 + C_2 + C_3 &= -1. \end{aligned}$$

Jediné řešení této soustavy je

$$C_1 = -\frac{2}{3}, \quad C_2 = 0, \quad C_3 = -\frac{1}{3}.$$

Po dosazení těchto hodnot například do vztahů (4.41) dostáváme jediné řešení splňující podmínku (4.42):

$$\begin{aligned} x_1(t) &= \frac{2}{3}e^t + \frac{1}{3}e^{-2t}, \\ x_2(t) &= -\frac{2}{3}e^t + \frac{4}{3}e^{-2t}, \\ x_3(t) &= -\frac{2}{3}e^t - \frac{1}{3}e^{-2t}. \end{aligned}$$

Příklad 4.17. Určete obecné řešení soustavy rovnic:

$$\begin{aligned} x_1' &= 2x_1 + x_2 + x_3, \\ x_2' &= -2x_1 - x_2 - 2x_3, \\ x_3' &= x_1 + x_2 + 2x_3. \end{aligned} \quad (4.43)$$

Řešení. Soustava (4.26) je speciálním případem soustavy (4.1) pro $n = 3$ a matici

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -2 & -1 & -2 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Nalezneme vlastní čísla matice A jako řešení charakteristické rovnice

$$\det(A - \lambda E) = 0$$

tj. rovnice

$$\begin{vmatrix} 2 - \lambda & 1 & 1 \\ -2 & -1 - \lambda & -2 \\ 1 & 1 & 2 - \lambda \end{vmatrix} = (\text{po úpravě}) = -(\lambda - 1)^3 = 0.$$

Vlastní číslo je jen jedno: $\lambda = \lambda_{1,2,3} = 1$ a je trojnásobné.

Hledejme odpovídající vlastní vektor

$$v_1 = (v_{11}, v_{12}, v_{13})^T.$$

Bude jím libovolný nenulový vektor, splňující vztah

$$(A - \lambda E)v_1 = o.$$

Jeho rozepsáním dostáváme soustavu

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -2 & -2 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot v_1 = o. \quad (4.44)$$

Snadno lze ověřit, že matice soustavy (4.44) má hodnotu $h = 1$ a nulitu $\nu = 3 - 1 = 2$. Vlastnímu číslu tedy budou odpovídat dva lineárně nezávislé vlastní vektory. Jsou jimi například vektory $v_1^{1*} = (-1, 0, 1)^T$ a $v_1^{2*} = (0, 1, -1)^T$. Jeden z vlastních vektorů však musí být zobecněným vlastním vektorem hodnoty 2. Bude to takový vektor, pro který existuje netriviální řešení v_2 jedné ze soustav

$$(A - \lambda E)v_2 = v_1^{i*}, \quad i = 1, 2. \quad (4.45)$$

Snadno ověříme, že každá soustava (4.45) nemá řešení. Výběr vlastních vektorů v_1^{i*} , $i = 1, 2$ tedy neumožňuje najít nenulový vektor v_2 , přestože dle teoretických poznatků takový vektor musí (je-li pravá strana vhodně zvolena) existovat.

Pokusme se vybrat pravou stranu v soustavě (4.45) tak, aby nenulový vektor v_2 existoval. Libovolná lineární kombinace

$$\alpha v_1^{1*} + \beta v_1^{2*}$$

je opět vlastním vektorem (který je pro $\alpha^2 + \beta^2 \neq 0$ nenulový). Jinými slovy - tato lineární kombinace je obecným řešením soustavy (4.44). Pokusme se určit parametry α a β tak, aby soustava

$$(A - \lambda E)v_2 = \alpha v_1^{1*} + \beta v_1^{2*} \quad (4.46)$$

měla nenulové řešení. Aplikací Frobeniovy věty (hodnota matice soustavy se rovná hodnotě matice rozšířené) ihned dospíváme k požadavku $\alpha = \beta/2$. Volme například $\beta = 2$, $\alpha = 1$ a místo původní dvojice vlastních vektorů v_1^{i*} , $i = 1, 2$ definujme novou dvojici

$$v_1^1 = v_1^{1*}, \quad v_1^2 = v_1^{1*} + 2v_1^{2*} = (-1, 2, -1)^T.$$

Soustava

$$(A - \lambda E)v_2 = v_1^2 \quad (4.47)$$

má netriviální řešení $v_2 = (-1, 1, -1)$. Fundamentální systém řešení soustavy (4.26) je tvořen trojicí vektorů

$$\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot e^t, \quad \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \cdot e^t, \quad \left[\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} t \right] \cdot e^t.$$

Obecné řešení je dáno lineární kombinací

$$\begin{aligned} x_1(t) &= -(C_1 + C_2 + C_3) \cdot e^t - C_3 t \cdot e^t, \\ x_2(t) &= (2C_2 + C_3) \cdot e^t + 2C_3 t \cdot e^t, \\ x_3(t) &= (C_1 - C_2 - C_3) \cdot e^t - C_3 t \cdot e^t. \end{aligned}$$

s libovolnými konstantami C_1, C_2 a C_3 .

Cvičení

1. Metodou vlastních vektorů najděte řešení systému

a)

$$\begin{aligned} y_1' &= 3y_1 + 8y_2, \\ y_2' &= -y_1 - 3y_2 \end{aligned} \quad \text{splňující podmínku } y_1(0) = 6, y_2(0) = -2.$$

b)

$$\begin{aligned} y_1' &= -2y_1 + y_2 - 2y_3, \\ y_2' &= y_1 - 2y_2 + 2y_3, \\ y_3' &= y_1 - y_2 + y_3. \end{aligned}$$

c)

$$\begin{aligned} y_1' &= y_1 - 2y_3 + 2y_4, \\ y_2' &= -y_1 + y_2 + y_3 - 2y_4, \\ y_3' &= 2y_2 + 2y_3 - 3y_4, \\ y_4' &= -y_1 + 2y_2 + 2y_3 - 3y_4. \end{aligned}$$

2. Weyrovou metodou najděte řešení systému

a)

$$\begin{aligned} y_1' &= 3y_1 + 4y_2, \\ y_2' &= -2y_1 - 3y_2 \end{aligned} \quad \text{splňující podmínku } y_1(0) = 3, y_2(0) = -2.$$

b)

$$\begin{aligned} y_1' &= -2y_1 + 3y_2 - 6y_3, \\ y_2' &= y_1/3 - 2y_2 + 2y_3, \\ y_3' &= y_1/3 - y_2 + y_3. \end{aligned}$$

c)

$$\begin{aligned} y_1' &= -y_2 + y_3, \\ y_2' &= -2y_1 + y_2 + y_3 - y_4, \\ y_3' &= 2y_1 - y_2 - y_3 + y_4, \\ y_4' &= 2y_2 - 2y_3. \end{aligned}$$

Výsledky

1. a) Hledané řešení má tvar
$$\begin{aligned} y_1(t) &= 4e^t + 2e^{-t}, \\ y_2(t) &= -e^t - e^{-t}. \end{aligned}$$

b) Obecné řešení systému má tvar

$$\begin{aligned} y_1(t) &= [K_1(1-t) + K_2t - 2K_3]e^{-t}, \\ y_2(t) &= [K_1t + K_2(1-t) + 2K_3]e^{-t}, \\ y_3(t) &= [K_1t - K_2t + K_3(1+2t)]e^{-t}. \end{aligned}$$

c) Řešení má tvar
$$\begin{aligned} y_1(t) &= (K_1 + K_2 + 2K_4) \sin t + (-K_1 + K_2 + 2K_3) \cos t, \\ y_2(t) &= -(K_2 + K_3) \sin t + (K_1 + K_4) \cos t, \\ y_3(t) &= (K_3 + K_4) \sin t + (K_3 - K_4) \cos t, \\ y_4(t) &= -K_2 \sin t + K_1 \cos t. \end{aligned}$$

2. a) Hledané řešení má tvar
$$\begin{aligned} y_1(t) &= 2e^t + e^{-t}, \\ y_2(t) &= -e^t - e^{-t}. \end{aligned}$$

b) Obecné řešení systému má tvar
$$\begin{aligned} y_1(t) &= 3[K_1(1-t) + K_2t - 2K_3]e^{-t}, \\ y_2(t) &= [K_1t + K_2(1-t) + 2K_3]e^{-t}, \\ y_3(t) &= [K_1t - K_2t + K_3(1+2t)]e^{-t}. \end{aligned}$$

c) Řešení má tvar
$$\begin{aligned} y_1(t) &= K_1(1+2t^2) + 2K_2t + K_3 + K_4, \\ y_2(t) &= -2K_1t - K_2 + K_4, \\ y_3(t) &= 2K_1t + K_2 + K_4, \\ y_4(t) &= -4K_1t^2 - 4K_2t - 2K_3. \end{aligned}$$

Maplety

Kliknutím na následující odkazy si lze pomocí mapletů procvičit tato témata:

1. [Nalezení vlastních čísel a vektorů konstantní matice.](#)
2. [Nalezení řešení systému lineárních diferenciálních rovnic 1. řádu s konstantní maticí pomocí vlastních čísel a zobecněných vlastních vektorů.](#)

5 Užití mocninných řad pro rovnice druhého řádu

5.1 Cíl kapitoly

Cílem této kapitoly je seznámit čtenáře se speciálním typem diferenciální rovnice druhého řádu, Besselovou rovnicí. Ukážeme, že řešení této rovnice se hledá pomocí nekonečné řady. Zmíníme se o tzv. gama funkci, která se v řešení Besselovy rovnice objevuje. Popíšeme Besselovy funkce, pomocí nichž je řešení Besselovy rovnice popsáno.

5.2 Funkce gama

Na tomto místě se budeme chvíli věnovat tzv. funkci gama, kterou využijeme při řešení Besselovy rovnice. Pokud je vám tato funkce důvěrně známa, můžete následující odstavec přeskochit.

Funkce gama se definuje jako

$$\Gamma(x) = \int_0^{\infty} t^{x-1} e^{-t} dt. \quad (5.1)$$

Funkce $\Gamma(x)$ je tímto integrálem definována pro $x > 0$ (pro $x \leq 0$ integrál diverguje) a je pro $x > 0$ spojitá.

Pomocí integrace per partes můžeme ukázat (odvážněji nechť se o to sami pokusí), že

$$\Gamma(x+1) = x\Gamma(x). \quad (5.2)$$

Pro $x = 1$ máme

$$\Gamma(1) = \int_0^{\infty} e^{-t} dt = 1,$$

takže podle (5.2) je

$$\Gamma(2) = 1 \cdot \Gamma(1) = 1, \quad \Gamma(3) = 2 \cdot \Gamma(2) = 2 \cdot 1, \quad \Gamma(4) = 3 \cdot \Gamma(3) = 3 \cdot 2 \cdot 1, \quad \text{atd.}$$

Vidíme, že pro celá kladná čísla n platí

$$\Gamma(n+1) = n! \quad (5.3)$$

Funkce gama je tedy jakýmsi zobecněním faktoriálu.

5.3 Besselova rovnice

Při popisu mnohých fyzikálních jevů hraje důležitou roli diferenciální rovnice

$$x^2 y'' + xy' + (x^2 - \nu^2)y = 0. \quad (5.4)$$

Tato rovnice se nazývá **Besselova**. Budeme předpokládat, že $\nu \geq 0$. Řešení vyjádříme pomocí mocninné řady se středem v 0. Bod $x = 0$ je tzv. regulárním singulárním bodem Besselovy rovnice.

5.3.1 Konstrukce řešení ve tvaru řady

Řešení Besselovy rovnice můžeme hledat ve tvaru

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^{n+r}, \quad (5.5)$$

nebo (vytkneme-li výraz x^r) ve tvaru

$$y = x^r \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n,$$

kde koeficienty řady c_n a číslo r určíme v průběhu výpočtů.

5.3.2 Výpočet koeficientů řady

Abychom řadu (5.5) mohli dosadit do rovnice (5.4), potřebujeme její první a druhou derivaci:

$$\begin{aligned} y' &= \sum_{n=0}^{\infty} c_n (n+r) x^{n+r-1} \\ y'' &= \sum_{n=0}^{\infty} c_n (n+r)(n+r-1) x^{n+r-2}. \end{aligned}$$

Nyní vše dosadíme do rovnice (5.4). Upozorňujeme, že úpravy budou dlouhé a budou vyžadovat vaši pozornost a trpělivost.

$$\begin{aligned} &x^2 y'' + xy' + (x^2 - \nu^2)y = \\ &= x^2 \sum_{n=0}^{\infty} c_n (n+r)(n+r-1) x^{n+r-2} + x \sum_{n=0}^{\infty} c_n (n+r) x^{n+r-1} + (x^2 - \nu^2) \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^{n+r} = *. \end{aligned}$$

x^2 a x před sumami zahrneme dovnitř sum, $(x^2 - \nu^2) \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^{n+r}$ roznásobíme:

$$* = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (n+r)(n+r-1) x^{n+r} + \sum_{n=0}^{\infty} c_n (n+r) x^{n+r} + \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^{n+r+2} - \nu^2 \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^{n+r} = *$$

Člen obsahující x^r (vyskytuje se pro $n = 0$ ve všech sumách kromě třetí) oddělíme; tím se v některých sumách začne sčítat až od 1. Ze všech sum vytkneme x^r :

$$\begin{aligned} * = c_0(r(r-1) + r - \nu^2)x^r + x^r \sum_{n=1}^{\infty} c_n(n+r)(n+r-1)x^n + x^r \sum_{n=1}^{\infty} c_n(n+r)x^n + \\ + x^r \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^{n+2} - x^r \nu^2 \sum_{n=1}^{\infty} c_n x^n = * \end{aligned}$$

Zjednodušíme koeficient u x^r a sloučíme sumy, u kterých to bez potíží lze:

$$* = c_0(r^2 - \nu^2)x^r + x^r \sum_{n=1}^{\infty} c_n((n+r)(n+r-1) + (n+r) - \nu^2)x^n + x^r \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^{n+2}.$$

Ještě zjednodušíme výraz v první sumě a dostáváme:

$$x^2 y'' + xy' + (x^2 - \nu^2)y = c_0(r^2 - \nu^2)x^r + x^r \sum_{n=1}^{\infty} c_n((n+r)^2 - \nu^2)x^n + x^r \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^{n+2}. \quad (5.6)$$

Z tzv. **charakteristické rovnice**

$$r^2 - \nu^2 = 0$$

určíme hodnotu čísla r . Vidíme, že kořeny charakteristické rovnice jsou $r_1 = \nu$ a $r_2 = -\nu$.

Pro $r = \nu$ z (5.6) zbude

$$x^2 y'' + xy' + (x^2 - \nu^2)y = x^\nu \sum_{n=1}^{\infty} c_n n(n+2\nu)x^n + x^\nu \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^{n+2}.$$

Výraz na pravé straně budeme dále upravovat. Abychom mohli obě sumy sloučit do jedné, posuneme v první z nich sumační index o dvě – zavedeme nový sumační index $k = n - 2$. Sumální index ve druhé sumě přeznačíme z n na k . Z první sumy pak dáme stranou to, co oproti druhé sumě „přechuje“, což nám umožní převést konečně všechno na jednu sumu.

$$\begin{aligned} x^\nu \sum_{k=-1}^{\infty} c_{k+2}(k+2)(k+2+2\nu)x^{k+2} + x^\nu \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^{k+2} = \\ = x^\nu \left(c_1(1+2\nu)x + \sum_{k=0}^{\infty} c_{k+2}(k+2)(k+2+2\nu)x^{k+2} + \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^{k+2} \right) = \\ = x^\nu \left(c_1(1+2\nu)x + \sum_{k=0}^{\infty} [(k+2)(k+2+2\nu)c_{k+2} + c_k]x^{k+2} \right) = 0. \end{aligned}$$

Jestli vás nějak překvapilo to „= 0“ na konci, možná jste v zápalu boje se sumami pozapomněli, že dosazujeme do rovnice (5.4). S velkou námahou jsme upravili levou stranu rovnice, a teď chceme, aby se rovnala straně pravé.

Aby byla uvedená rovnost splněna pro každé x , musí platit

$$\begin{aligned} (1 + 2\nu)c_1 &= 0 \\ (k + 2)(k + 2 + 2\nu)c_{k+2} + c_k &= 0 \quad k = 0, 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (5.7)$$

neboli

$$c_{k+2} = \frac{-c_k}{(k + 2)(k + 2 + 2\nu)}, \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (5.8)$$

Protože podle (5.7) je $c_1 = 0$, postupným dosazováním do (5.8) pro $k = 1, 3, 5, \dots$ dostaneme $c_3 = c_5 = c_7 = \dots = 0$. Všechny liché členy řady jsou tedy nulové a zbývá nám prozkoumat sudé členy řady.

Označíme $k + 2 = 2n$. Indexům $k = 0, 2, 4, \dots$ teď odpovídá $n = 1, 2, 3, \dots$. Vztah (5.8) můžeme (po vcelku jednoduché úpravě jmenovatele zlomku) zapsat jako

$$c_{2n} = \frac{-c_{2n-2}}{2^2 n(n + \nu)}, \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (5.9)$$

$$\begin{aligned} \text{Tedy } c_2 &= -\frac{c_0}{2^2 \cdot 1 \cdot (1 + \nu)}, \\ c_4 &= -\frac{c_2}{2^2 \cdot 2 \cdot (2 + \nu)} = \frac{c_0}{2^4 \cdot 1 \cdot 2(1 + \nu)(2 + \nu)}, \\ c_6 &= -\frac{c_4}{2^2 \cdot 3 \cdot (3 + \nu)} = -\frac{c_0}{2^6 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3(1 + \nu)(2 + \nu)(3 + \nu)}, \\ &\vdots \\ c_{2n} &= \frac{(-1)^n c_0}{2^{2n} n!(1 + \nu)(2 + \nu) \cdots (n + \nu)}, \quad n = 1, 2, 3, \dots \end{aligned} \quad (5.10)$$

Konstantu c_0 bychom mohli zvolit libovolně, ale standardně se volí (ach, to se vám asi nebude líbit...)

$$c_0 = \frac{1}{2^\nu \Gamma(1 + \nu)}.$$

5.4 Besselovy funkce

Teď, když už víme, co se skrývá pod zápisem $\Gamma(1 + \nu)$, můžeme se vrátit k Besselově rovnici. Pokud zvolíme c_0 výše uvedeným způsobem, dostaneme využitím vztahu (5.2) pro další koeficienty:

$$\begin{aligned} c_2 &= -\frac{1}{2^{2+\nu} \cdot 1 \cdot (1 + \nu)\Gamma(1 + \nu)} = -\frac{1}{2^{2+\nu} \cdot 1 \cdot \Gamma(2 + \nu)}, \\ c_4 &= \frac{1}{2^{4+\nu} \cdot 2! \cdot (2 + \nu)(1 + \nu)\Gamma(1 + \nu)} = \frac{1}{2^{4+\nu} \cdot 2! \cdot \Gamma(3 + \nu)}, \\ &\vdots \end{aligned}$$

a obecně, pro $n = 0, 1, 2, \dots$,

$$c_{2n} = \frac{(-1)^n}{2^{2n+\nu} \cdot n! \cdot (n+\nu) \cdots (2+\nu)(1+\nu)\Gamma(1+\nu)} = \frac{(-1)^n}{2^{2n+\nu} \cdot n! \cdot \Gamma(1+\nu+n)}.$$

Jedno řešení Besselovy rovnice je tedy

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} c_{2n} x^{2n+\nu} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n! \Gamma(1+\nu+n)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2n+\nu}.$$

Pro $\nu \geq 0$ tato řada konverguje alespoň na intervalu $\langle 0, \infty \rangle$.

Funkce popisující právě získané řešení se obvykle značí $J_\nu(x)$:

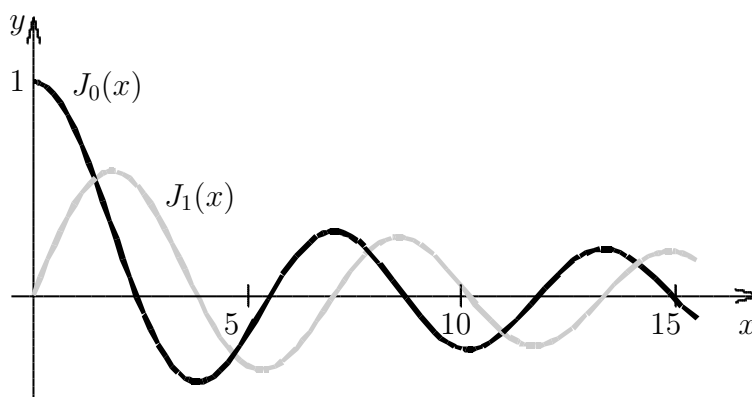
$$J_\nu(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n! \Gamma(1+\nu+n)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2n+\nu}. \quad (5.11)$$

Pro druhý kořen charakteristické rovnice rovnice, $r_2 = -\nu$, zcela analogicky dostaneme

$$J_{-\nu}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n! \Gamma(1-\nu+n)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2n-\nu}. \quad (5.12)$$

Funkce $J_\nu(x)$ a $J_{-\nu}(x)$ se nazývají **Besselovy funkce prvního druhu** řádu ν , resp. $-\nu$.

Na obrázku 5.1 jsou grafy funkcí $y = J_0(x)$ a $y = J_1(x)$.



Obr. 5.1: Besselovy funkce prvního druhu řádu 0 a 1

Dá se ukázat, že jestliže ν není celé číslo, funkce $J_\nu(x)$ a $J_{-\nu}(x)$ jsou lineárně nezávislé. V tomto případě je obecné řešení rovnice (5.4) na intervalu $(0, \infty)$

$$y = c_1 J_\nu(x) + c_2 J_{-\nu}(x). \quad (5.13)$$

Příklad 5.1. Najděte obecné řešení rovnice

$$x^2 y'' + x y' + \left(x^2 - \frac{1}{4}\right) y = 0$$

na intervalu $(0, \infty)$.

Řešení. V našem případě je $\nu^2 = 1/4$, a tedy $\nu = 1/2$. Vidíme, že ν není celé číslo, a tedy obecné řešení zadané rovnice je

$$\underline{\underline{y = c_1 J_{1/2}(x) + c_2 J_{-1/2}(x)}}.$$

□

5.5 Shrnutí kapitoly

V této kapitole jsme se seznámili s Besselovou rovnicí, která je speciálním typem diferenciální rovnice druhého řádu. Řešení této rovnice bylo nalezeno pomocí nekonečné řady. Funkce, kterými je toto řešení popsáno, se nazývají Besselovy funkce.

Cvičení

1. Najděte obecné řešení rovnice

a) $x^2 y'' + xy' + (x^2 - \frac{1}{9})y = 0$.

b) $4x^2 y'' + 4xy' + (4x^2 - 25)y = 0$.

Výsledky

1. a) $y = c_1 J_{1/3}(x) + c_2 J_{-1/3}(x)$.

b) $y = c_1 J_{5/2}(x) + c_2 J_{-5/2}(x)$.

6 Stabilita řešení systémů diferenciálních rovnic

Uvažujme systém diferenciálních rovnic ve vektorovém tvaru

$$x' = f(t, x) \quad (6.1)$$

Daný konkrétní systém (6.1) může být matematickým modelem celé řady různých mechanických, elektrotechnických, biologických a jiných systémů. Chování těchto systémů je pak popsáno vlastním řešením systému (6.1), který může mít obecně nekonečně mnoho řešení, odpovídajících různým volbám jeho počátečního stavu.

U většiny systémů požadujeme, aby jejich chování bylo v nějakém smyslu blízké jednomu předem danému chování systému (např. setrvání v klidu, v periodickém pohybu, apod.).

Předpokládejme, že (6.1) je matematickým modelem nějakého fyzikálního systému S , jehož jeden pracovní režim je popsán daným řešením v systému (6.1). To znamená, že pro každé t udává vektor $v(t)$ hodnoty stavových proměnných v okamžiku t . V počátečním okamžiku t_0 nabývají stavové proměnné systému S hodnotu $v(t_0)$.

V praxi však tyto počáteční hodnoty stavových proměnných systému S získáme zpravidla měřením a takto naměřené hodnoty x_0 jsou pouze aproximacemi skutečných hodnot $v(t_0)$. Spojitá závislost řešení na počáteční hodnotě zaručuje, že chyba, které se dopustíme při měření počátečních hodnot, nezkrusí podstatně informaci o charakteru vyšetřovaného řešení na konečném časovém intervalu.

Přesněji, ke každému předem danému intervalu $\langle t_0, t_1 \rangle$ a ke každému číslu $\varepsilon > 0$ existuje číslo $\delta = \delta(\varepsilon, t_0, t_1) > 0$ tak, že když naměřené počáteční hodnoty x_0 stavových proměnných x se budou v okamžiku t_0 lišit od skutečných počátečních hodnot $v(t_0)$ o méně než δ , budou se vypočtené hodnoty $u(t, t_0, x_0)$ stavových proměnných v okamžiku t lišit od skutečných hodnot stavových proměnných $v(t) \forall t \in \langle t_0, t_1 \rangle$ o méně než ε .

Velikou závadou tohoto odhadu je závislost odchylky δ počátečních hodnot na délce časového intervalu $\langle t_0, t_1 \rangle$. Se zvětšováním délky intervalu jsme zpravidla nuceni zmenšovat číslo δ .

Z fyzikálních a technických důvodů je přirozené požadovat, aby číslo δ bylo dostatečně velké i pro libovolně velké délky časových intervalů $t_1 - t_0$. Proto se studuje taková závislost řešení na počátečních údajích t_0, x_0 , ve které odchylka δ závisí pouze na počátečním

okamžiku t_0 a přípustné odchylce řešení ε a nezávisí na délce časového intervalu $t_1 - t_0$. Studium takové závislosti představuje náplň teorie stability.

Uveďme ještě jeden pohled na problematiku stability.

Předpokládejme, že na fyzikální systém S , popsany přibližně systémem (6.1), působí nějaké poruchy vyvolané zásahy, které nejsme schopni do modelu zahrnout a při sestavování rovnic (6.1) je zanedbáváme. Kdybychom je totiž chtěli respektovat, pak bychom museli v každém okamžiku, ve kterém poruchy působí, provádět na našem modelu korekci např. v nastavení okamžitých hodnot stavových proměnných. To je velmi obtížně realizovatelné, a proto je vhodnější tyto poruchy zanedbat a určit, jak velké chyby se tímto zjednodušením dopouštíme. To je opět problematika, která spadá do rámce teorie stability.

V následujícím textu se budeme zabývat studiem různých typů stability řešení systému (6.1) a budeme předpokládat, že $f(t, o) = o$, takže $x' = f(t, x)$ má **triviální řešení**, které budeme značit o .

Nejdříve ukážeme, že omezení našich úvah na studium stability triviálního řešení o nikterak nezmenšuje obecnost dalších úvah a přitom značně zjednodušuje symboliku i formulace.

Předpokládejme, že chceme vyšetřovat řešení v systému

$$\mathbf{y}' = \mathbf{g}(t, \mathbf{y}) \quad (6.2)$$

definované na nějakém intervalu I . Provedme v systému (6.2) substituci

$$\mathbf{y} = x + v. \quad (6.3)$$

Jelikož funkce v je řešením systému (6.2), platí

$$v'(t) = \mathbf{g}(t, v(t)) \quad \forall t \in I,$$

a tedy

$$x' = \mathbf{y}' - v' = \mathbf{g}(t, \mathbf{y}) - \mathbf{g}(t, v) = \mathbf{g}(t, x + v) - \mathbf{g}(t, v) \quad (6.4)$$

Označíme-li

$$f(t, x) = \mathbf{g}(t, x + v) - \mathbf{g}(t, v),$$

dostaneme z (6.4) systém

$$x' = f(t, x), \quad f(t, o) = o, \quad (6.5)$$

takže systém (6.5) má triviální řešení o . Na toto triviální řešení se transformací (6.3) zobrazuje řešení v systému (6.2). Vyšetříme-li vlastnosti triviálního řešení o systému (6.5), pak pomocí transformace (6.3) můžeme výsledky přenést na řešení v systému (6.2).

Předpokládejme v následujícím, že existuje interval $I = (\alpha, \infty)$, $\alpha \in \mathbb{R}$ a oblast $H \subset \mathbb{R}^n$ obsahující počátek tak, že zobrazení f je spojitě na oblasti $G = I \times H$ a pro každý bod $(t_0, x_0) \in G$ je Cauchyova úloha

$$x' = f(t, x), \quad x(t_0) = x_0, \quad (6.6)$$

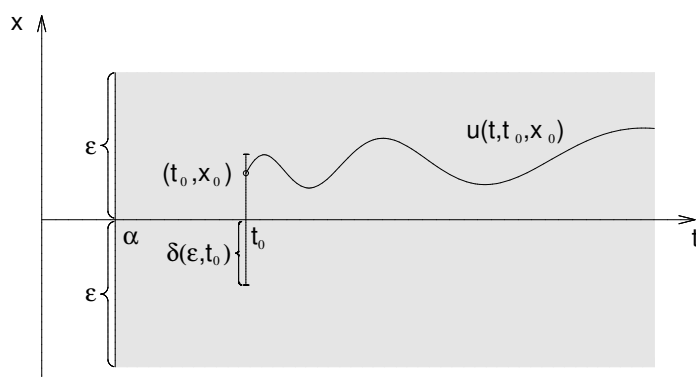
jednoznačně řešitelná a nechť $f(t, o) = o \quad \forall t > \alpha$.

Definice 6.1. Řekneme, že triviální řešení o systému

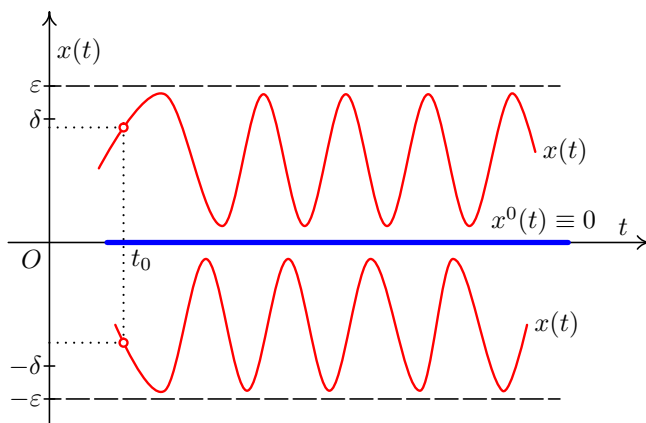
$$x' = f(t, x) \quad (6.7)$$

je **stabilní** (viz obrázky 6.1, 6.2), jestliže ke každému $t_0 > \alpha$ a každému $\varepsilon > 0$ existuje $\delta = \delta(t_0, \varepsilon)$ tak, že pro všechny počáteční hodnoty $x_0 \in H$, $\|x_0\| < \delta$ a pro všechna $t \geq t_0$ platí, že řešení $u(t, t_0, x_0)$ Cauchyovy úlohy (6.6) splňuje nerovnost

$$\|u(t, t_0, x_0)\| < \varepsilon. \quad (6.8)$$



Obr. 6.1: Triviální řešení je stabilní.



Obr. 6.2: Triviální řešení je stabilní.

Příklad 6.2. Ukažte, že triviální řešení rovnice

$$x' = kx$$

je stabilní pro každé $k \leq 0$.

Řešení. Funkce $f(t, x) = kx$ je spojitá a lipschitzovská vzhledem k proměnné x pro všechna $(t, x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$. Můžeme tedy volit $\alpha = -\infty, I = (-\infty, \infty), H = \mathbb{R}, G = I \times \mathbb{R}$. Cauchyova úloha

$$x' = kx, \quad x(t_0) = x_0$$

má řešení $u(t, t_0, x_0) = x_0 e^{k(t-t_0)}, t \in I$.

$$\text{Tedy } |u(t, t_0, x_0)| = |x_0| \cdot e^{k(t-t_0)} \leq |x_0| \quad \text{pro všechna } k \leq 0, t \geq t_0.$$

Zvolíme-li $\delta = \varepsilon$, bude podle (6.8) platit

$$|u(t, t_0, x_0)| < \varepsilon \quad \text{pro všechna } t \geq t_0, k \leq 0, |x_0| < \delta.$$

Tedy triviální řešení je stabilní. □

Příklad 6.3. Ukažte, že triviální řešení systému

$$\begin{aligned} x_1' &= x_2 \\ x_2' &= -x_1 \end{aligned} \tag{6.9}$$

je stabilní.

Řešení. Cauchyova úloha pro systém (6.9) s počáteční podmínkou $x_1(t_0) = x_{01}, x_2(t_0) = x_{02}$ má pro každé $t_0 \in \mathbb{R}$ a $x_0 = (x_{01}, x_{02}) \in \mathbb{R}^2$ řešení

$$u(t, t_0, x_0) = \begin{pmatrix} x_{01} \cos(t - t_0) + x_{02} \sin(t - t_0) \\ -x_{01} \sin(t - t_0) + x_{02} \cos(t - t_0) \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Pro normu řešení dostáváme odhad

$$\begin{aligned} \|u(t, t_0, x_0)\| &= |x_{01} \cos(t - t_0) + x_{02} \sin(t - t_0)| + | -x_{01} \sin(t - t_0) + x_{02} \cos(t - t_0) | \leq \\ &\leq |x_{01}| + |x_{02}| + |x_{01}| + |x_{02}| = 2(|x_{01}| + |x_{02}|) = 2\|x_0\|. \end{aligned}$$

Položíme-li $\delta = \frac{\varepsilon}{2}$, dostaneme

$$\|u(t, t_0, x_0)\| \leq 2\|x_0\| < 2\delta = \varepsilon \quad \text{pro všechna } t \geq t_0.$$

Tedy triviální řešení je stabilní. □

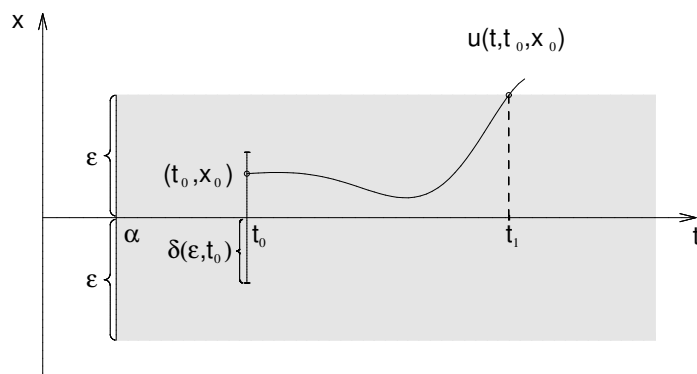
Triviální řešení, které není stabilní, nazveme **nestabilním**.

Volně můžeme říci, že triviální řešení systému (6.7) je nestabilní právě tehdy, existuje-li okamžik t_0 a číslo $\varepsilon > 0$ tak, že v každém libovolně malém okolí počátku existuje bod x_0 tak, že řešení $u(t, t_0, x_0)$ se vzdálí od triviálního řešení o více než ε , neboli existuje $t_1 > t_0$ tak, že $\|u(t, t_0, x_0)\| > \varepsilon$ pro $t > t_1$ (viz obrázky 6.3), 6.4.

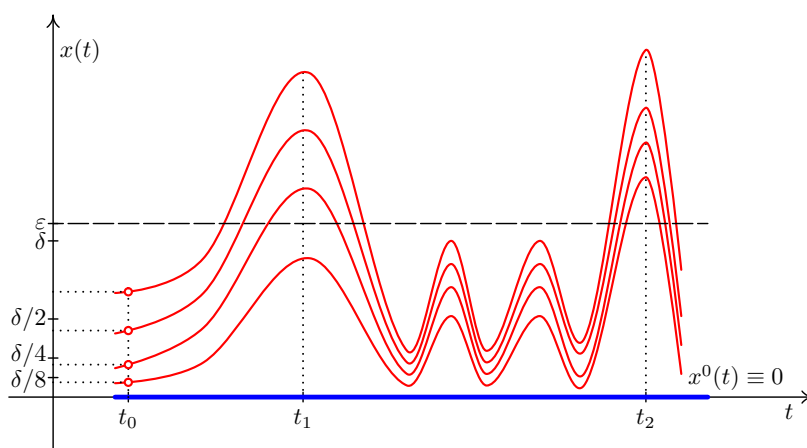
Příklad 6.4. Ukažte, že triviální řešení systému

$$\begin{aligned} x_1' &= x_2 \\ x_2' &= x_1 \end{aligned} \tag{6.10}$$

je nestabilní.



Obr. 6.3: Triviální řešení není stabilní.



Obr. 6.4: Triviální řešení není stabilní.

Řešení. Cauchyova úloha pro systém (6.10) s počáteční podmínkou $x_1(t_0) = x_{01}, x_2(t_0) = x_{02}$ má řešení

$$u(t, t_0, x_0) = \frac{1}{2} \left((x_{01} + x_{02})e^{t-t_0} + (x_{01} - x_{02})e^{-(t-t_0)} \right), (x_{01} + x_{02})e^{t-t_0} - (x_{01} - x_{02})e^{-(t-t_0)}$$

Zvolme $\varepsilon = 1, t_0 = 0$, pak pro libovolné $\delta > 0$ můžeme volit $x_0 = \left(\frac{\delta}{2}, \frac{\delta}{2}\right)^T, t_1 > -\ln \frac{\delta}{2}$ a dostaneme odhad

$$\begin{aligned} \|u(t_1, t_0, x_0)\| &= \|u(t_1, 0, x_0)\| = \left\| \frac{1}{2} (\delta e^{t_1}, \delta e^{t_1}) \right\| = \\ &= \frac{1}{2} \delta e^{t_1} \cdot \|(1, 1)\| = \frac{1}{2} \delta e^{t_1} (|1| + |1|) = \delta e^{t_1} > \delta e^{-\ln \frac{\delta}{2}} = \delta \cdot \frac{2}{\delta} = 2 > \varepsilon. \end{aligned}$$

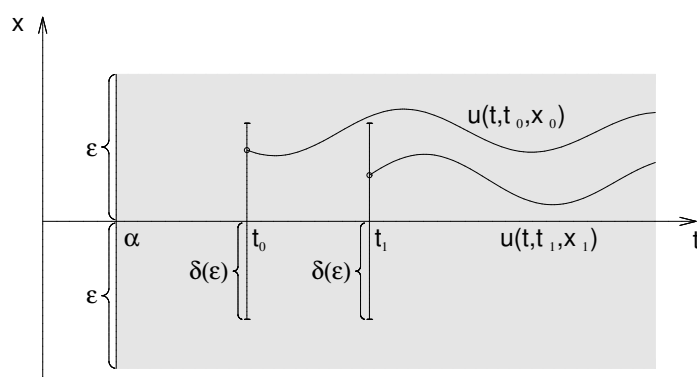
Triviální řešení systému (6.10) je nestabilní. □

Definice 6.5. Řekneme, že triviální řešení systému

$$x' = f(t, x)$$

je **stejněměrně stabilní** (viz obrázek 6.5), jestliže je stabilní a číslo δ v definici 6.1 nezávisí na volbě počátečního okamžiku t_0 , tj. když ke každému $\varepsilon > 0$ existuje $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ tak, že pro každé $x_0 \in H \subset \mathbb{R}^n$, $t, t_0 \in \mathbb{R}$, vyhovující nerovností $\|x_0\| < \delta$, $t \geq t_0 > \alpha$ platí

$$\|u(t, t_0, x_0)\| < \varepsilon.$$



Obr. 6.5: Triviální řešení je stejněměrně stabilní.

Všimneme-li si podrobněji příkladů 6.2, 6.3, 6.4, zjistíme, že triviální řešení ve všech případech jsou stejněměrně stabilní, neboť δ závisí pouze na ε a nikoli na t_0 . Tuto vlastnost mají všechny autonomní systémy, tj. systémy tvaru $x' = f(x)$. Platí, že když triviální řešení autonomního systému je stabilní, pak je stejněměrně stabilní. Pro neautonomní systémy to neplatí.

Příklad 6.6. Uvažujme Cauchyovu úlohu

$$\begin{aligned} x_1' &= -x_1 \\ x_2' &= (\sin \ln t + \cos \ln t - 1)x_2 \end{aligned}$$

s počáteční podmínkou $x_1(t_0) = x_{01}$, $x_2(t_0) = x_{02}$.

Pak pro každé $(t_0, x_0) \in I \times \mathbb{R}^2$, $I = (1, \infty)$, má úloha řešení

$$u(t, t_0, x_0) = (x_{01} e^{-t+t_0}, x_{02} e^{-t(1-\sin \ln t)+t_0(1-\sin \ln t_0)}), \quad t > 1.$$

Pro normu tohoto řešení dostáváme odhad

$$\begin{aligned} \|u(t, t_0, x_0)\| &= |x_{01} e^{-(t-t_0)}| + |x_{02} e^{-t(1-\sin \ln t)+t_0(1-\sin \ln t_0)}| \leq \\ &\leq |x_{01}| + |x_{02}| e^{2t_0} \leq (|x_{01}| + |x_{02}|) e^{2t_0} = \|x_0\| e^{2t_0} \quad \text{pro všechna } t \geq t_0. \end{aligned}$$

Vidíme, že v odhadu se vyskytuje jak počáteční hodnota x_0 , tak i počáteční okamžik t_0 . Zvolíme-li např. $\delta = \varepsilon e^{-2t_0}$, dostaneme

$$\|u(t, t_0, x_0)\| \leq \|x_0\| e^{2t_0} < \delta e^{2t_0} = \varepsilon e^{-2t_0} \cdot e^{2t_0} = \varepsilon.$$

Je tedy triviální řešení stabilní, nikoli však stejněměrně stabilní.

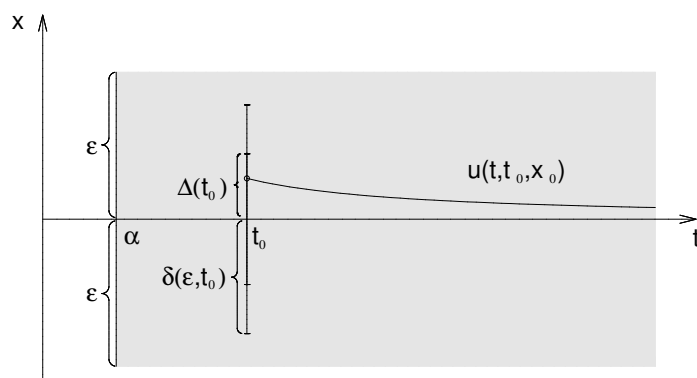
Definice 6.7. Řekneme, že triviální řešení systému

$$x' = f(t, x)$$

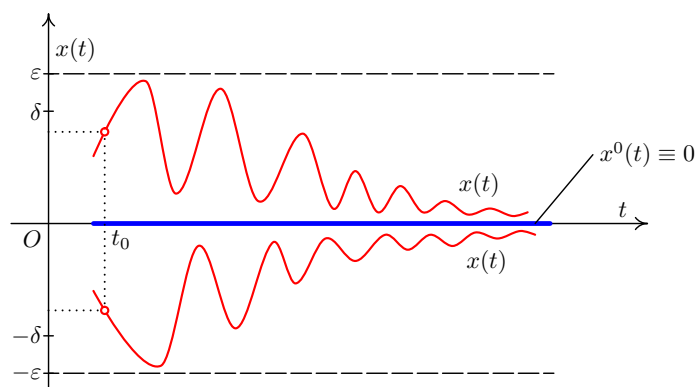
je **asymptoticky stabilní** (viz obrázky 6.6, 6.7), jestliže

- i) je stabilní
- ii) existuje číslo $\Delta > 0$ tak, že pro každé $x_0 \in H \subset \mathbb{R}^n$, $\|x_0\| < \Delta$ a každé $t_0 > \alpha$ platí

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|u(t, t_0, x_0)\| = 0.$$



Obr. 6.6: Triviální řešení je asymptoticky stabilní.



Obr. 6.7: Triviální řešení je asymptoticky stabilní.

Analogickým způsobem definujeme **stejnou asymptotickou stabilitu** triviálního řešení systému $x' = f(t, x)$.

Podmínka ii) v definici 6.7 znamená, že ke každému $\varepsilon > 0$, $t_0 > \alpha$, $x_0 \in H \subset \mathbb{R}^n$, $\|x_0\| < \Delta$, existuje číslo $T = T(\varepsilon, t_0, x_0)$ tak, že pro všechna $t > t_0 + T$ je $\|u(t, t_0, x_0)\| < \varepsilon$.

Příklad 6.8. Ukažte, že triviální řešení systému

$$\begin{aligned}x_1' &= x_2 \\x_2' &= -x_1\end{aligned}$$

není asymptoticky stabilní.

Řešení. V příkladu 6.3 jsme ukázali, že triviální řešení je stabilní (dokonce je stejnoměrně stabilní). Musíme tedy ukázat, že není splněna podmínka ii) v definici 6.7. Řešením Cauchyovy úlohy

$$\begin{aligned}x_1' &= x_2 & x_1(t_0) &= x_{01} \\x_2' &= -x_1 & x_2(t_0) &= x_{02}\end{aligned}$$

je vektorová funkce

$$u(t, t_0, x_0) = (x_{01} \cos(t - t_0) + x_{02} \sin(t - t_0), -x_{01} \sin(t - t_0) + x_{02} \cos(t - t_0)), \quad t \in \mathbb{R}.$$

Pro normu tohoto řešení (použijeme euklidovskou normu) dostáváme

$$\begin{aligned}\|u(t, t_0, x_0)\| &= ((u_1(t, t_0, x_0))^2 + (u_2(t, t_0, x_0))^2)^{1/2} = \\&= (x_{01}^2 \cos^2(t - t_0) + 2x_{01}x_{02} \cos(t - t_0) \sin(t - t_0) + x_{02}^2 \sin^2(t - t_0) + \\&\quad + x_{01}^2 \sin^2(t - t_0) - 2x_{01}x_{02} \sin(t - t_0) \cos(t - t_0) + x_{02}^2 \cos^2(t - t_0))^{1/2} = \\&= (x_{01}^2 + x_{02}^2)^{1/2} = \|x_0\|,\end{aligned}$$

takže pro $\|x_0\| \neq 0$ platí

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|u(t, t_0, x_0)\| = \|x_0\| \neq 0.$$

Tedy triviální řešení není asymptoticky stabilní. □

Dá se dokázat, že při ověřování podmínek stability triviálního řešení stačí podmínky ověřit pro jedno libovolné $t_0 > \alpha$ a pak už musí platit pro všechna $t > \alpha$.

Stabilita lineárních systémů

Uvažujme nyní nehomogenní lineární systém diferenciálních rovnic

$$x' = A(t)x + b(t), \tag{6.11}$$

kde $A(t)$, $b(t)$ jsou spojité na intervalu $I = (\alpha, \infty) \subset \mathbb{R}$.

Pak libovolné řešení $u(t)$ systému (6.11) je stabilní, resp. asymptoticky stabilní, resp. nestabilní, právě když triviální řešení homogenního systému

$$x' = A(t)x$$

je stabilní, resp. asymptoticky stabilní, resp. nestabilní.

V lineárních systémech nastane tedy právě jeden z těchto případů:

I) Všechna řešení jsou stabilní.

II) Všechna řešení jsou asymptoticky stabilní.

III) Všechna řešení jsou nestabilní.

Proto v případě I) říkáme, že lineární systém je stabilní, v případě II) říkáme, že lineární systém je asymptoticky stabilní, a v případě III) říkáme, že lineární systém je nestabilní.

Při vyšetřování stability nehomogenního systému (6.11) se tedy stačí omezit na vyšetřování stability triviálního řešení systému

$$x' = A(t)x \quad (6.12)$$

Věta 6.9. *Triviální řešení systému (6.12) je stabilní právě tehdy, když existuje $K > 0$ tak, že*

$$\|U(t)\| \leq K, \quad t \in I,$$

kde $U(t)$ je fundamentální matice řešení systému (6.12).

(Tedy každé řešení systému je ohraničené.)

Odtud plyne, že je-li nehomogenní systém (6.11) stabilní, pak jsou buď všechna řešení ohraničená, nebo neohraničená pro $t \rightarrow \infty$.

Poznamenejme ještě, že u nelineárních systémů z ohraničenosti všech jeho řešení neplyne obecně jejich stabilita.

Věta 6.10. *Triviální řešení systému (6.12) je asymptoticky stabilní právě tehdy, když*

$$\|U(t)\| \rightarrow 0 \quad \text{pro } t \rightarrow \infty,$$

kde $U(t)$ je fundamentální matice řešení systému (6.12).

(Tedy všechna řešení systému (6.12) konvergují pro $t \rightarrow \infty$ k nule.)

Uvažujme nyní homogenní systém lineárních diferenciálních rovnic

$$x' = Ax, \quad (6.13)$$

kde A je konstantní reálná čtvercová matice typu (n, n) .

V tomto případě je systém (6.13) speciálním případem autonomního systému $x' = f(x)$, kde $f(x) = Ax$.

Tedy stabilita triviálního řešení systému (6.13) je ekvivalentní s jeho stejnoměrnou stabilitou a podobně asymptotická stabilita triviálního řešení systému (6.13) je ekvivalentní se stejnoměrnou asymptotickou stabilitou.

Věta 6.11. *Nechť je dán systém (6.13). Jestliže všechna charakteristická čísla matice A mají záporné reálné části, pak triviální řešení daného systému je stejnoměrně asymptoticky stabilní. Existuje-li charakteristické číslo matice A s kladnou reálnou částí, pak triviální řešení je nestabilní.*

Poznámka. O stabilitě lineárního systému (6.13) nelze rozhodnout pomocí věty 6.11 v případě, že žádné charakteristické číslo matice A nemá kladnou reálnou část, ale mezi charakteristickými čísly se vyskytují čísla s nulovou reálnou částí.

V tomto případě může být lineární systém stabilní nebo nestabilní. Podmínky stability, resp. nestability, uvedené ve větě 6.11 jsou tedy postačující, nikoli nutné.

Podmínky asymptotické stability jsou nutné a postačující.

Lze dokázat, že v případě, že všechna charakteristická čísla matice A mají záporné nebo nulové reálné části, přičemž všechna charakteristická čísla s nulovou reálnou částí mají násobnost jedna, je uvažovaný lineární systém stabilní (nikoli však asymptoticky stabilní).

Hurwitzovo kritérium

Jelikož charakteristická čísla systému (6.13) jsou kořeny charakteristického polynomu

$$\det(A - \lambda I) = a_0 + a_1\lambda + \cdots + a_{n-1}\lambda^{n-1} + a_n\lambda^n,$$

budou nás zajímat polynomy, jejichž všechny nulové body mají záporné reálné části. Takové polynomy se nazývají **hurwitzovské polynomy** a příslušné kritérium **Hurwitzovo kritérium**:

Nechť je dán polynom

$$f(z) = a_0 + a_1z + \cdots + a_{n-1}z^{n-1} + a_nz^n, \quad n \geq 1, \quad a_0 > 0, \quad a_n \neq 0 \quad (6.14)$$

s reálnými koeficienty. **Hurwitzovou maticí** polynomu (6.14) nazýváme matici

$$\begin{pmatrix} a_1 & a_0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 & a_0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & & & \vdots \\ a_{2n-1} & a_{2n-2} & a_{2n-3} & a_{2n-4} & \cdots & a_n \end{pmatrix}, \quad (6.15)$$

kde klademe $a_s = 0$ pro $s < 0$ a $s > n$. Platí toto tvrzení:

Všechny nulové body polynomu (6.14) mají záporné reálné části právě tehdy, když determinanty $\Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_n$ jsou kladné, přičemž

$$\Delta_k = \begin{vmatrix} a_1 & a_0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 & a_0 & \cdots & 0 \\ a_5 & a_4 & a_3 & a_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & & & \vdots \\ a_{2k-1} & a_{2k-2} & a_{2k-3} & a_{2k-4} & \cdots & a_k \end{vmatrix}, \quad k = 1, \dots, n.$$

Mají-li všechny nulové body polynomu (6.14) záporné reálné části, musí být všechny jeho koeficienty a_j , $j = 0, \dots, n$, kladné.

Dá se ukázat, že pro $n = 2$ je tato podmínka i postačující, tj. že polynom $f(z) = a_0 + a_1z + a_2z^2$ je hurwitzovský právě tehdy, když $a_0 > 0$, $a_1 > 0$, $a_2 > 0$.

Pro polynomy vyšších stupňů je tato podmínka pouze nutná. Tak například polynom

$$f(z) = 30 + 4z + z^2 + z^3$$

má nulové body $-3, 1+3j, 1-3j$, tedy dva kořeny mají kladné reálné části, i když všechny koeficienty daného polynomu jsou kladné.

Příklad 6.12. Zjistěte, zda polynom

$$f(z) = 3 + 2z + 7z^2 + 3z^3 + z^4$$

je hurwitzovský.

Všechny koeficienty polynomu f jsou kladné, takže tento polynom může být hurwitzovský. Použijeme Hurwitzovo kritérium:

$a_0 = 3, a_1 = 2, a_2 = 7, a_3 = 3, a_4 = 1$, tedy

$$\begin{aligned} \Delta_1 &= a_1 = 2 > 0, & \Delta_2 &= \begin{vmatrix} a_1 & a_0 \\ a_3 & a_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 7 \end{vmatrix} = 5 > 0 \\ \Delta_3 &= \begin{vmatrix} a_1 & a_0 & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 \\ a_5 & a_4 & a_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 3 & 7 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 11 > 0 \\ \Delta_4 &= \begin{vmatrix} a_1 & a_0 & 0 & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 & a_0 \\ a_5 & a_4 & a_3 & a_2 \\ a_7 & a_6 & a_5 & a_4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 0 & 0 \\ 3 & 7 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot \Delta_3 = 11 > 0. \end{aligned}$$

Podmínky Hurwitzova kritéria jsou splněny, takže polynom je hurwitzovský.

Michajlovovo kritérium

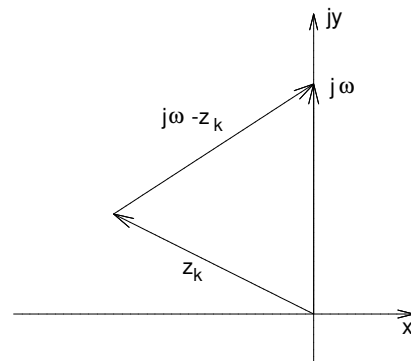
Uvažujme polynom

$$P(z) = z^n + a_1 z^{n-1} + \dots + a_n, \quad (6.16)$$

který nemá kořeny ležící na imaginární ose. Rozložme polynom $P(z)$ na součin kořenových činitelů, tj.

$$P(z) = (z - z_1)(z - z_2) \dots (z - z_n).$$

Nechť bod $z = j\omega$, $\omega \in (-\infty, \infty)$, se pohybuje zdola nahoru po imaginární ose. Z obrázku je zřejmé, že když $\operatorname{Re} z_k < 0$, tak při změně ω od $-\infty$ do $+\infty$ se vektor $z - z_k = j\omega - z_k$ otočí o úhel π proti směru hodinových ručiček a funkce $\arg(z - z_k)$ má přírůstek $+\pi$. Jestliže tedy všechny kořeny polynomu $P(z)$ mají záporné reálné části, argument polynomu $P(z)$ bude mít přírůstek $n\pi$, protože přírůstek argumentu součinu se rovná součtu přírůstků argumentů jednotlivých činitelů.



Kdyby alespoň jeden z kořenů z_j , $j \in \{1, \dots, n\}$ měl kladnou reálnou část, přírůstek

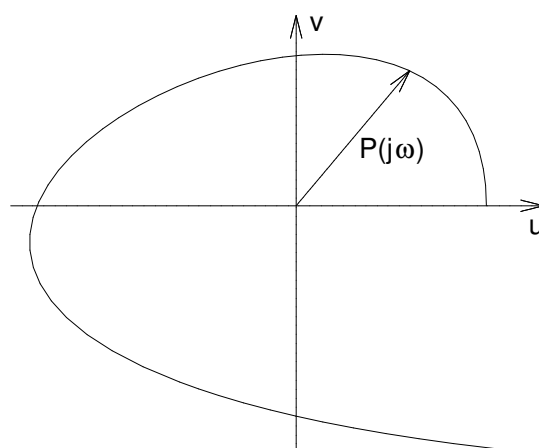
argumentu činitele $z - z_j$ by měl hodnotu $-\pi$ (odpovídající vektor se otáčí ve směru pohybu hodinových ručiček) a přírůstek argumentu polynomu $P(z)$ by byl menší než $n\pi$.

Dosaďme nyní do (6.16) $z = j\omega$. Pak platí

$$P(j\omega) = u(\omega) + j v(\omega),$$

$$\begin{aligned} \text{kde } u(\omega) &= a_n - a_{n-2}\omega^2 + a_{n-4}\omega^4 - \dots \\ v(\omega) &= a_{n-1}\omega - a_{n-3}\omega^3 + a_{n-5}\omega^5 - \dots \end{aligned}$$

$P(j\omega)$ pak reprezentuje vektor v komplexní rovině (u, v) . Při změně parametru ω od $-\infty$ do $+\infty$ vytváří koncový bod daného vektoru křivku, kterou nazýváme **hodografem** vektorové funkce $w = P(j\omega)$ (nebo též Michajlovovou křivkou), viz obrázek 6.8.



Obr. 6.8: Michajlovova křivka

Tedy pro $\omega \in (-\infty, \infty)$ se vektor $P(j\omega)$ otočí o úhel φ . Jestliže polynom $P(z)$ má m kořenů s kladnou reálnou částí a $n - m$ kořenů se zápornou reálnou částí, pak

$$\varphi = (n - m)\pi + m(-\pi) = (n - 2m)\pi.$$

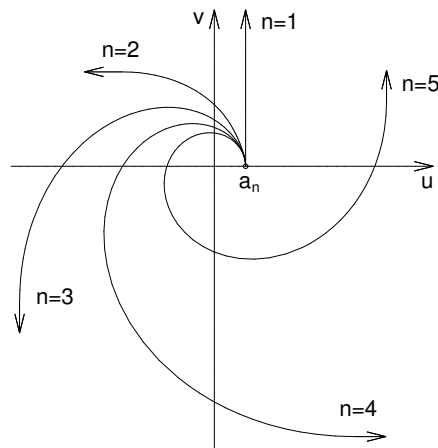
Jelikož funkce $u(\omega)$ je sudá, Michajlovova křivka je symetrická podle osy u , což znamená, že můžeme konstruovat Michajlovovu křivku pouze pro $\omega \in \langle 0, \infty \rangle$, přičemž

$$\varphi = (n - m) \frac{\pi}{2} + m \cdot \left(-\frac{\pi}{2}\right) = (n - 2m) \frac{\pi}{2}. \quad (6.17)$$

Již víme, že řešení systému (6.11) je asymptoticky stabilní, jestliže všechny kořeny příslušné charakteristické rovnice mají záporné reálné části, tj., m se musí v (6.17) rovnat nule, což vede k následujícímu kritériu stability.

Michajlovovo kritérium. Polynom (6.16) je Hurwitzův, jestliže Michajlovova křivka pro $\omega \in \langle 0, \infty \rangle$ neprochází počátkem a platí $\varphi = n \cdot \frac{\pi}{2}$.

Na obrázku 6.9 jsou zobrazeny typické Michajlovovy křivky pro polynomy stupňů $n = 1, 2, 3, 4, 5$ v případě, že všechny kořeny mají zápornou reálnou část.



Obr. 6.9: Michajlovovy křivky pro $n = 1, 2, 3, 4, 5$.

Příklad 6.13. Michajlovovým kritériem rozhodněte o stabilitě systému

$$\begin{aligned}x_1' &= x_2 \\x_2' &= x_3 \\x_3' &= x_4 \\x_4' &= -x_1 - 2x_2 - 3x_3 - 2x_4.\end{aligned}$$

Řešení. Charakteristická rovnice je tvaru

$$P(\lambda) = \lambda^4 + 2\lambda^3 + 3\lambda^2 + 2\lambda + 1 = 0.$$

Dále platí

$$\begin{aligned}P(j\omega) &= \omega^4 - 2j\omega^3 - 3\omega^2 + 2j\omega + 1, \\u(\omega) &= \omega^4 - 3\omega^2 + 1 \\v(\omega) &= -2\omega^3 + 2\omega = 2\omega(1 - \omega^2) = 2\omega(1 - \omega)(1 + \omega).\end{aligned}$$

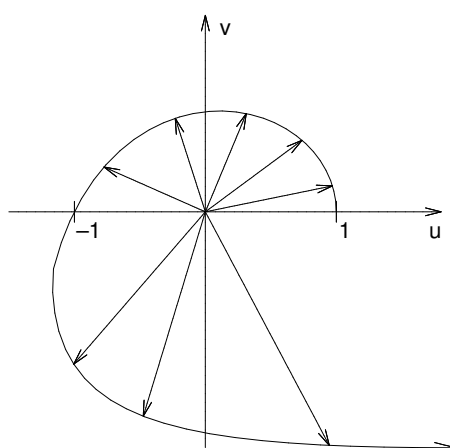
Hledejme nyní kořeny rovnic $u(\omega) = 0$, $v(\omega) = 0$, $\omega \in \langle 0, \infty \rangle$.

$$\begin{aligned}u(\omega) = 0 &\Leftrightarrow \omega^4 - 3\omega^2 + 1 = 0 \Rightarrow \omega_1 = \sqrt{\frac{3-\sqrt{5}}{2}}, \omega_2 = \sqrt{\frac{3+\sqrt{5}}{2}} \\v(\omega) = 0 &\Leftrightarrow 2\omega(1 - \omega)(1 + \omega) = 0 \Rightarrow \omega_3 = 0, \omega_4 = 1.\end{aligned}$$

Sestavme tabulku hodnot $u = u(\omega)$, $v = v(\omega)$ pro vypočtené hodnoty parametru ω , a to vzestupně vzhledem k ω :

ω	0	$\sqrt{\frac{3-\sqrt{5}}{2}}$	1	$\sqrt{\frac{3+\sqrt{5}}{2}}$	∞
u	1	0	-1	0	+
v	0	+	0	-	-

K průběhu Michajlovovy křivky nám stačí určit pouze znaménka funkčních hodnot včetně případu, kdy $\omega \rightarrow \infty$. Jelikož $\lim_{\omega \rightarrow \infty} \frac{v}{u} = 0$, průběh Michajlovovy křivky lze znázornit následovně:



Obr. 6.10: Michajlovova křivka k příkladu 6.13

Tedy pro $\omega \in \langle 0, \infty \rangle$ se vektor $P(j\omega)$ otočí o úhel $\varphi = 2\pi$. Aby polynom $P(\lambda)$ byl dle Michajlovova kritéria Hurwitzovský, musí v našem případě platit $\varphi = 4 \cdot \frac{\pi}{2} = 2\pi$, což je splněno. Odtud plyne, že vyšetřovaný systém je asymptoticky stabilní. \square

Z výše uvedeného vyplývá, že jsou-li všechny reálné části kořenů polynomu (6.16) záporné, platí:

- 1) Při pohybu ω od 0 do ∞ se bude vektor $w = P(j\omega)$ otáčet pouze proti směru pohybu hodinových ručiček a Michajlovova křivka bude střídavě protínat jak reálnou, tak imaginární osu roviny (u, v) .
- 2) Celkový počet těchto průsečíků (včetně průsečíku pro $\omega = 0$) se bude rovnat stupni polynomu $P(z)$.
- 3) Michajlovova křivka nemůže procházet počátkem souřadnic, protože pro určitou hodnotu ω by muselo platit $P(j\omega) = 0$, což by byl spor s podmínkou, že polynom $P(z)$ nemá kořeny ležící na imaginární ose.

Tento rozbor nám umožňuje zformulovat Michajlovovo kritérium v následujícím, snadno ověřitelném tvaru:

Jestliže polynom $P(z)$ nemá kořeny na imaginární ose, pak nutnou a postačující podmínkou pro existenci kořenů $P(z)$ pouze se zápornou reálnou částí je, aby:

- 1) Při rostoucím $\omega \in \langle 0, \infty \rangle$ se vektor $P(j\omega)$ pohyboval proti směru pohybu hodinových ručiček.
- 2) Všechny kořeny rovnic $u(\omega) = 0, v(\omega) = 0$ byly reálné a navzájem se střídaly. (Tj. mezi dvěma následujícími kořeny jedné rovnice musí ležet jeden kořen druhé rovnice.)

Jestliže všechny koeficienty polynomu $P(z)$ jsou kladné, stačí ověřit pouze podmínku 2).

Na závěr zdůrazněme, že výše uvedená kritéria stability pro systémy lineárních diferenciálních rovnic 1. řádu platí vzhledem k „ekvivalenci“ systémů lineárních diferenciálních rovnic 1. řádu a lineárních diferenciálních rovnic n -tého řádu i pro vyšetřování stability lineárních diferenciálních rovnic n -tého řádu.

6.1 Rovinný autonomní diferenciální systém

6.1.1 Cíl kapitoly

Celá řada technických jevů je matematicky modelována diferenciálními systémy, ve kterých nezávislá proměnná (hrající většinou roli času) není zastoupena explicitně. Těmto systémům říkáme autonomní systémy. Cílem této kapitoly je podrobně se seznámit s vlastnostmi řešení autonomního rovinného (tj. dvourozměrného) homogenního lineárního systému. Tyto systémy mají jednu velkou výhodu - jejich řešení je možné zobrazovat v tzv. fázové rovině. Provedeme podrobnou klasifikaci všech možných případů chování řešení. Z fázových obrazů je možné snadno usuzovat na stabilitu či nestabilitu řešení, tedy na vlastnosti, které nás často prakticky zajímají (zopakujte si dle vašich poznámek z bakalářského studia pojem stability a nestability řešení).

6.1.2 Autonomní diferenciální systém

Systém diferenciálních rovnic se nazývá **autonomním** systémem (nebo také dynamickým systémem), pokud je zapsán v normálním tvaru a pravé strany tohoto systému nejsou závislé na (nezávislé) proměnné t . Jinými slovy, systém diferenciálních rovnic je autonomní, pokud ho lze zapsat ve tvaru

$$\begin{cases} y_1' = f_1(y_1, y_2, \dots, y_n), \\ y_2' = f_2(y_1, y_2, \dots, y_n), \\ \dots \\ y_n' = f_n(y_1, y_2, \dots, y_n), \end{cases} \quad (6.18)$$

tj.,

$$y' = f(y),$$

kde vektorová funkce f je definována na nějaké oblasti Ω v prostoru \mathbb{R}^n nebo na celém prostoru \mathbb{R}^n (tj., $\Omega = \mathbb{R}^n$). Oblast Ω se nazývá **fázový prostor**, proměnná t , která je v systému (6.18) implicitně obsažena se často nazývá **čas**. Budeme předpokládat, že pravé strany systému (6.18) jsou spojité a že parciální derivace $\partial f_i / \partial y_k$, $i, k = 1, 2, \dots, n$ existují a jsou též spojité. Partikulární řešení $y = y(t)$ systému (6.18) můžeme chápat buď jako graf funkce $y = y(t)$ v prostoru $\mathbb{R} \times \Omega$ nebo jako křivku v prostoru Ω danou parametricky rovnicí $y = y(t)$. V tomto případě takovou křivku nazýváme **trajektorií** (nebo **fázovým obrazem řešení**) systému (6.18). Trajektorie je kolmým průmětem grafu funkce $y = y(t)$ z prostoru $\mathbb{R} \times \Omega$ do prostoru Ω .

6.1.3 Autonomní rovinný homogenní lineární systém

Lineární systém s konstantními koeficienty v rovině

Budeme diskutovat kvalitativní chování řešení systému rovnic

$$x' = Ax, \quad x \in \mathbb{R}^2 \quad (6.19)$$

s reálnou konstantní maticí

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

na okolí rovnovážného bodu $(x_1, x_2) = (0, 0)$. Připomeňme terminologii zavedenou v 6.1.2. Rovina x_1x_2 je nazývána **fázovou rovinou**. Grafické znázornění ukazující kolmou projekci řešení do fázové roviny nazýváme **fázovým obrazem řešení** systému rovnic. Fázový obraz množiny všech řešení systému (6.19) nazýváme **fázovým obrazem systému**. Systém (6.19) může být zapsán (položíme-li $x_1 = x$, $x_2 = y$) ve tvaru

$$\frac{dx}{dt} = a_{11}x + a_{12}y, \quad (6.20)$$

$$\frac{dy}{dt} = a_{21}x + a_{22}y \quad (6.21)$$

a jeho fázový obraz bude diskutován v okolí rovnovážného bodu $(x, y) = (0, 0)$. Zapišme odpovídající charakteristickou rovnici

$$\det(A - \lambda E) = \begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda \end{vmatrix} = 0,$$

tj. rovnici

$$\lambda^2 - (a_{11} + a_{22})\lambda + (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}) = 0. \quad (6.22)$$

Její kořeny jsou

$$\lambda_{1,2} = \frac{1}{2} \cdot \left(a_{11} + a_{22} \pm \sqrt{(a_{11} + a_{22})^2 - 4(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})} \right),$$

a po zřejmé úpravě,

$$\lambda_{1,2} = \frac{1}{2} \left(a_{11} + a_{22} \pm \sqrt{(a_{11} - a_{22})^2 + 4a_{12}a_{21}} \right).$$

Vztah rovinného systému (6.19) a rovnice druhého řádu

Autonomní rovinný systém můžeme řešit několika způsoby. Užijme nejprve eliminační metodu k tomu, abychom si ujasnili některé společné rysy a také rozdíly při řešení systému (6.19) a rovnice druhého řádu, která vznikne eliminací jedné nebo druhé hledané proměnné.

Derivováním první rovnice systému (6.20) dostáváme

$$x'' = a_{11}x' + a_{12}y' = a_{11}x' + a_{12}(a_{21}x + a_{22}y).$$

Eliminujeme nyní proměnnou y z první rovnice systému (6.20) za podmínky, že $a_{12} \neq 0$:

$$y = \frac{1}{a_{12}} \cdot (x' - a_{11}x).$$

Pak

$$x'' = a_{11}x' + a_{12}a_{21}x + a_{12}a_{22} \left(\frac{1}{a_{12}} \cdot (x' - a_{11}x) \right)$$

a nakonec obdržíme rovnici druhého řádu vzhledem k proměnné x :

$$x'' - (a_{11} + a_{22})x' + (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})x = 0. \quad (6.23)$$

Všimněme si, že příslušná charakteristická rovnice, odpovídající rovnici (6.23) je stejná jako rovnice (6.22). Rovnice (6.23) může být snadno vyřešena a výsledek můžeme dosadit do druhé rovnice systému (6.20). To znamená, že můžeme najít druhou proměnnou y . Je-li $a_{12} = 0$, pak lze první rovnici systému (6.20) řešit přímo. V obou případech tedy můžeme najít obecné řešení systému (6.20) díky pomocné lineární rovnici druhého nebo prvního řádu s konstantními koeficienty.

Poznámka 6.14. Stejný eliminační postup může být použit vzhledem k proměnné y . Je-li $a_{21} \neq 0$, pak y vyhovuje stejné rovnici jako x , totiž rovnici

$$y'' - (a_{11} + a_{22})y' + (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})y = 0. \quad (6.24)$$

Nemůžeme ovšem na základě faktu, že jak x , tak y vyhovují stejné rovnici konstatovat, že obě řešení mají identický tvar. To je obecně vyloučeno existencí vztahů mezi oběma proměnnými, určenými právě zkoumaným systémem (6.19). Nicméně fakt, že známe strukturu obecného řešení diskutovaných rovnic druhého řádu je dobrou motivací pro pochopení přípustných tvarů obecného řešení systému (6.20).

Přípustné tvary obecného řešení rovinného systému

Vypišme přípustné tvary obecného řešení systému (6.20). Budeme předpokládat, že řešení jsou reálná. Tomu přizpůsobíme odpovídající klasifikaci:

Případ reálných a různých kořenů ($\lambda_1 \neq \lambda_2$)

Je-li $\lambda_1 \neq \lambda_2$, pak z Věty 4.10 (str. 87) vyplývá, že systém (6.20) má obecné řešení tvaru

$$x = C_1 v_{11}^1 e^{\lambda_1 t} + C_2 v_{12}^1 e^{\lambda_2 t}, \quad (6.25)$$

$$y = C_1 v_{11}^2 e^{\lambda_1 t} + C_2 v_{12}^2 e^{\lambda_2 t}, \quad (6.26)$$

kde C_1 a C_2 jsou libovolné konstanty a $v_{11}^1, v_{11}^2, v_{12}^1, v_{12}^2$ jsou konstanty (tvořící dva vlastní vektory $v_{11} = (v_{11}^1, v_{11}^2)$ a $v_{12} = (v_{12}^1, v_{12}^2)$), které mohou být určeny dosazením výrazů (6.25) do systému (6.20). Tyto konstanty vyhovují systémům

$$(a_{11} - \lambda_1)v_{11}^1 + a_{12}v_{11}^2 = 0, \quad (6.27)$$

$$a_{21}v_{11}^1 + (a_{22} - \lambda_1)v_{11}^2 = 0 \quad (6.28)$$

a

$$(a_{11} - \lambda_2)v_{12}^1 + a_{12}v_{12}^2 = 0, \quad (6.29)$$

$$a_{21}v_{12}^1 + (a_{22} - \lambda_2)v_{12}^2 = 0. \quad (6.30)$$

Případ reálných a stejných kořenů ($\lambda_1 = \lambda_2$)

Je-li $\lambda_1 = \lambda_2$ a je-li hodnota h_1 matice $A - \lambda_1 E$ rovna jedné, pak má obecné řešení systému (6.20) v souladu s Větou 4.10 (str. 87) tvar

$$x = (C_1 v_{11}^1 + C_2 v_{21}^1 + C_2 v_{11}^1 t) e^{\lambda_1 t}, \quad (6.31)$$

$$y = (C_1 v_{11}^2 + C_2 v_{21}^2 + C_2 v_{11}^2 t) e^{\lambda_1 t}, \quad (6.32)$$

kde C_1 a C_2 jsou libovolné konstanty a $v_{11}^1, v_{11}^2, v_{21}^1, v_{21}^2$ jsou konstanty tvořící dva zobecněné vlastní vektory $v_{11} = (v_{11}^1, v_{11}^2)$ a $v_{21} = (v_{21}^1, v_{21}^2)$, které mohou být určeny postupem uvedeným v části 4.8.2 Je-li $h_1 = 0$, potom má obecné řešení tvar

$$x = (C_1 v_{11}^1 + C_2 v_{12}^1) e^{\lambda_1 t}, \quad (6.33)$$

$$y = (C_1 v_{11}^2 + C_2 v_{12}^2) e^{\lambda_1 t}, \quad (6.34)$$

kde C_1 a C_2 jsou libovolné konstanty a $v_{11}^1, v_{11}^2, v_{12}^1, v_{12}^2$ jsou konstanty tvořící dva zobecněné vlastní vektory $v_{11} = (v_{11}^1, v_{11}^2)$ a $v_{12} = (v_{12}^1, v_{12}^2)$, které mohou být určeny jako lineárně nezávislá řešení soustav (6.27), (6.29).

Případ komplexních kořenů ($\lambda_{1,2} = p \pm q \cdot i$)

Jsou-li kořeny charakteristické rovnice komplexní, tj., $\lambda_{1,2} = p \pm qi$, pak má obecné řešení tvar (který můžeme za tohoto předpokladu odvodit z tvaru (6.25) nebo z tvaru, uvedeného ve Větě 4.3, vzorec (4.15)):

$$x = e^{pt} (\alpha_1 \cos qt + \beta_1 \sin qt), \quad (6.35)$$

$$y = e^{pt} (\alpha_2 \cos qt + \beta_2 \sin qt), \quad (6.36)$$

kde konstanty $\alpha_1, \beta_1, \alpha_2$ a β_2 závisí na dvou libovolných konstantách.

V dalších částech budeme uvedené případy studovat podrobněji.

6.1.4 Fázové obrazy v případě reálných a různých kořenů charakteristické rovnice

Případ záporných a různých kořenů charakteristické rovnice

Uvažujme případ $\lambda_1 \neq \lambda_2, \lambda_1 < \lambda_2 < 0$. Řešení $(x, y) \equiv (0, 0)$ je globálně asymptoticky stabilní, neboť (jak lze snadno vidět z (6.25))

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} x(t) = \lim_{t \rightarrow +\infty} y(t) = 0$$

pro libovolné konstanty C_1, C_2 . V případě, když $C_1 = 0$ a $C_2 \neq 0$ je fázovým portrétem (po eliminaci proměnné t z (6.25)) přímka

$$v_{12}^2 x - v_{12}^1 y = 0. \quad (6.37)$$

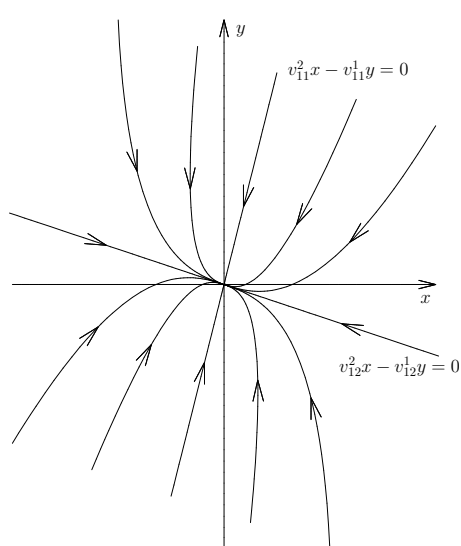
Šípkami je ukázán směr odpovídající růstu proměnné t . V případě $C_1 \neq 0$ a $C_2 = 0$ je fázovým portrétem (po eliminaci proměnné t z (6.25)) přímka

$$v_{11}^2 x - v_{11}^1 y = 0. \quad (6.38)$$

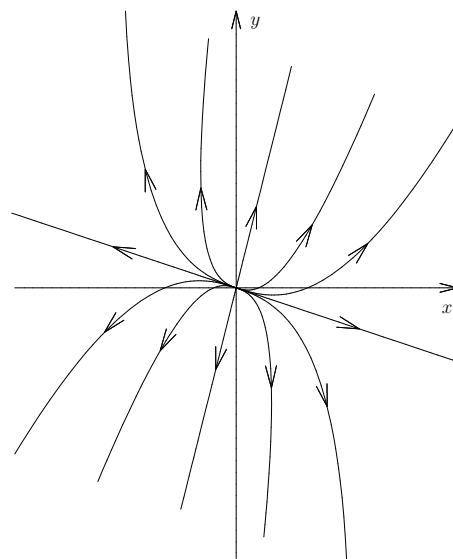
Kromě toho pro $C_2 \neq 0$ a $\alpha_{12} \neq 0$ ze vztahu (6.25) vyplývá

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{y}{x} = \frac{v_{12}^2}{v_{12}^1}.$$

To značí, že každý fázový portrét (kromě přímky odpovídající $C_2 = 0$) má stejnou tečnu v počátku souřadnic, tj., přímku (6.37). Je-li $v_{12}^1 = 0$, pak je tato tečna přímkou $x = 0$ a v případě, že $v_{12}^2 = 0$ přímkou $y = 0$. Bod $(0, 0)$ nazýváme **stabilním nevlastním uzlem**. (Viz obr. 6.11.)



Obr. 6.11: Stabilní uzel



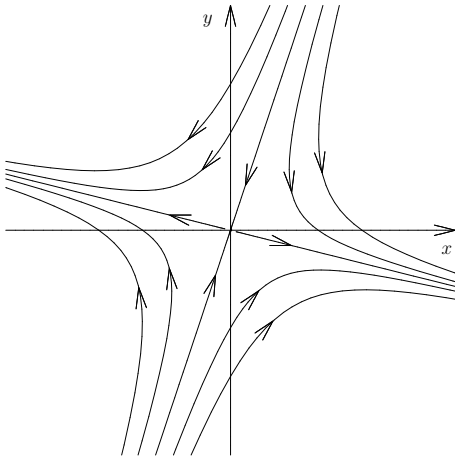
Obr. 6.12: Nestabilní uzel

Případ kladných a různých kořenů charakteristické rovnice

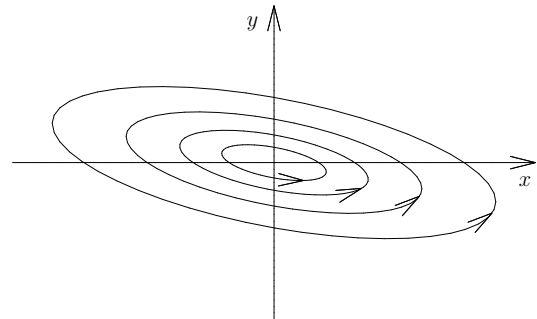
Předpokládejme, že $\lambda_1 \neq \lambda_2$, $\lambda_1 > \lambda_2 > 0$. Fázový portrét trajektorií je stejný jako v předchozím případě, pouze orientace šipek je opačná. Triviální řešení $x = y = 0$ je nestabilní. Bod $(0, 0)$ je nazýván **nestabilním vlastním uzlem**. (Viz obr. 6.12.)

Případ jednoho kladného a jednoho záporného kořene charakteristické rovnice

Předpokládejme, že $\lambda_1 \neq \lambda_2$, $\lambda_1 > 0$ a $\lambda_2 < 0$. V tomto případě vidíme ze vztahu (6.25), že vzdálenost mezi počátkem souřadnic a libovolným bodem fázového portréту řešení pro $C_1 \neq 0$ a $C_2 \neq 0$ roste (do nekonečna) když $t \rightarrow \pm\infty$. Pro $C_1 = 0$ je fázovým portrétem odpovídajících řešení přímka (6.37). Body ležící na této přímce konvergují k počátku souřadnic pro $t \rightarrow +\infty$. Je-li $C_2 = 0$, pak je fázovým portrétem odpovídajících řešení přímka (6.38). Body na ní ležící konvergují do nekonečna pro $t \rightarrow +\infty$. Triviální řešení



Obr. 6.13: Sedlový bod



Obr. 6.14: Střed

$x = y = 0$ je nestabilní. Poznamenejme, že pro $t \rightarrow +\infty$ existuje stabilní podprostor řešení, vyhovujících vztahu (6.37). (Viz obr. 6.13.)

Bod $(0, 0)$ nazýváme **sedlovým bodem** nebo **hyperbolickým bodem**.

Fázové obrazy v případě ryze komplexních kořenů charakteristické rovnice

Předpokládejme, že kořeny charakteristické rovnice jsou ryze komplexní, tj., $\lambda_{1,2} = \pm qi$ a $q \neq 0$. Obecné řešení systému (6.20) má tvar (viz (6.35))

$$x = \alpha_1 \cos qt + \beta_1 \sin qt, \quad (6.39)$$

$$y = \alpha_2 \cos qt + \beta_2 \sin qt, \quad (6.40)$$

kde konstanty α_1 , β_1 , α_2 a β_2 mohou záviset na dvou **libovolných** konstantách. Všechna řešení systému (6.39) jsou periodická. Ukážeme, že se jedná o elipsy (nebo kružnice) se středem v počátku souřadnic fázové roviny. Označme

$$\Delta = \begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 \end{vmatrix}.$$

Protože uvažujeme netriviální řešení, musí být $\Delta \neq 0$. Ze vztahů (6.39), (6.40) dostáváme

$$\cos qt = \begin{vmatrix} x & \beta_1 \\ y & \beta_2 \end{vmatrix} \cdot \Delta^{-1}, \quad \sin qt = \begin{vmatrix} \alpha_1 & x \\ \alpha_2 & y \end{vmatrix} \cdot \Delta^{-1}. \quad (6.41)$$

Dosazením vztahů (6.41) do identity $\cos^2 qt + \sin^2 qt \equiv 1$ dostáváme

$$(\beta_2^2 + \alpha_2^2)x^2 - 2(\beta_2\beta_1 + \alpha_2\alpha_1)xy + (\beta_1^2 + \alpha_1^2)y^2 = \Delta^2. \quad (6.42)$$

Rovnice (6.42) vyjadřuje elipsy (nebo kružnice) se středem v počátku souřadnic. Vysvětlíme ještě stručně proč. Z analytické geometrie víme, že křivka daná vztahem

$$ax^2 + 2bxy + cy^2 = d,$$

kde $a > 0$, $c > 0$ a $d > 0$ je elipsou (a ve speciálním případě, kdy $a = c$ kružnicí), platí-li $ac - b^2 > 0$. V našem případě jsou podmínky $a = \beta_2^2 + \alpha_2^2 > 0$, $c = \beta_1^2 + \alpha_1^2 > 0$ a $d = \Delta^2 > 0$ splněny (zdůvodněte proč). Poslední podmínka vede k nerovnosti

$$ac - b^2 = (\beta_2^2 + \alpha_2^2) \cdot (\beta_1^2 + \alpha_1^2) - (\beta_2\beta_1 + \alpha_2\alpha_1)^2 = (\beta_2\alpha_1 - \alpha_2\beta_1)^2 > 0$$

(taktéž zdůvodněte, proč je poslední výraz nenulový) a prověrka podmínek je zakončena. Netriviální trajektorie (6.39) systému (6.20) jsou tedy pro každé $t \geq t_0$ ve fázové rovině ohraničené, mají tvar elips (nebo kružnic) a nekonvergují ani k počátku souřadnic, ani k nekonečnu. Triviální řešení je stabilní. Bod $(0, 0)$ fázové roviny se nazývá **střed**. (Viz obr. 6.14.)

Fázové obrazy v případě komplexních kořenů charakteristické rovnice

Předpokládejme, že kořeny charakteristické rovnice jsou komplexní, ale nikoliv ryze komplexní, tj., $\lambda_{1,2} = p \pm qi$ a $p \neq 0$. Provedeme diskusi dvou případů.

Komplexní kořeny se zápornou reálnou složkou

Předpokládejme, že $p < 0$. Obecné řešení systému (6.20) má tvar (viz (6.35))

$$\begin{aligned} x &= e^{pt}(\alpha_1 \cos qt + \beta_1 \sin qt), \\ y &= e^{pt}(\alpha_2 \cos qt + \beta_2 \sin qt), \end{aligned}$$

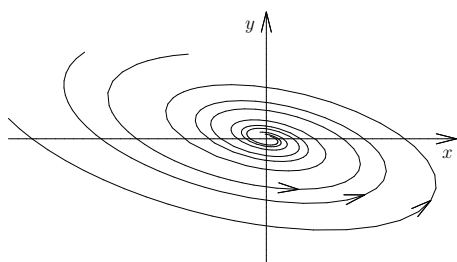
ve kterém konstanty α_1 , β_1 , α_2 a β_2 závisí na dvou **libovolných** konstantách. Snadno lze obdržet analogický vztah ke vztahu (6.42).

$$(\beta_2^2 + \alpha_2^2)x^2 - 2(\beta_2\beta_1 + \alpha_2\alpha_1)xy + (\beta_1^2 + \alpha_1^2)y^2 = \Delta^2 \cdot e^{2pt}. \quad (6.43)$$

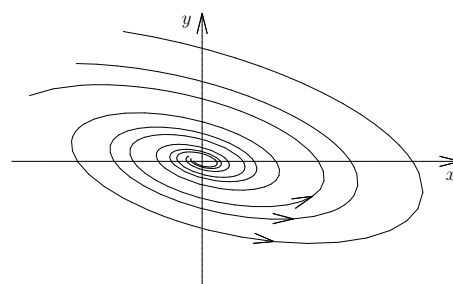
Netriviální řešení (6.35) systému (6.20) konvergují ve fázové rovině při $t \rightarrow +\infty$ k počátku souřadnic. Vztah (6.43) je ve fázové rovině spirálou, nekonečněkrát rotující kolem počátku souřadnic a konvergující k počátku souřadnic. Proto je triviální řešení asymptoticky stabilní. Rovnovážný bod $(0, 0)$ fázové roviny v tomto případě nazýváme **ohniskem (stabilním ohniskem)**. (Viz obr. 6.15.)

Komplexní kořeny s kladnou reálnou složkou

Předpokládejme, že $p > 0$. Obecné řešení systému (6.20) má tvar (6.35). Fázový portrét je v tomto případě stejný jako v předešlém případě, pouze orientace fázových obrazů řešení je opačná. Vztah (6.43) je ve fázové rovině spirálou, nekonečněkrát rotující kolem počátku souřadnic, vzdalující se od počátku souřadnic a divergující do nekonečna. Triviální řešení je nestabilní. Rovnovážný bod $(0, 0)$ fázové roviny se nazývá **ohniskem (nestabilním)**. (Viz obr. 6.16.)



Obr. 6.15: Stabilní ohnisko



Obr. 6.16: Nestabilní ohnisko

Fázové obrazy v případě reálných nenulových násobných kořenů charakteristické rovnice

Tvary přípustných řešení byly ukázány v části 6.1.3 (viz vzorce (6.31), (6.33)). Jejich analýzou můžeme dospět k závěru, že obecné řešení má v případě, když $\lambda_1 = \lambda_2$ tvar

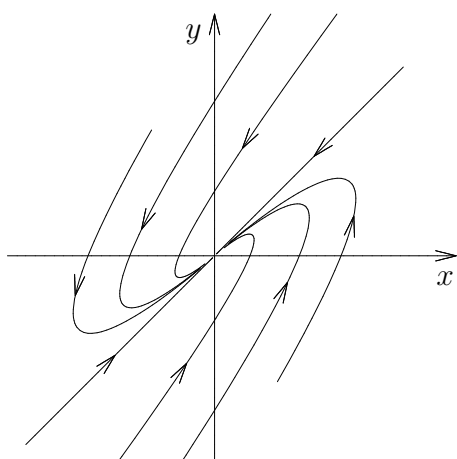
$$x = (\alpha_1 + \beta_1 t)e^{\lambda_1 t}, \quad (6.44)$$

$$y = (\alpha_2 + \beta_2 t)e^{\lambda_1 t}, \quad (6.45)$$

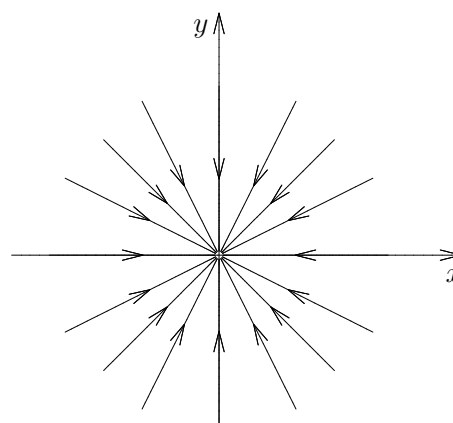
kde konstanty $\alpha_1, \beta_1, \alpha_2, \beta_2$ jsou obecně funkcemi **dvou** libovolných konstant C_1, C_2 a samy koeficienty β_1 a β_2 závisí pouze na jedné libovolné konstantě. Kromě toho platí, že $\beta_1 = C_2 a^*$ a $\beta_2 = C_2 b^*$, kde $a^* = 0$ a $b^* = 0$, je-li hodnota h_1 matice $A - \lambda_1 E$ nulová a $a^* = v_{11}^1$ a $b^* = v_{11}^2$, je-li hodnota této matice $h_1 = 1$. Uvažujme dále dva případy.

Záporné reálné kořeny

Předpokládejme, že $\lambda_1 = \lambda_2 < 0$. Obr. 6.17 ukazuje situaci, když $\beta_1^2 + \beta_2^2 > 0$ (a tedy, vzhledem k uvedeným vztahům, jsou obě čísla nenulová).



Obr. 6.17: Stabilní nevlastní uzel



Obr. 6.18: Stabilní dikritický uzel

V tomto případě mají všechny fázové křivky v počátku souřadnic společnou tečnu $\beta_2 x - \beta_1 y = 0$, neboť

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{x(t)}{y(t)} = \frac{\beta_1}{\beta_2}.$$

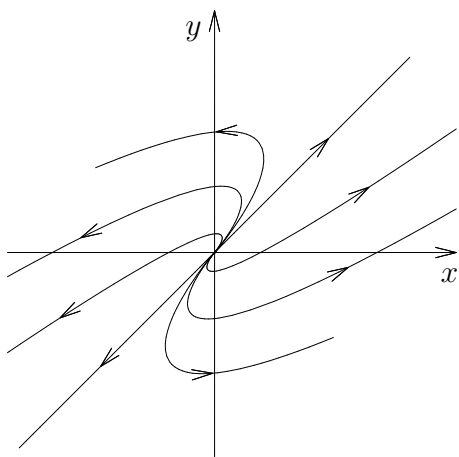
Je-li $\beta_1 = \beta_2 = 0$, pak

$$\begin{aligned}x &= \alpha_1 e^{\lambda_1 t}, \\y &= \alpha_2 e^{\lambda_1 t},\end{aligned}$$

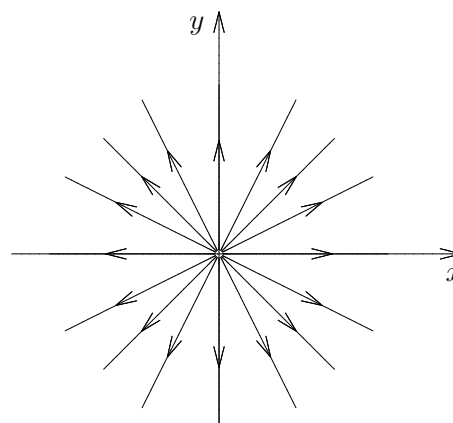
kde α_1 a α_2 jsou libovolné konstanty. V tomto případě je fázový obraz reprezentován přímkami $\alpha_2 x - \alpha_1 y = 0$ (viz obr. 6.18.). V obou případech nazýváme rovnovážný bod $(0, 0)$ **stabilním nevlastním uzlem** a v posledním případě hovoříme o **dikritickém uzlu**. Triviální řešení je asymptoticky stabilní.

Kladné reálné kořeny

Nechť $\lambda_1 = \lambda_2 > 0$. Fázový portrét systému je stejný jako v předchozím případě s tím rozdílem, že orientace pohybu je ve fázové rovině opačná. Obrázky 6.19 a 6.20 ukazují příslušné fázové obrazy.



Obr. 6.19: Nestabilní nevlastní uzel



Obr. 6.20: Nestabilní dikritický uzel

Rovnovážný bod $(0, 0)$ nazýváme **nestabilním nevlastním uzlem** nebo **nestabilním dikritickým nevlastním uzlem**. Je zřejmé, že triviální řešení je nestabilní.

Fázové obrazy v případě existence jednoduchého nulového kořene charakteristické rovnice

V případě, že nula je nenásobným kořenem charakteristické rovnice vznikají dva případy:

Nulový a záporný kořen charakteristické rovnice

Předpokládejme, že $\lambda_1 = 0$ a $\lambda_2 < 0$. Obecné řešení má tvar (viz (6.25)):

$$x = C_1 v_{11}^1 + C_2 v_{12}^1 e^{\lambda_2 t}, \quad (6.46)$$

$$y = C_1 v_{11}^2 + C_2 v_{12}^2 e^{\lambda_2 t}, \quad (6.47)$$

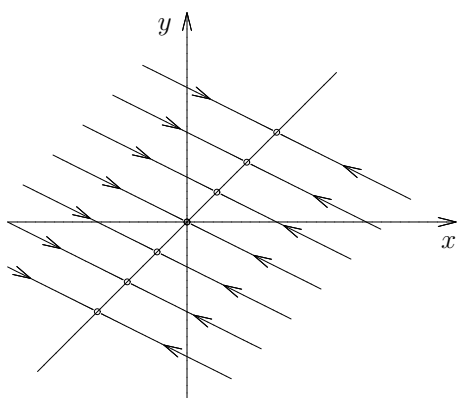
kde C_1 a C_2 jsou libovolné konstanty. V případě, že $C_2 = 0$, je každý bod $(x, y) = (C_1 v_{11}^1, C_1 v_{11}^2)$ partikulárním konstantním řešením. Tato řešení vyplňují přímku

$$v_{11}^2 x - v_{11}^1 y = 0.$$

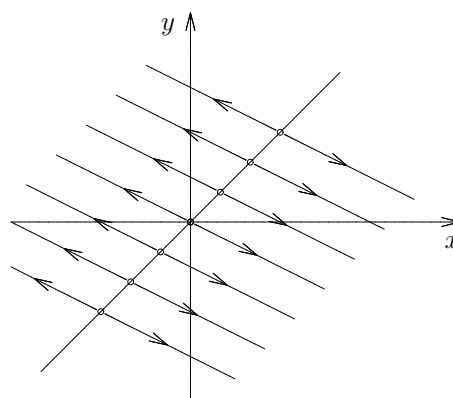
Kromě toho, tato konstantní řešení jsou limitními body jiných řešení (která odpovídají hodnotě $C_2 \neq 0$) s přímkovými fázovými obrazy

$$v_{12}^2(x - C_1 v_{11}^1) - v_{12}^1(y - C_1 v_{11}^2) = 0.$$

Rovnovážný bod $(0, 0)$ je **stabilní**, ale není asymptoticky stabilní. (Viz odpovídající fázový obraz - obr. 6.21.)



Obr. 6.21: Příklad nulového a záporného kořene



Obr. 6.22: Příklad nulového a kladného kořene

Nulový a kladný kořen charakteristické rovnice

Nechť je nyní $\lambda_1 = 0$ a $\lambda_2 > 0$. Fázový obraz systému je stejný jako v předchozím případě pouze orientace pohybu je (pro rostoucí t) opačná. (Viz obr. 6.22.) Rovnovážný bod $(0, 0)$ je **nestabilní**.

Fázové obrazy v případě dvojnásobného nulového kořene charakteristické rovnice

Je-li $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$, pak má obecné řešení tvar (vyplývající z (6.44)):

$$x = \alpha_1 + \beta_1 t, \quad (6.48)$$

$$y = \alpha_2 + \beta_2 t \quad (6.49)$$

kde konstanty $\alpha_1, \beta_1, \alpha_2, \beta_2$ jsou funkcemi **dvou** libovolných konstant C_1, C_2 , konstanty β_1, β_2 však závisí pouze na jedné libovolné konstantě; $\beta_1 = C_2 a^*$ a $\beta_2 = C_2 b^*$, kde $a^* = b^* = 0$, je-li hodnota h_1 matice $A - \lambda_1 E$ nulová a $a^* = v_{11}^1, b^* = v_{11}^2$, je-li hodnota této matice $h_1 = 1$. Je-li $\beta_1^2 + \beta_2^2 > 0$ (a tedy, vzhledem k uvedeným vztahům, jsou obě čísla nenulová), pak jsou fázové obrazy trajektorií tvořeny přímkami a každý bod na

nich konverguje k nekonečnu pro $t \rightarrow +\infty$. V tomto případě je rovnovážný bod $(0, 0)$ **nestabilní**. Jestliže $\beta_1 = \beta_2 = 0$, pak má obecné řešení tvar

$$x = \alpha_1, \quad y = \alpha_2,$$

kde jsou α_1 a α_2 libovolnými konstantami. **Každý** bod fázové roviny **stabilním** řešením. Nejedná se však o asymptotickou stabilitu.

Příklad 6.15. Uvažujme systém

$$\begin{aligned} x' &= -x - y, \\ y' &= x + y. \end{aligned} \tag{6.50}$$

V tomto případě je $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$ a obecné řešení systému (6.50) má tvar

$$\begin{aligned} x &= \frac{C_1 + C_2}{2} - C_1 t, \\ y &= \frac{C_1 - C_2}{2} + C_1 t, \end{aligned}$$

kde C_1 a C_2 jsou libovolné konstanty.

Příklad 6.16. Systém

$$\begin{aligned} x' &= 0, \\ y' &= 0 \end{aligned} \tag{6.51}$$

slouží jako ilustrace posledního případu. Skutečně: $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$ a obecné řešení systému (6.51) je

$$x = \alpha_1, \quad y = \alpha_2,$$

kde α_1 a α_2 jsou libovolné konstanty.

6.2 Shrnutí kapitoly

V kapitole byly klasifikovány všechny možné případy chování dvourozměrného lineárního autonomního systému. Z fázových portrétů bylo patrné v jakých případech lze hovořit o stabilitě řešení (asymptotické či neasymptotické) a kdy je daný systém nestabilní. Tyto vlastnosti byly jednoznačně determinovány vlastnostmi kořenů charakteristické rovnice. Proto při prvotní klasifikaci typu řešení není vůbec nutné nacházet obecné řešení daného systému. Naprosto postačuje zjistit, jakého charakteru zmíněné kořeny jsou. Pro rekapitulaci uvedme, že byly klasifikovány tyto případy: případ záporných a různých kořenů, případ kladných a různých kořenů, případ jednoho kladného a jednoho záporného kořene, případ ryze komplexních kořenů, případ komplexních kořenů se zápornou nebo s kladnou reálnou složkou, případ reálných nenulových násobných kořenů (kladných či záporných), případ jednoho nulového a jednoho záporného (nebo kladného) kořene a případ dvojnásobného nulového kořene.

6.3 Řešené příklady

Příklad 6.17. Vyšetřete stabilitu systému

$$\begin{aligned}x_1' &= x_1 + x_2 \\x_2' &= x_2 \\x_3' &= x_4 \\x_4' &= 0\end{aligned}$$

Řešení.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad f(\lambda) = \det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 1 - \lambda & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 - \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2(\lambda - 1)^2.$$

Tedy charakteristická čísla matice A jsou $\lambda_1 = \lambda_2 = 0, \lambda_3 = \lambda_4 = 1$.

Matice A má charakteristické číslo s kladnou reálnou částí, tedy systém je nestabilní. \square

Příklad 6.18. Vyšetřete stabilitu řešení $u(t) = (\sin t, t + \cos t, 1 + \sin t)^T$ systému

$$\begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ x_3' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 - t \\ 1 \\ 1 - t \end{pmatrix}$$

Řešení. Stačí vyšetřit stabilitu triviálního řešení homogenního systému

$$\begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ x_3' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

$$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 2 - \lambda & 1 & -2 \\ -1 & -\lambda & 0 \\ 1 & 1 & -1 - \lambda \end{vmatrix} = -(\lambda^2 + 1)(\lambda - 1) = 0$$

Tedy $\lambda_1 = j, \lambda_2 = -j, \lambda_3 = 1$. Protože existuje charakteristické číslo matice A s kladnou reálnou částí, je triviální řešení homogenního systému nestabilní a tudíž i řešení $u(t)$ daného nehomogenního systému je nestabilní. \square

Příklad 6.19. Pomocí Michajlova kritéria zjistěte, zda je stabilní diferenciální rovnice

$$x^{(4)} + x''' + 10x'' + 4x' + 9x = 0$$

Řešení. Charakteristická rovnice je tvaru

$$P(\lambda) = \lambda^4 + \lambda^3 + 10\lambda^2 + 4\lambda + 9 = 0$$

Tedy $P(j\omega) = \omega^4 - 10\omega^2 + 9 - j(\omega^3 - 4\omega)$.

$$\begin{aligned} \text{Odtud } u(\omega) &= \omega^4 - 10\omega^2 + 9 = 0 \Rightarrow \omega_{1,2} = \pm 1, \omega_{3,4} = \pm 3 \\ v(\omega) &= -\omega^3 + 4\omega = 0 \Rightarrow \omega_1 = 0, \omega_{2,3} = \pm 2 \end{aligned}$$

Stačí nám uvažovat pouze kořeny z intervalu $\langle 0, \infty \rangle$. Vidíme, že všechny jsou reálné a navzájem se střídají, z čehož plyne, že polynom $P(\lambda)$ je hurwitzovský, a tedy vyšetřovaná rovnice je asymptoticky stabilní. \square

Příklad 6.20. Charakterizujte bod $(0, 0)$ systému

$$\begin{aligned} x' &= -\frac{3}{2}x - \frac{1}{2}y, \\ y' &= -\frac{1}{2}x - \frac{3}{2}y. \end{aligned} \tag{6.52}$$

Řešení. Bod $(0, 0)$ je stabilním nevlastním uzlem. Skutečně, v tomto případě je $\lambda_1 = -2 < \lambda_2 = -1$. Obecné řešení systému (6.52) je:

$$\begin{aligned} x &= C_1 e^{-2t} + C_2 e^{-t}, \\ y &= C_1 e^{-2t} - C_2 e^{-t}. \end{aligned}$$

\square

Příklad 6.21. Charakterizujte bod $(0, 0)$ systému

$$\begin{aligned} x' &= \frac{3}{2}x + \frac{1}{2}y, \\ y' &= \frac{1}{2}x + \frac{3}{2}y. \end{aligned} \tag{6.53}$$

Řešení. Bod $(0, 0)$ je nestabilním vlastním uzlem. Skutečně, v tomto případě $\lambda_1 = 2 > \lambda_2 = 1$. Obecné řešení systému (6.53) je

$$\begin{aligned} x &= C_1 e^{2t} + C_2 e^t, \\ y &= C_1 e^{2t} - C_2 e^t. \end{aligned}$$

\square

Příklad 6.22. Charakterizujte bod $(0, 0)$ systému

$$\begin{aligned} x' &= y, \\ y' &= x \end{aligned} \tag{6.54}$$

Řešení. Bod $(0, 0)$ je sedlovým bodem. V tomto případě je $\lambda_1 = 1 > 0$ a $\lambda_2 = -1 < 0$. Obecné řešení systému (6.54) je:

$$\begin{aligned} x &= C_1 e^t + C_2 e^{-t}, \\ y &= C_1 e^t - C_2 e^{-t}. \end{aligned}$$

\square

Příklad 6.23. Charakterizujte bod $(0, 0)$ systému

$$\begin{aligned}x' &= y, \\y' &= -x.\end{aligned}\tag{6.55}$$

Řešení. Bod $(0, 0)$ je středem. V tomto případě $\lambda_{1,2} = \pm i$. Obecné řešení systému (6.55) je

$$\begin{aligned}x &= C_1 \cos t + C_2 \sin t, \\y &= -C_1 \sin t + C_2 \cos t.\end{aligned}$$

Fázovým portrétem řešení jsou kružnice, neboť platí $x^2 + y^2 = C_1^2 + C_2^2 > 0$. □

Příklad 6.24. Charakterizujte bod $(0, 0)$ systému

$$\begin{aligned}x' &= x - y, \\y' &= x + y.\end{aligned}\tag{6.56}$$

Řešení. Bod $(0, 0)$ je nestabilním ohniskem. Kořeny $\lambda_{1,2} = 1 \pm i$. Obecné řešení systému (6.56) je

$$\begin{aligned}x &= e^t (C_1 \cos t + C_2 \sin t), \\y &= e^t (-C_2 \cos t + C_1 \sin t).\end{aligned}$$

□

Příklad 6.25. Charakterizujte bod $(0, 0)$ systému

$$\begin{aligned}x' &= x + 5y, \\y' &= -x - 3y.\end{aligned}\tag{6.57}$$

Řešení. Bod $(0, 0)$ je stabilním ohniskem, protože $\lambda_{1,2} = -1 \pm i$. Obecné řešení systému (6.57) je

$$\begin{aligned}x &= e^{-t}(C_1 \cos t + C_2 \sin t), \\y &= \frac{1}{5}e^{-t}((-2C_1 + C_2) \cos t - (C_1 + 2C_2) \sin t).\end{aligned}$$

□

Příklad 6.26. Charakterizujte bod $(0, 0)$ systému

$$\begin{aligned}x' &= -x, \\y' &= -y.\end{aligned}\tag{6.58}$$

Řešení. Bod $(0, 0)$ je dikritickým stabilním nevlastním uzlem. V tomto případě máme $\lambda_{1,2} = -1$. Obecné řešení systému (6.58) je:

$$\begin{aligned}x &= \alpha_1 e^{-t}, \\y &= \alpha_2 e^{-t},\end{aligned}$$

kde α_1 a α_2 jsou libovolné konstanty. □

Příklad 6.27. Charakterizujte rovnovážný bod $(0, 0)$ systému

$$\begin{aligned}x' &= -x, \\y' &= x.\end{aligned}\tag{6.59}$$

Řešení. V tomto případě je $\lambda_1 = 0$ a $\lambda_2 = -1 < 0$. Jde o stabilní bod. Obecné řešení systému (6.59) má tvar

$$\begin{aligned}x &= C_2 e^{-t}, \\y &= C_1 - C_2 e^{-t},\end{aligned}$$

kde C_1 a C_2 jsou libovolné konstanty. □

Příklad 6.28. Charakterizujte rovnovážný bod $(0, 0)$ systému

$$\begin{aligned}x' &= 3x + y, \\y' &= -x + y.\end{aligned}\tag{6.60}$$

Řešení. Bod $(0, 0)$ je nestabilním nevlastním uzlem, neboť $\lambda_{1,2} = 2$. Obecné řešení systému (6.60) je

$$\begin{aligned}x &= (C_1 + C_2 + C_2 t)e^{2t}, \\y &= (-C_1 - C_2 t)e^{2t}\end{aligned}$$

s libovolnými konstantami C_1 a C_2 . □

Cvičení

1. Vyšetřete z hlediska stability triviální řešení systémů:

a)
$$\begin{aligned}x'_1 &= x_2 \\x'_2 &= -2x_1 - 3x_2\end{aligned}$$

b)
$$\begin{aligned}x'_1 &= x_2 \\x'_2 &= 3x_1 + 2x_2\end{aligned}$$

c)
$$\begin{aligned}x'_1 &= -3x_2 \\x'_2 &= 3x_1\end{aligned}$$

2. Pomocí Hurwitzova kritéria rozhodněte o asymptotické stabilitě následujících lineárních diferenciálních rovnic a systémů lineárních diferenciálních rovnic.

a)
$$\begin{aligned}x'_1 &= 3x_2 \\x'_2 &= -3x_1 - 5x_2\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b) } x_1' &= x_2 \\ x_2' &= -x_3 \\ x_3' &= x_1 + 3x_2 - 2x_3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{c) } x_1' &= -x_2 \\ x_2' &= x_3 \\ x_3' &= x_1 - x_2 - 2x_3 \end{aligned}$$

$$\text{d) } x^{(4)} + 4x''' + 6x'' + 8x' + x = 0$$

$$\text{e) } x^{(4)} + 5x'' + 9x = 0$$

3. Michajlovovým kritériem vyšetřete stabilitu následujících systémů lineárních diferenciálních rovnic a lineárních diferenciálních rovnic vyšších řádů.

$$\begin{aligned} \text{a) } x_1' &= x_2 \\ x_2' &= x_3 \\ x_3' &= x_1 \end{aligned}$$

$$\text{b) } y''' + 6y'' + 11y' + 6y = 0$$

$$\begin{aligned} \text{c) } x_1' &= x_2 \\ x_2' &= x_3 \\ x_3' &= x_4 \\ x_4' &= -\frac{1}{2}x_1 - \frac{3}{2}x_2 - \frac{3}{2}x_3 - 2x_4 \end{aligned}$$

$$\text{d) } y^{(5)} + y^{(4)} + 7y''' + 4y'' + 10y' + 3y = 0$$

4. Charakterizujte bod $(0, 0)$ systému

$$\begin{aligned} \text{a) } x' &= -3x - 2y, \\ y' &= -2x - 2y. \end{aligned}$$

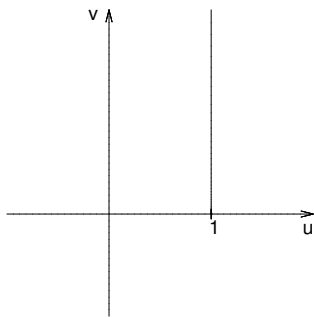
$$\begin{aligned} \text{b) } x' &= 3x + 2y, \\ y' &= 2x + 2y. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{c) } x' &= x - 5y, \\ y' &= x - 3y. \end{aligned}$$

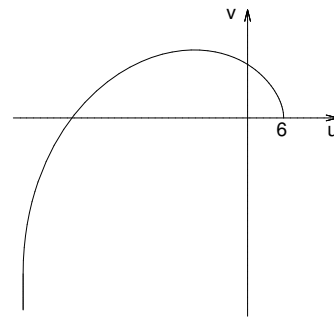
Výsledky

1. a) Stejně asymptoticky stabilní ;
- b) Nestabilní ;
- c) Stejně asymptoticky stabilní ;

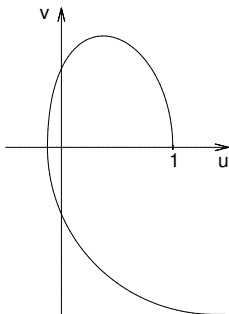
2.
 - a) Asymptoticky stabilní ;
 - b) Asymptoticky stabilní ;
 - c) Asymptoticky stabilní ;
 - d) Asymptoticky stabilní ;
 - e) Asymptoticky nestabilní ;
3.
 - a) Nestabilní, viz obrázek 6.23 ;
 - b) Asymptoticky stabilní, viz obrázek 6.24 ;
 - c) Asymptoticky stabilní, viz obrázek 6.25 ;
 - d) Asymptoticky stabilní, viz obrázek 6.26
4.
 - a) Bod $(0,0)$ je stabilním nevlastním uzlem.
 - b) Bod $(0,0)$ je nestabilním vlastním uzlem.
 - c) Bod $(0,0)$ je stabilním ohniskem.



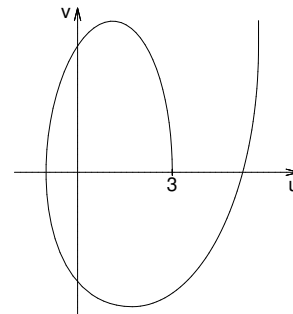
Obr. 6.23: Michajlovova křivka z příkladu 3a)



Obr. 6.24: Michajlovova křivka z příkladu 3b)



Obr. 6.25: Michajlovova křivka z příkladu 3c)



Obr. 6.26: Michajlovova křivka z příkladu 3d)

Maplety

Kliknutím na následující odkaz si lze pomocí mapletu procvičit toto téma:

1. Pomocí Hurwitzova kritéria rozhodne o stabilitě systému lineárních diferenciálních rovnic prvního řádu.

7 Parciální diferenciální rovnice prvního řádu. Některé základní pojmy a metody

7.1 Cíl kapitoly

V předchozích kapitolách jsme se zabývali obyčejnými diferenciálními rovnicemi a jejich vlastnostmi. Ukázali jsme si možnosti jejich aplikací. Řešením pro nás byla funkce závisící jen na jedné proměnné, např. $y = f(x)$. Jinými slovy, hledali jsme řešení ležící v jedné rovině. Pokud se ale budeme pohybovat v prostoru, potom budeme pracovat s funkcí více proměnných a zde budeme místo derivací používat parciální derivace.

Cílem této kapitoly je seznámit čtenáře se základy teorie parciálních diferenciálních rovnic. Stanovíme si co budeme rozumět řešením parciální diferenciální rovnice a jaké úlohy budeme řešit.

Potom se zaměříme na parciální diferenciální rovnice prvního řádu. Zformulujeme požadavky kladené na počáteční úlohu pro parciální diferenciální rovnici prvního řádu.

Ukážeme některé způsoby řešení nejjednodušších parciálních diferenciálních rovnic prvního řádu. Speciálně se budeme věnovat lineární homogenní parciální diferenciální rovnici prvního řádu.

7.2 Pojem řešení parciální diferenciální rovnice

Definice 7.1. Parciální diferenciální rovnicí rozumíme rovnici, která obsahuje neznámou funkci více proměnných a její parciální derivace.

Řád nejvyšší derivace, která se v rovnici vyskytuje, se nazývá řádem dané rovnice.

Řešením parciální diferenciální rovnice rozumíme každou funkci, která je definovaná v zadané oblasti, včetně svých parciálních derivací, až do řádu rovnice včetně, a vyhovuje dané rovnici v zadané oblasti.

Obecný tvar parciální diferenciální rovnice k -tého řádu ve které je hledaná funkce u funkcí n nezávislých proměnných x_1, x_2, \dots, x_n , tj. $u = u(x_1, x_2, \dots, x_n)$, je

$$F \left(x_1, \dots, x_n, u(x_1, \dots, x_n), \frac{\partial u}{\partial x_1}, \frac{\partial u}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial u}{\partial x_n}, \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}, \dots, \frac{\partial^k u}{\partial x_1^k}, \dots, \frac{\partial^k u}{\partial x_n^k} \right) = 0. \quad (7.1)$$

Příklad 7.2. Hledejme funkci u , která vyhovuje rovnici

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} = 0. \quad (7.2)$$

Máme tedy parciální diferenciální rovnici prvního řádu. Jejím řešením je funkce

$$u(x, y) = x - y + \pi,$$

protože

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 1, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -1,$$

v každém bodě roviny Oxy . Číslo π můžeme nahradit jiným libovolným reálným číslem. Všimněme si, že tato řešení jsou z geometrického hlediska plochami v prostoru (x, y, z) .

Obdobně se můžeme přesvědčit, že řešením bude i funkce

$$u(x, y, z) = x - y + z,$$

protože

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 1, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -1, \quad \frac{\partial z}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = 0.$$

Lehce si ověříme, že řešením bude i každá funkce

$$u(x, y, z) = x - y + f(z),$$

kde f je libovolná funkce proměnné z .

Z uvedeného příkladu plyne jeden podstatný rozdíl mezi parciálními rovnicemi a obyčejnými diferenciálními rovnicemi. Ze zápisu obyčejné diferenciální rovnice, například $y' = x + y$, okamžitě poznáme, že hledaná funkce y závisí pouze na x . Ze zápisu parciální rovnice (7.2) nepoznáme na kolika proměnných závisí řešení. Víme, že hledaná funkce u závisí na proměnných x, y , ale nevíme, zda se jedná o všechny nezávislé proměnné na kterých řešení závisí, tedy zda jde o funkci dvou, tří či více proměnných.

Přijmeme proto hned na místě úmluvu, že řešení dané parciální rovnice budeme hledat pouze mezi funkcemi těch proměnných, které se přímo v rovnici vyskytují. Bude-li hledaná neznámá funkce záviset i na proměnných, které se v rovnici nevyskytují, bude to při zápisu rovnice výslovně zdůrazněno.

Příklad 7.3. Hledáme funkci dvou proměnných $u(x, y)$, která vyhovuje rovnici

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0. \quad (7.3)$$

Máme parciální diferenciální rovnici druhého řádu. Jejím řešením je funkce

$$u(x, y) = x^2 - y^2,$$

protože

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2x, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 2, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -2y, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -2,$$

v každém bodě roviny Oxy .

Obdobně se můžeme přesvědčit, že řešením budou i funkce

$$u(x, y) = x^2 - y^2 + ax + by, \quad a, b \in R,$$

a nebo

$$u(x, y) = e^x \sin y.$$

7.3 Základní problémy řešení parciálních diferenciálních rovnic

Výše uvedené příklady ukazují na podstatnou skutečnost, že určení řešení parciální diferenciální rovnice bude pravděpodobně obtížnější, než tomu bylo u obyčejných diferenciálních rovnic.

Podobně jako u obyčejných diferenciálních rovnic máme i u parciálních rovnic dva základní problémy

1. Najít obecné řešení dané parciální rovnice, tj. najít všechna její řešení.
2. Najít takové řešení dané parciální rovnice, které vyhovuje některým doplňujícím podmínkám (které obvykle plynou z daného technického problému, který řešíme a nebo jsou součástí zadání matematického úkolu, jako další „trápení“ lidu studentského).

Najít obecné řešení parciální diferenciální rovnice může být mnohem obtížnější než u obyčejných diferenciálních rovnic. Parciální diferenciální rovnice často studujeme společně s dodatečnými podmínkami (počátečními a okrajovými).

7.4 Parciální diferenciální rovnice prvního řádu

Definice 7.4. Rovnici

$$f\left(x, y, u(x, y), \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}\right) = 0. \quad (7.4)$$

nazýváme *parciální diferenciální rovnicí prvního řádu*, kde funkce $f(x, y, u, p, q)$ je definovaná na otevřené množině D proměnných x, y, u, p, q .

Definice 7.5. Řešením rovnice (7.4) v oblasti G proměnných x, y nazveme každou takovou funkci u , definovanou a spojitou v G , pro kterou platí:

1. Funkce u má v oblasti G spojitě parciální derivace prvního řádu.

2. Pro každé $(x, y) \in G$ platí, že $\left(x, y, u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}\right) \in D$.
3. Funkce $u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}$ splňují rovnici (7.4).

Příklad 7.6. Rovnice

$$x \frac{\partial u}{\partial x} + y \frac{\partial u}{\partial y} + 2u = 0$$

má řešením funkci

$$u = \frac{1}{x^2 + y^2},$$

kteřá je definována v oblasti $G = \{(x, y) : x^2 + y^2 \neq 0\}$ (neboli funkce u je definována pro všechny body roviny Oxy kromě počátku, t.j. bodu $(0, 0)$).

Příklad 7.7. Rovnice

$$u \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \frac{\partial u}{\partial y} \ln(xy) = \frac{x^2 + y}{x^2 y} \ln(xy)$$

má jedním z řešení funkci $u = \ln(xy)$, která je definována v oblasti $G = \{(x, y) : xy > 0\}$, neboli u je definována pro všechny vnitřní body prvního a třetího kvadrantu roviny Oxy .

Poznámka 7.8. Pro určení řádu rovnice je rozhodující, jakého řádu jsou parciální derivace, které se v ní vyskytují, ne mocniny těchto derivací.

7.5 Formulace počáteční úlohy, pojem jejího řešení.

U obyčejných diferenciálních rovnic jsme se mj. zabývali počáteční Cauchyovou úlohou

$$\begin{aligned} y' &= f(x, y), \\ y(x_0) &= y_0. \end{aligned}$$

U parciálních diferenciálních rovnic je formulace podobné úlohy uvedena v následující definici.

Definice 7.9. Cauchyovou úlohou pro rovnici (7.4) rozumíme dvojici: rovnici

$$f\left(x, y, z, \frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}\right) = 0. \quad (7.5)$$

a počáteční křivku Θ zadanou parametricky

$$x = \varphi(t), \quad y = \psi(t), \quad z = \chi(t), \quad t \in (a, b). \quad (7.6)$$

Funkci $z = h(x, y)$, která má spojité parciální derivace v G , nazveme řešením Cauchyovy úlohy (7.5), (7.6), jestliže funkce h splňuje v G rovnici (7.5) a pro všechna $t \in (a, b)$ křivka $(x = \varphi(t), y = \psi(t))$ leží v G a navíc platí $\chi(t) = h(\varphi(t), \psi(t))$.

O křivce Θ budeme všude dále předpokládat, že je hladká a jednoduchá.

7.6 Nejjednodušší příklady parciálních rovnic prvního řádu

7.6.1 Rovnice typu $\frac{\partial z(x, y)}{\partial x} = 0$.

Řešením rovnice

$$\frac{\partial z(x, y)}{\partial x} = 0 \quad (7.7)$$

je buď libovolná konstanta a nebo libovolná funkce závisající pouze na proměnné y , která bude mít spojitou derivaci,

$$z(x, y) = H(y). \quad (7.8)$$

Podívejme se, jaký je geometrický význam rovnice (7.7).

V prostoru $Oxyz$ jde o rovnici válcové plochy, jejíž přímky jsou kolmé na rovinu Oyz a jsou tedy rovnoběžné s x -ovou souřadnicovou osou.

Potom lze řešit Cauchyovu úlohu pro rovnici (7.7). Máme-li danou křivku Θ , pak každým bodem křivky vedeme přímku rovnoběžnou s osou x . Dostaneme tak plochu, která je zřejmě řešením rovnice (7.7) a prochází křivkou Θ .

Křivka Θ přitom může být i prostorová, t.j. nepožadujeme, aby byla závislá pouze na proměnné y .

Vraťme se nyní zpět k analytickému řešení Cauchyovy úlohy pro rovnici (7.7).

Nechť je křivka Θ zadána parametricky

$$x = \varphi(t), \quad y = \psi(t), \quad z = \chi(t), \quad a < t < b.$$

Předpokládejme, že pro funkce $\psi(t), \chi(t)$ platí, že mají spojitě derivace v intervalu (a, b) a že funkce $\psi(t)$ je ryze monotónní (potom pro ni existuje funkce inverzní $\psi^{-1}(t)$ taková, že $\psi(\psi^{-1}(y)) = y$).

Předpokládejme, že existuje řešení $z = H(y)$ Cauchyovy úlohy pro rovnici (7.7) a že známe křivku Θ . Potom dosazením zjistíme, že platí

$$\chi(t) = H(\psi(t)). \quad (7.9)$$

Dosadíme do této rovnice $t = \psi^{-1}(y)$, dostaneme

$$\chi(\psi^{-1}(y)) = H(y), \quad (7.10)$$

a protože $H(y) = z$, máme

$$\chi(\psi^{-1}(y)) = z.$$

Tím je dokázána jednoznačnost řešení Cauchyovy úlohy.

Z druhé strany, definujeme funkci H pomocí rovnosti (7.10). Potom ale platí

$$\frac{\partial H}{\partial x} = 0,$$

neboli funkce splňující (7.10) je řešením rovnice (7.7) a současně platí (7.9), což znamená, že řešení prochází křivkou Θ .

Příklad 7.10. Najděte řešení rovnice

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 0,$$

které prochází křivkou

$$x = \varphi(t) = t, \quad y = \psi(t) = t^3, \quad z = \chi(t) = t^2, \quad t \in (-\infty, +\infty).$$

Řešení. Podle (7.10) platí, že jediným řešením této úlohy je

$$z = \chi(\psi^{-1}(y)).$$

V našem případě máme

$$\chi(t) = t^2, \quad \psi^{-1}(y) = \sqrt[3]{y}.$$

Řešením je proto

$$z = (\sqrt[3]{y})^2.$$

□

Příklad 7.11. Najděte řešení rovnice

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 0,$$

které prochází křivkou

$$x = 0, \quad z = y^2, \quad y \in (-1, 1).$$

Řešení. Počáteční křivku můžeme zapsat také takto

$$x = \varphi(t) = 0, \quad y = \psi(t) = t, \quad z = \chi(t) = t^2, \quad t \in (-1, 1).$$

Křivka Θ je v našem případě parabola, která leží v rovině Oyz . Podle předchozího platí, že řešením je válcová plocha, která prochází křivkou Θ a je rovnoběžná s x -ovou osou, takže

$$z = y^2$$

je řešením.

□

Poznámka 7.12.

1. Zcela analogicky jako rovnice $\frac{\partial z}{\partial x} = 0$ se řeší rovnice

$$\frac{\partial z(x, y)}{\partial y} = 0.$$

2. Předpoklad existence inverzní funkce ψ^{-1} je nezbytný pro existenci a jednoznačnost řešení. Pokud není splněn, Cauchyova úloha nemusí být řešitelná a nebo může mít nekonečně mnoho řešení.
3. Postup použitý při hledání řešení rovnice (7.7) můžeme zobecnit i pro parciální diferenciální rovnici více než dvou proměnných

$$\frac{\partial z(x_1, x_2, \dots, x_n)}{\partial x_i} = 0 \quad i = \{1, 2, \dots, n\}.$$

Řešením této rovnice bude funkce $z = f(x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_n)$, která nezávisí na x_i .

7.6.2 Rovnice typu $\frac{\partial z(x, y)}{\partial x} = f(x, y)$.

Řešení rovnice

$$\frac{\partial z(x, y)}{\partial x} = f(x, y), \quad (7.11)$$

za předpokladu, že $f(x, y)$ je spojitá funkce v oblasti G , je dáno vztahem

$$z = \int f(x, y) dx + H(y). \quad (7.12)$$

Důkaz existence a jednoznačnosti řešení se provádí stejně jako v předchozím případě.

Příklad 7.13. Najděte řešení rovnice

$$\frac{\partial z}{\partial x} = x^2 + xy - y^2,$$

které prochází křivkou

$$x = t, \quad y = t, \quad z = t, \quad t > 0.$$

Řešení. Křivka Θ je v našem případě osou prvního oktantu. Řešení získáme integrací podle proměnné x :

$$z = \frac{x^3}{3} + \frac{x^2 y}{2} - xy^2 + H(y).$$

Řešení musí procházet křivkou Θ . Dosazením za x, y, z parametrické vyjádření křivky Θ , dostaneme, že musí platit

$$t = \frac{t^3}{3} + \frac{t^3}{2} - t^3 + H(t).$$

Odtud dostáváme

$$H(t) = t + \frac{t^3}{6}.$$

Řešením naší úlohy je funkce

$$z = \frac{x^3}{3} + \frac{x^2 y}{2} - xy^2 + y + \frac{y^3}{6}$$

□

7.6.3 Rovnice předchozího typu s počáteční podmínkou $z(0, y) = \omega(y)$.

Hledejme nyní řešení rovnice (7.11), které vyhovuje podmínce

$$z(0, y) = \omega(y). \quad (7.13)$$

Neboli řešení $z = z(x, y)$ má procházet křivkou

$$x = 0, \quad z = \omega(y),$$

která leží v rovině Oyz . Podle vzorce (7.12) má řešení tvar

$$z(x, y) = \int_0^x f(\xi, y) d\xi + H(y). \quad (7.14)$$

Dosadíme do této rovnice podle podmínky (7.13) hodnotu $x = 0$, dostaneme

$$\omega(y) = H(y).$$

Hledané řešení má proto tvar

$$z(x, y) = \int_0^x f(\xi, y) d\xi + \omega(y).$$

Příklad 7.14. Najděte řešení rovnice

$$\frac{\partial z(x, y)}{\partial x} = 3x^2 + y \sin x,$$

které prochází křivkou $z(0, y) = y^3$.

Řešení. Podle předchozího můžeme hned psát

$$z(x, y) = \int_0^x (3\xi^2 + y \sin \xi) d\xi + y^3.$$

Po integraci dostaneme řešení ve tvaru

$$z(x, y) = x^3 + y^3 + y(1 - \cos x).$$

□

Poznámka 7.15.

1. Analogicky jako rovnice $\frac{\partial z}{\partial x} = f(x, y)$ se řeší i rovnice $\frac{\partial z}{\partial y} = f(x, y)$.
2. Obdobně jako u rovnice $\frac{\partial z}{\partial x} = 0$ i u rovnice $\frac{\partial z}{\partial x} = f(x, y)$ se může stát, že rovnice nemá řešení a nebo je řešení nekonečně mnoho.

7.6.4 Rovnice typu $\frac{\partial z(x, y)}{\partial x} = f_1(x) \cdot f_2(z)$.

Mějme rovnici

$$\frac{\partial z(x, y)}{\partial x} = f_1(x) \cdot f_2(z), \quad (7.15)$$

kde funkce f_1 je spojitá na intervalu (a, b) a f_2 je spojitá a nenulová ($f_2 \neq 0$) na intervalu (c, d) .

Řešení parciální rovnice (7.15) je analogické řešení obyčejné diferenciální rovnice se separovanými proměnnými.

$$\frac{\partial z(x, y)}{\partial x} = f_1(x) \cdot f_2(z),$$

$$\int \frac{1}{f_2(z)} dz = \int f_1(x) dx + H(y).$$

Označme $F_1(x) = \int f_1(x) dx$, $F_2(z) = \int \frac{1}{f_2(z)} dz$, potom můžeme předchozí rovnici přepsat na tvar

$$F_2(z) = F_1(x) + H(y).$$

Pokud je funkce F_2 ryze monotonní, potom můžeme z rovnice vypočítat funkci z a dostaneme

$$z(x, y) = F_2^{-1}[F_1(x) + H(y)]. \quad (7.16)$$

Přitom musíme požadovat, aby funkce $F_1(x) + H(y)$ ležela v definičním oboru funkce F_2^{-1} . Pouze tehdy má řešení smysl.

Příklad 7.16. Najděte řešení rovnice

$$\frac{\partial z(x, y)}{\partial x} = x \cdot e^z \quad (7.17)$$

Řešení. Rovnici si upravíme podle předchozího.

$$F_1(x) = \int x dx = \frac{x^2}{2},$$

$$F_2(z) = \int e^{-z} dz = -e^{-z}$$

Po dosazení máme

$$-e^{-z} = \frac{x^2}{2} + H(y).$$

Protože na pravé straně máme ryze monotonní funkci, můžeme rovnici rozřešit vzhledem k z a dostaneme

$$z = -\ln \left(-\frac{x^2}{2} - H(y) \right), \quad (7.18)$$

což je řešení rovnice (7.17). Výraz bude mít smysl pouze pro

$$\left(-\frac{x^2}{2} - H(y) \right) > 0 \quad \Rightarrow \quad \left(\frac{x^2}{2} + H(y) \right) < 0.$$

□

Pokud v rovnici (7.15) neplatí podmínka $f_2(z) \neq 0$, potom mohou existovat i řešení, která nezískáme pomocí vztahu (7.16).

Příklad 7.17. Najděte řešení rovnice

$$\frac{\partial z}{\partial x} = z. \quad (7.19)$$

Řešení. Rovnici (7.19) si upravíme podle předchozího postupu (viz 7.16).

$$\begin{aligned} \frac{\partial z}{\partial x} &= z, \\ \int \frac{dz}{z} &= \int dx, \\ \ln z &= x + H(y), \\ z &= e^{x+H(y)}, \\ z &= K(y)e^x, \end{aligned}$$

kde $K(y) = e^{H(y)}$.

Rovnice (7.19) má ale ještě řešení $z = 0$, které nezískáme žádnou volbou funkce $H(y)$, respektive $K(y)$. \square

Právě uvedený postup můžeme použít i pro ty rovnice, které obsahují pouze jednu parciální derivaci, tedy pro rovnice tvaru

$$\frac{\partial z(x, y)}{\partial x} = \varphi(x, y, z)$$

a nebo

$$\frac{\partial z(x, y)}{\partial y} = \psi(x, y, z).$$

Vztah (7.16) můžeme použít i pro řešení Cauchyovy úlohy pro odpovídající typy rovnic. Protože obecný postup by byl příliš nepřehledný, ukážeme si použití na příkladu.

7.6.5 Lineární homogenní parciální rovnice prvního řádu

Definice 7.18. Lineární parciální diferenciální rovnicí nazveme výraz

$$a(x, y) \frac{\partial z(x, y)}{\partial x} + b(x, y) \frac{\partial z(x, y)}{\partial y} = c(x, y) \cdot z(x, y) + d(x, y), \quad (7.20)$$

kde a, b, c, d jsou funkce proměnných x, y definované na otevřené množině G .

Jestliže $c(x, y) \equiv 0, d(x, y) \equiv 0$, potom se rovnice (7.20) nazývá homogenní.

7.7 Shrnutí kapitoly

Seznámili jsme se s úvodními pojmy, týkajícími se parciálních diferenciálních rovnic. Definovali jsme si obecnou parciální diferenciální rovnici a její řád.

Podrobněji jsme se seznámili s parciálními diferenciálními rovnicemi prvního řádu. Byla zformulována počáteční úloha pro parciální diferenciální rovnici prvního řádu.

Naučili jsme se řešit nejjednodušších parciální diferenciální rovnice prvního řádu. Protože v aplikacích se z parciálních diferenciálních rovnic prvního řádu nejčastěji vyskytuje lineární homogenní parciální diferenciální rovnice, věnovali jsme jí zvláštní pozornost.

7.8 Řešené příklady

Příklad 7.19. Určete řešení Cauchyovy úlohy

$$\frac{\partial z(x, y)}{\partial x} = z(x, y),$$

$$z(0, y) = y^2.$$

Řešení. Jde o stejnou rovnici jako v předchozím příkladu 7.17. Řešení proto bude mít tvar

$$z(x, y) = K(y)e^x.$$

Dosadíme do něj $x = 0$ a dostaneme

$$z(0, y) = y^2 = K(y).$$

Řešením Cauchyovy úlohy je proto funkce

$$z(x, y) = y^2 e^x.$$

□

Příklad 7.20. Určete řešení Cauchyovy úlohy

$$\frac{\partial z(x, y)}{\partial x} = ax + by + c \cdot z(x, y) + d,$$

$$z(0, y) = y^3 + 2y,$$

kde a, b, c, d jsou konstanty, přičemž $c \neq 0$.

Řešení. Budeme považovat y za konstantu a řešíme parciální rovnici jako obyčejnou lineární diferenciální rovnici.

$$\frac{dz}{dx} - c \cdot z = ax + by + d.$$

Použijeme metodu variace konstanty. Nejdříve řešíme homogenní rovnici (o pravé straně předpokládáme že je rovna nule).

$$\frac{dz}{dx} - c \cdot z = 0,$$

$$\frac{dz}{dx} = c \cdot z,$$

$$\frac{dz}{z} = c dx.$$

$$\ln z = cx + K,$$

$$z = Le^{cx},$$

kde $L = e^K$. Nyní předpokládáme, že $L = L(x, y)$, kde y je konstantou. Potom derivace L' bude značit derivaci podle proměnné x a

$$\begin{aligned} z' &= L'e^{cx} + Lce^{cx}, \\ L'e^{cx} + Lce^{cx} &= ax + by + cLe^{cx} + d, \\ L'e^{cx} &= ax + by + d, \\ L' &= (ax + by + d)e^{-cx}. \end{aligned}$$

Integrací „per partes“ dostaneme

$$\left| \begin{array}{ll} u = ax + by + d & u' = a \\ v' = e^{-cx} & v = e^{-cx} \cdot \left(\frac{-1}{c}\right) \end{array} \right|$$

$$L = (ax + by + d)e^{-cx} \cdot \left(\frac{-1}{c}\right) + \frac{a}{c} \int e^{-cx} dx,$$

$$L = (ax + by + d)e^{-cx} \cdot \left(\frac{-1}{c}\right) - \frac{a}{c^2}e^{-cx} + M.$$

Po dosazení dostaneme řešení ve tvaru

$$z = -\frac{1}{c}(ax + by + d) - \frac{a}{c^2} + Me^{cx}.$$

Tím jsme získali řešení diferenciální rovnice. Pro řešení parciální rovnice je nutné místo konstanty M brát funkci $H(y)$.

$$z = -\frac{1}{c}(ax + by + d) - \frac{a}{c^2} + H(y)e^{cx}.$$

Nyní najdeme řešení, které vyhovuje naší počáteční podmínce. Dosazením do předchozí rovnice hodnoty $x = 0$ dostaneme

$$y^3 + 2y = -\frac{b}{c}y - \frac{d}{c} - \frac{a}{c^2} + H(y),$$

a odtud plyne

$$H(y) = y^3 + 2y + \frac{b}{c}y + \frac{d}{c} + \frac{a}{c^2}.$$

Řešením Cauchyovy úlohy je tedy funkce

$$z = -\frac{1}{c}(ax + by + d) - \frac{a}{c^2} + \left(y^3 + \left(2 + \frac{b}{c}\right)y + \frac{d}{c} + \frac{a}{c^2}\right)e^{cx}.$$

□

Cvičení

1. Najděte funkci $z = z(x, y)$, vyhovující diferenciální rovnici

$$\frac{\partial z(x, y)}{\partial x} = 1.$$

Výsledky

1. Řešením úlohy je funkce

$$z(x, y) = x + \varphi(y),$$

kde $\varphi(y)$ je libovolná funkce.

8 Charakteristický systém a charakteristiky. Pfaffova rovnice.

8.1 Cíl kapitoly

V předchozí kapitole jsme si definovali parciální diferenciální rovnici a ukázali jsme si řešení nejjednodušších parciálních diferenciálních rovnic prvního řádu.

Cílem této kapitoly je pokračovat v teorii parciálních diferenciálních rovnic prvního řádu.

Zavedeme si pojem charakteristického systému a charakteristik. Ukážeme si co budeme rozumět pod pojmy obecné řešení a první integrál. Tyto pojmy nám budou sloužit pro nalezení řešení určitých typů parciálních diferenciálních rovnic prvního řádu.

Poslední část bude věnovaná Pfaffově rovnici a jejímu řešení.

8.2 Charakteristický systém.

Mějme nyní lineární parciální homogenní rovnici

$$a(x, y) \frac{\partial z(x, y)}{\partial x} + b(x, y) \frac{\partial z(x, y)}{\partial y} = 0. \quad (8.1)$$

kde a, b jsou funkce proměnných x, y definované na otevřené množině G takové, že obě nejsou současně nulové.

Uvažujme dále soustavu obyčejných diferenciálních rovnic

$$x'(t) = a(x(t), y(t)), \quad y'(t) = b(x(t), y(t)). \quad (8.2)$$

Předpokládejme, že partikulárním řešením soustavy (8.2) je $x = \varphi(t), y = \psi(t)$. Toto řešení představuje nějakou křivku Θ v rovině Oxy .

Všimněme si nyní řešení rovnice (8.1) podél křivky Θ . Máme funkci

$$z = z(t) = z(x(t), y(t)) = z(\varphi(t), \psi(t)).$$

Pro její derivaci platí

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x} x' + \frac{\partial z}{\partial y} y' = \frac{\partial z}{\partial x} a + \frac{\partial z}{\partial y} b = 0.$$

Protože derivace je rovna nule, je derivovaná funkce konstantní:

$$u(\varphi(t), \psi(t)) \equiv \text{const.}$$

Jinak řečeno - každé řešení rovnice (8.1) je konstantní podél křivky Θ . Tento jev je typickým jevem pro daný typ parciálních diferenciálních rovnic.

Definice 8.1. Systém (8.2) se nazývá charakteristickým systémem rovnice (8.1) a jeho řešení, která určují křivky Θ , nazýváme charakteristikami.

Příklad 8.2. Najděte charakteristiky rovnice

$$2\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} = 0.$$

Řešení. Sestavíme charakteristický systém (8.2). V našem případě je $a = 2, b = 1$. Hledáme řešení systému

$$\begin{aligned}x'(t) &= 2, \\y'(t) &= 1.\end{aligned}$$

Řešením je

$$x = 2t + \alpha, \quad y = t + \beta,$$

kde α, β jsou konstanty. Z první rovnice si vyjádříme parametr t a dosadíme do druhé.

$$\begin{aligned}t &= \frac{x - \alpha}{2}, \\y &= \frac{x - \alpha}{2} + \beta, \\y &= \frac{x}{2} + \gamma,\end{aligned}$$

kde $\gamma = \beta - \frac{\alpha}{2}$ je konstanta.

Řešením zadaného systému je soustava přímek $y = \frac{x}{2} + \gamma$, které tvoří hledané charakteristiky. □

Příklad 8.3. Najděte charakteristiky rovnice

$$9y\frac{\partial u}{\partial x} - 4x\frac{\partial u}{\partial y} = 0.$$

Řešení. Sestavíme si charakteristický systém. Máme $a = 9y, b = -4x$, takže hledáme řešení systému

$$\begin{aligned}x'(t) &= 9y, \\y'(t) &= -4x.\end{aligned}$$

První rovnici vynásobíme $4x$ a druhou $9y$ a sečteme, dostaneme

$$4xx' + 9yy' = 0,$$

což je rovnice se separovanými proměnnými. Její integrací dostaneme

$$4\frac{x^2}{2} + 9\frac{y^2}{2} = C,$$

$$4x^2 + 9y^2 = 2C.$$

Řešením zadaného systému jsou všechny elipsy $4x^2 + 9y^2 = 2C$, $C > 0$, $C \in \mathbb{R}$, které tvoří hledané charakteristiky. \square

8.3 První integrály, existence řešení, obecné řešení

Zabýváme se systémem (8.2), ve kterém platí $a^2 + b^2 \neq 0$, který zapíšeme ve tvaru

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= a(x(t), y(t)), \\ \frac{dy}{dt} &= b(x(t), y(t)). \end{aligned}$$

Pokud vyloučíme dt , dostaneme systém v kanonickém tvaru

$$\frac{dx}{a(x, y)} = \frac{dy}{b(x, y)}. \quad (8.3)$$

8.3.1 První integrály

Definice 8.4. Funkci $z(x, y)$ nazveme *prvním integrálem* systému (8.3) v oblasti D , jestliže $z(x, y)$ je konstantní podél každého řešení systému (8.3), které celé leží v D a jestliže $z(x, y)$ má spojitě parciální derivace prvního řádu v D .

Příklad 8.5. Najděte první integrál systému

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= 2, \\ \frac{dy}{dt} &= 4x. \end{aligned}$$

Řešení. Integrací první rovnice dostaneme

$$x(t) = 2t + C.$$

Dosazením do druhé rovnice dostaneme

$$\frac{dy}{dt} = 4(2t + C),$$

$$y(t) = \int (8t + 4C) dt = 4t^2 + 4Ct + D.$$

Tím máme určeno řešení.

Jestliže si dále vyjádříme t z první rovnice a dosadíme do druhé, dostaneme

$$t = \frac{x - C}{2},$$

$$y = 4 \left(\frac{x - C}{2} \right)^2 + 4C \left(\frac{x - C}{2} \right) + D,$$

$$y = x^2 - C^2 + D.$$

Označme $D - C^2 = P$, dostaneme $y = x^2 + P$ a nebo

$$y - x^2 = P.$$

Prvním integrálem je proto funkce $y - x^2$. □

8.3.2 Věty o existenci a jednoznačnosti řešení

Věta 8.6. *Nechť $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$, $t \in (\alpha, \beta)$ je řešení soustavy (8.2) a necht' funkce $z = z(x, y)$ je řešením parciální rovnice (8.1) a necht' pro všechna $t \in (\alpha, \beta)$ je bod $(\varphi(t), \psi(t))$ z definičního oboru funkce $z(x, y)$. Potom $z = z(\varphi(t), \psi(t)) = C$, $C \in \mathbb{R}$.*

Větu můžeme vyslovit i jinak: Řešení rovnice (8.1) jsou konstantní podél charakteristik. Každé řešení rovnice (8.1) je prvním integrálem (8.2)

Věta 8.7. *Jestliže funkce $z = z(x, y)$ má spojité parciální derivace prvního řádu v oblasti D a jestliže každým bodem $(x_0, y_0) \in D$ prochází charakteristika soustavy (8.2) a navíc je funkce $z = z(x, y)$ konstantní podél každé charakteristiky, potom je $z(x, y)$ řešením parciální rovnice (8.1).*

Pokud obě věty shrneme dohromady, dostaneme:

Věta 8.8. *Funkce $z = z(x, y)$ je řešením lineární homogenní rovnice (8.1) právě tehdy, když je prvním integrálem soustavy (8.3).*

Příklad 8.9. Najděte řešení rovnice

$$x^2 \frac{\partial z}{\partial x} + y^2 \frac{\partial z}{\partial y} = 0.$$

Řešení. Sestavíme si odpovídající charakteristickou soustavu, která má tvar

$$\frac{dx}{dt} = x^2,$$

$$\frac{dy}{dt} = y^2.$$

Soustavu si upravíme pro $x \neq 0$, $y \neq 0$ na tvar

$$\frac{1}{x^2} \frac{dx}{dt} = 1, \quad \frac{1}{y^2} \frac{dy}{dt} = 1.$$

Od první rovnice odečteme druhou a dostaneme

$$\frac{1}{x^2} \frac{dx}{dt} - \frac{1}{y^2} \frac{dy}{dt} = 0,$$

neboli

$$\frac{d}{dt} \left(-\frac{1}{x} + \frac{1}{y} \right) = 0.$$

To ale znamená, že funkce $z = -\frac{1}{x} + \frac{1}{y}$ má podél charakteristik derivace podle t rovnu nule a je tedy zde konstantní. Proto se jedná o první integrál. Protože navíc má spojitě parciální derivace (již dříve jsme předpokládali, že $x \neq 0$, $y \neq 0$), potom to podle předchozí věty znamená, že funkce z je řešením naší parciální rovnice.

O správnosti se můžeme přesvědčit přímým výpočtem.

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial \left(-\frac{1}{x} + \frac{1}{y} \right)}{\partial x} = \frac{1}{x^2},$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial \left(-\frac{1}{x} + \frac{1}{y} \right)}{\partial y} = -\frac{1}{y^2}.$$

Dosazením do původní rovnice dostaneme

$$x^2 \frac{\partial z}{\partial x} + y^2 \frac{\partial z}{\partial y} = x^2 \frac{1}{x^2} + y^2 \left(-\frac{1}{y^2} \right) = 0.$$

□

Věta 8.10. O jednoznačnosti řešení.

Nechť mají funkce $a(x, y), b(x, y)$ spojitě parciální derivace prvního řádu v oblasti D , nechť dále existuje křivka Θ zadaná parametrickými rovnicemi $x = \varphi(t), y = \psi(t), z = \chi(t), t \in (\alpha, \beta)$ taková, že její průmět do roviny Oxy leží v D . Nechť dále pro $t \in (\alpha, \beta)$ platí nerovnost

$$\begin{vmatrix} a(\varphi(t), \psi(t)) & b(\varphi(t), \psi(t)) \\ \varphi'(t) & \psi'(t) \end{vmatrix} \neq 0. \quad (8.4)$$

Potom existuje podoblast $D_1 \subset D$ obsahující křivku Θ taková, že řešení $z = z(x, y)$ parciální rovnice (8.1), které splňuje podmínku

$$z(\varphi(t), \psi(t)) = \chi(t), \quad \text{pro všechna } t \in (\alpha, \beta), \quad (8.5)$$

je jednoznačně určeno v D_1 .

Věta má pouze lokální charakter. Zaručuje nám jednoznačnost v některém okolí křivky Θ .

Pokud pracujeme s funkcemi více proměnných, postupujeme analogicky. Uvedeme nyní ilustrativní příklad.

Příklad 8.11. Najděte řešení rovnice

$$(y + z - x) \frac{\partial u}{\partial x} + (x + z - y) \frac{\partial u}{\partial y} + z \frac{\partial u}{\partial z} = 0.$$

Řešení. Sestavíme charakteristickou soustavu, která má tvar

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= y + z - x, \\ \frac{dy}{dt} &= x + z - y, \\ \frac{dz}{dt} &= z. \end{aligned}$$

Nyní sečteme první a druhou rovnici a odečteme odtud dvojnásobek třetí rovnice a dostaneme

$$\frac{dx}{dt} + \frac{dy}{dt} - 2 \frac{dz}{dt} = 0.$$

A po úpravě máme

$$\frac{d}{dt} (x + y - 2z) = 0,$$

neboli funkce $u = x + y - 2z$ má podél charakteristik derivace podle t rovnu nule a je tedy zde konstantní a proto se jedná o první integrál. Navíc má spojité parciální derivace a potom podle předchozí věty to znamená, že je u řešením naší parciální rovnice.

O správnosti se můžeme přesvědčit přímým výpočtem.

Existují i další možnosti, které můžeme získat analogickým způsobem.

Přesvědčete se sami, že řešením jsou i funkce

$$\begin{aligned} u_1 &= \ln \frac{z}{\sqrt{x-y}}, \\ u_2 &= \frac{z^2}{x-y}. \end{aligned}$$

□

8.3.3 Kvazilineární parciální diferenciální rovnice

Definice 8.12. Kvazilineární parciální diferenciální rovnicí nazveme výraz

$$a(x, y, z) \frac{\partial z(x, y)}{\partial x} + b(x, y, z) \frac{\partial z(x, y)}{\partial y} = c(x, y, z), \quad (8.6)$$

kde a, b, c jsou funkce proměnných x, y, z definované na otevřené množině G .

Řešení kvazilineární rovnice lze převést na řešení rovnice lineární. Předpokládejme, že známe funkci $z(x, y)$, která je řešením rovnice (8.6) a že platí

$$U(x, y, z) = 0, \quad (8.7)$$

kde funkce U má spojité parciální derivace. Potom platí

$$\begin{aligned} \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial U}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial x} &= 0, \\ \frac{\partial U}{\partial y} + \frac{\partial U}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial y} &= 0. \end{aligned}$$

První rovnici vynásobíme funkcí $a(x, z, y)$ a druhou funkcí $b(x, y, z)$ a sečteme je. (Argumenty funkcí jsou pro přehlednost vynechány.)

$$\begin{aligned} a \frac{\partial U}{\partial x} + a \frac{\partial U}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial x} + b \frac{\partial U}{\partial y} + b \frac{\partial U}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial y} &= 0, \\ a \frac{\partial U}{\partial x} + b \frac{\partial U}{\partial y} + \frac{\partial U}{\partial z} \left(a \frac{\partial z}{\partial x} + b \frac{\partial z}{\partial y} \right) &= 0, \end{aligned}$$

Navíc podle rovnice (8.6) platí, že závorka v předchozím výrazu je rovna c , takže jsme dostali

$$a \frac{\partial U}{\partial x} + b \frac{\partial U}{\partial y} + c \frac{\partial U}{\partial z} = 0. \quad (8.8)$$

Dokázané tvrzení lze obrátit. My jej budeme používat častěji v obráceném tvaru:

Věta 8.13. *Nechť funkce $U = U(x, y, z)$ je definována v $D \subset \mathbb{R}^3$, má zde spojité parciální derivace, splňuje rovnici (8.8) a $\frac{\partial U}{\partial z} \neq 0$. Nechť funkce $z = z(x, y)$ je řešením rovnice (8.7), má spojité parciální derivace a $z = z(x, y) \in D$, potom je funkce z řešením rovnice (8.6).*

Příklad 8.14. Najděte řešení rovnice

$$\frac{\partial z}{\partial x} + 2 \frac{\partial z}{\partial y} = 3.$$

Řešení. Hledáme funkci U , která bude splňovat rovnici (8.8). Takže má platit

$$\frac{\partial U}{\partial x} + 2 \frac{\partial U}{\partial y} + 3 \frac{\partial U}{\partial z} = 0.$$

Sestavíme si charakteristickou soustavu, která má tvar

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= 1, \\ \frac{dy}{dt} &= 2, \end{aligned}$$

$$\frac{dz}{dt} = 3.$$

Nyní sečteme první a druhou rovnici a odečteme odtud třetí rovnici a dostaneme

$$\frac{dx}{dt} + \frac{dy}{dt} - \frac{dz}{dt} = 0.$$

Integrací dostaneme první integrál

$$x + y - z.$$

Jestliže první rovnici charakteristické soustavy vynásobíme třemi a odečteme od ní poslední rovnici, dostaneme

$$3\frac{dx}{dt} - \frac{dz}{dt} = 0,$$

a první integrál je potom

$$3x - z.$$

Jestliže druhou rovnici charakteristické soustavy vynásobíme třemi a odečteme od ní dvojnásobek třetí rovnice, dostaneme

$$3\frac{dy}{dt} - 2\frac{dz}{dt} = 0$$

a první integrál je potom

$$3y - 2z.$$

Vyjádříme si z prvních integrálů funkci z a dostaneme tak tři různá řešení naší rovnice:

$$z_1(x, y) = x + y, \quad z_2(x, y) = 3x, \quad z_3(x, y) = \frac{3}{2}y.$$

O správnosti se můžeme přesvědčit přímým výpočtem. □

Příklad 8.15. Najděte řešení rovnice

$$(z - y)\frac{\partial u}{\partial x} + (x - z)\frac{\partial u}{\partial y} + (y - x)\frac{\partial u}{\partial z} = 0,$$

které vyhovuje podmínce

$$u(0, y, z) = yz.$$

Řešení. Najdeme nejdříve řešení. Sestavíme si charakteristickou soustavu, která má tvar

$$\frac{dx}{dt} = z - y,$$

$$\frac{dy}{dt} = x - z,$$

$$\frac{dz}{dt} = y - x.$$

Sečteme rovnice a dostaneme

$$\frac{dx}{dt} + \frac{dy}{dt} + \frac{dz}{dt} = 0.$$

Integrací dostaneme první integrál

$$u_1(x, y, z) = x + y + z.$$

Jestliže první rovnici charakteristické soustavy vynásobíme $2x$ a druhou $2y$ a poslední rovnici $2z$ a sečteme, dostaneme

$$2x \frac{dx}{dt} + 2y \frac{dy}{dt} + 2z \frac{dz}{dt} = 0,$$

a první integrál je potom

$$u_2(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2.$$

Tím jsme získali dvě řešení naší rovnice. Navíc jestliže F je libovolná funkce dvou proměnných se spojitými parciálními derivacemi, potom je řešením naší rovnice i funkce

$$u(x, y, z) = F(x + y + z, x^2 + y^2 + z^2).$$

Hledáme nyní funkci, která splňuje naši podmínku. Dosazením $x = 0$ dostaneme

$$\begin{aligned} u(0, y, z) &= F(y + z, y^2 + z^2), \\ yz &= F(y + z, y^2 + z^2). \end{aligned}$$

Dá se uhodnout, že podmínka bude splněna, pokud $F(s, t) = \frac{1}{2}(s^2 - t)$, neboli

$$\begin{aligned} u(x, y, z) &= \frac{1}{2}((x + y + z)^2 - (x^2 + y^2 + z^2)), \\ u(x, y, z) &= xy + yz + xz. \end{aligned}$$

O správnosti se můžeme přesvědčit přímým výpočtem. □

Věta 8.16. *Nechť funkce a, b, c mají spojitě parciální derivace v oblasti $D \in \mathbb{R}^3$. Jestliže křivka Θ s parametrickým vyjádřením*

$$x = \varphi(t), \quad y = \psi(t), \quad z = \chi(t), \quad t \in (\alpha, \beta),$$

leží v oblasti D , její průmět do roviny Oxy označíme τ a ještě platí, že pro všechna $t \in (\alpha, \beta)$ je

$$\begin{vmatrix} a(\varphi(t), \psi(t), \chi(t)) & b(\varphi(t), \psi(t), \chi(t)) \\ \varphi'(t) & \psi'(t) \end{vmatrix} \neq 0.$$

Potom existuje v rovině Oxy oblast G obsahující křivku τ taková, že řešení $z = z(x, y)$ rovnice (8.6) je v G jednoznačné.

Věta má opět pouze lokální charakter.

Obvykle se charakteristiky rovnice (8.8) nazývají i charakteristikami rovnice (8.6). Potom platí následující věta.

Věta 8.17. *Nechť je plocha*

$$z = f(x, y) \quad (8.9)$$

tvořena charakteristikami rovnice (8.6) a nechť funkce $f(x, y)$ má spojité parciální derivace. Potom je $f(x, y)$ řešením rovnice (8.6). Obráceně - jestliže funkce $f(x, y)$ je řešením rovnice (8.6), potom každá charakteristika, která má s $f(x, y)$ aspoň jeden společný bod, leží celá na ploše (8.9).

Příklad 8.18. Najděte řešení Cauchyovy úlohy

$$z(x+z)\frac{\partial z}{\partial x} - y(y+z)\frac{\partial z}{\partial y} = 0,$$

$$z = \sqrt{y} \quad \text{pro } x = 1.$$

Řešení. Sestavíme si charakteristickou soustavu, která má tvar

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= z(x+z), \\ \frac{dy}{dt} &= -y(y+z), \\ \frac{dz}{dt} &= 0. \end{aligned}$$

V dané rovnici se nevyskytuje parciální derivace podle z , proto je derivace z podle t rovna nule. Integrací poslední rovnice dostaneme

$$z = A, \quad A \in \mathbb{R}.$$

Dosadíme do zbývajících rovnic a dostaneme dvě obyčejné diferenciální rovnice, které už umíme řešit. Pro první rovnici máme

$$\frac{dx}{dt} = A(x+A),$$

integrací dostaneme

$$\begin{aligned} \frac{dx}{x+A} &= A dt, \\ \ln(x+A) &= At + \ln B, \quad B \in \mathbb{R}, \\ x &= Be^{At} - A. \end{aligned}$$

Druhá rovnice nám dává

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dt} &= -y(y+A), \\ \frac{dy}{-y(y+A)} &= dt. \end{aligned}$$

Levou stranu rozložíme na parciální zlomky a integrací dostaneme

$$\begin{aligned} - \int \left(\frac{1}{Ay} - \frac{1}{A(A+y)} \right) dy &= \int dt, \\ - \left(\frac{1}{A} \ln y - \frac{1}{A} \ln(A+y) \right) &= t + C, \quad C \in \mathbb{R}, \\ \ln \left(\frac{A+y}{y} \right) &= At + \ln K, \\ \frac{y+A}{y} &= Ke^{At}, \\ y+A &= yKe^{At}, \\ y &= \frac{A}{Ke^{At} - 1}. \end{aligned}$$

Označme $K = \frac{1}{C}$, potom máme

$$\begin{aligned} y &= \frac{A}{\frac{1}{C}e^{At} - 1}, \\ y &= \frac{AC}{e^{At} - C}. \end{aligned}$$

Takže jsme získali charakteristiky

$$x = Be^{At} - A, \quad y = \frac{AC}{e^{At} - C}, \quad z = A, \quad A, B, C \in \mathbb{R}.$$

Počáteční křivku si vyjádříme parametricky

$$x = 1, \quad y = \xi^2, \quad z = \xi.$$

Najdeme nyní takové hodnoty A, B, C , aby se charakteristiky a počáteční křivka protínaly. Do rovnice charakteristik dosadíme za x, y, z parametrické vyjádření počáteční křivky a současně volíme $t = 0$.

$$1 = Be^{A0} - A, \quad \xi^2 = \frac{AC}{e^{A0} - C}, \quad \xi = A.$$

Po úpravě máme

$$A = \xi, \quad B = 1 + \xi, \quad C = \frac{\xi}{1 + \xi}.$$

Dosazením potom dostaneme

$$x = (1 + \xi)e^{\xi t} - \xi, \quad y = \frac{\xi^2}{(1 + \xi)e^{\xi t} - \xi}, \quad z = \xi.$$

Pravá strana vyjádření x je rovna jmenovateli ve vyjádření y a proto

$$xy = \xi^2 \Rightarrow \sqrt{xy} = \xi,$$

z rovnosti pravých stran plyne rovnost levých stran a máme

$$z = \sqrt{xy}.$$

O správnosti se můžeme přesvědčit přímým výpočtem. \square

8.4 Pfaffova rovnice.

Definice 8.19. Pfaffovou rovnicí nazveme výraz

$$Pdx + Qdy + Rdz = 0, \quad (8.10)$$

kde P, Q, R jsou funkce proměnných x, y, z definované v oblasti D .

Pro jednoduchost budeme předpokládat, že platí $R \neq 0$ v D . Potom můžeme rovnici (8.10) upravit na tvar

$$dz = -\frac{P}{R}dx - \frac{Q}{R}dy, \quad (8.11)$$

neboli při řešení hledáme takovou funkci $z(x, y)$, jejíž totální diferenciál vyhovuje rovnici (8.11).

Uvedeme si nejdříve geometrický význam Pfaffovy rovnice a jejího řešení:

Trojice funkcí P, Q, R určuje v každém bodě oblasti D vektor = směr. Jestliže

$$x = \varphi(t), \quad y = \psi(t), \quad z = \chi(t) \quad (8.12)$$

jsou parametrické rovnice trojice funkcí, které splňují rovnici (8.10), potom tečna ke křivce zadané rovnicemi (8.12) je kolmá na směr určený vektorem (P, Q, R) . Stačí si jen uvědomit, že rovnice (8.10) představuje skalární součin vektoru (P, Q, R) a tečny (x', y', z') .

Analogicky, pokud je $z = h(x, y)$ (obecně je z rovnicí plochy) řešením rovnice (8.11), potom tečná rovina k ploše $z = h(x, y)$ je kolmá ke směru určenému vektorem (P, Q, R) .

Takže při řešení Pfaffovy rovnice hledáme křivku, nebo plochu, která je kolmá ke směru určenému vektorem (P, Q, R) .

Věta 8.20. *Je-li rovnice (8.10) řešitelná v D a jestliže mají funkce P, Q, R spojitě parciální derivace, potom v D platí*

$$P \left(\frac{\partial Q}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial y} \right) + Q \left(\frac{\partial R}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial z} \right) + R \left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x} \right) = 0. \quad (8.13)$$

Podmínce (8.13) se říká podmínka řešitelnosti a nebo podmínka integrability Pfaffovy rovnice.

Věta 8.21. *Jestliže mají v D funkce P, Q, R spojitě parciální derivace a v každém bodě D je splněna podmínka (8.13), potom v D existují funkce $\mu = \mu(x, y, z) \neq 0$ a $F(x, y, z)$ takové, že platí*

$$dF = \mu(Pdx + Qdy + Rdz),$$

neboli

$$\frac{\partial F}{\partial x} = \mu P, \quad \frac{\partial F}{\partial y} = \mu Q, \quad \frac{\partial F}{\partial z} = \mu R.$$

Věta má pouze lokální platnost.

Funkce μ se nazývá *integrační faktor*.

Příklad 8.22. Mějme rovnici

$$y^2 dx + x dy + xy^2 dz = 0.$$

Podmínka řešitelnosti (8.13) má tvar

$$-2xy^3 z + xy^2 z + xy^2 z(2y - 1) = 0.$$

v tomto případě lze integrační faktor „uhádnout“. Jestliže vezmeme $\mu = \frac{1}{xy^2}$, potom pro $x > 0, y > 0$ máme

$$\frac{1}{x} dx + \frac{1}{y^2} dy + z dz = 0.$$

Levá strana je úplným diferenciálem funkce

$$F = \ln x - \frac{1}{y} + \frac{z^2}{2}.$$

Věta 8.23. Jestliže mají v D funkce P, Q, R spojité parciální derivace, $R \neq 0$ v D a v každém bodě D je splněna podmínka (8.13). Potom každým bodem D prochází právě jedno řešení rovnice (8.10).

Věta má opět pouze lokální charakter.

Definice 8.24. Pfaffova rovnice se separovanými proměnnými má tvar

$$P_1(x)P_2(y)P_3(z)dx + Q_1(x)Q_2(y)P_3(z)dy + P_2(y)Q_1(x)R(z)dz = 0, \quad (8.14)$$

přičemž P_i, Q_j, R jsou spojité v D a $P_2(y)P_3(z)Q_1(x) \neq 0$.

Příklad 8.25. Najděte integrační faktor pro rovnici (8.14).

Řešení. Mějme rovnici (8.14). Vydělíme ji součinem $P_2(y)P_3(z)Q_1(x)$ a dostaneme

$$\frac{P_1(x)}{Q_1(x)} dx + \frac{Q_2(y)}{P_2(y)} dy + \frac{R(z)}{P_3(z)} dz = 0.$$

Po této úpravě je koeficient u dx pouze funkcí x , koeficient u dy pouze funkcí y a koeficient u dz pouze funkcí z . Integrací levé strany dostaneme řešení

$$\int \frac{P_1(x)}{Q_1(x)} dx + \int \frac{Q_2(y)}{P_2(y)} dy + \int \frac{R(z)}{P_3(z)} dz = 0.$$

Integračním faktorem pro rovnici (8.14) je proto $\frac{1}{P_2(y)P_3(z)Q_1(x)}$. □

Příklad 8.26. Určete řešení rovnice

$$Ay^2z^2dx + Bz^2x^2dy + Cx^2y^2dz = 0,$$

v oblasti $x > 0, y > 0, z > 0$, kde A, B, C jsou kladné konstanty.

Řešení. Separujeme si proměnné - vydělíme rovnici výrazem $x^2y^2z^2$ a dostaneme

$$\frac{A}{x^2}dx + \frac{B}{y^2}dy + \frac{C}{z^2}dz = 0.$$

Integrací levé strany dostaneme řešení

$$-\frac{A}{x} - \frac{B}{y} - \frac{C}{z} = -k,$$

neboli

$$\frac{A}{x} + \frac{B}{y} + \frac{C}{z} = k,$$

kde k je nějaká kladná konstanta. Ve většině případů pokládáme poslední rovnici za řešení naší úlohy. Je sice možné prohlásit některou z proměnných za závisle proměnnou a vyjádřit ji pomocí zbývajících. Tento postup ale nelze použít vždy. Závisí to na tvaru řešení. V našem případě pokud prohlásíme za neznámou funkci z , tak dostaneme

$$z = \frac{1}{C \left(k - \frac{A}{x} - \frac{B}{y} \right)}.$$

□

Řešení Pfaffovy rovnice lze snadno najít v případě, že rovnice (8.10) má tvar

$$P(x, y)dx + Q(x, y)dy + R(z)dz = 0, \quad (8.15)$$

neboli jestliže máme separovanou proměnnou z . Podmínka (8.15) má potom tvar

$$R(z) \left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x} \right) = 0.$$

Protože většinou máme i požadavek, že $R(z) \neq 0$, můžeme podmínku zapsat ve tvaru

$$\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x} = 0,$$

neboli

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}. \quad (8.16)$$

Jestliže navíc mají funkce P, Q spojitě parciální derivace, potom rovnice (8.16) je nutnou a postačující podmínkou pro to, aby výraz

$$Pdx + Qdy$$

byl totálním diferenciálem nějaké funkce $F(x, y)$. Rovnici (8.15) můžeme potom zapsat ve tvaru

$$dF(x, y) + R(z)dz = 0.$$

Její řešením potom bude funkce

$$F(x, y) + \int R(z)dz.$$

Příklad 8.27. Určete řešení, pokud existuje, rovnice

$$ydx + xdy + zdz = 0.$$

Řešení. Máme $P = y, Q = x, R = z$. Podmínka řešitelnosti má tvar

$$R \left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x} \right) = z(1 - 1) = z \cdot 0 = 0.$$

Rovnice je řešitelná a podle předchozího je její řešení ve tvaru

$$F(x, y) + \int R(z)dz,$$

$$F(x, y) + \frac{z^2}{2}.$$

Najdeme si funkci F stejným postupem jako při řešení exaktní rovnice. Protože platí

$$\frac{\partial F}{\partial x} = y,$$

je

$$F = xy + \varphi(y).$$

Současně musí platit

$$\frac{\partial F}{\partial y} = x,$$

takže po dosazení máme

$$x + \varphi'(y) = x,$$

$$\varphi'(y) = 0,$$

$$\varphi(y) = C.$$

Takže jsme dostali

$$F(x, y) = xy + C$$

a řešení naší rovnice je funkce

$$xy + \frac{z^2}{2} + C.$$

□

8.5 Shrnutí kapitoly

Seznámili jsme se s další částí teorie parciálních diferenciálních rovnic prvního řádu.

Ukázali jsme si, jak pomocí charakteristického systému můžeme získat obecné řešení. Naučili jsme se řešit Pfaffovu rovnici.

Všechny pojmy byly důsledně ilustrovány na příkladech.

8.6 Řešené příklady

Příklad 8.28. Najděte integrační faktor pro rovnici (8.14).

Řešení. Mějme rovnici (8.14). Vydělíme ji součinem $P_2(y)P_3(z)Q_1(x)$ a dostaneme

$$\frac{P_1(x)}{Q_1(x)}dx + \frac{Q_2(y)}{P_2(y)}dy + \frac{R(z)}{P_3(z)}dz = 0.$$

Po této úpravě je koeficient u dx pouze funkcí x , koeficient u dy pouze funkcí y a koeficient u dz pouze funkcí z . Integrací levé strany dostaneme řešení

$$\int \frac{P_1(x)}{Q_1(x)}dx + \int \frac{Q_2(y)}{P_2(y)}dy + \int \frac{R(z)}{P_3(z)}dz = 0.$$

Integračním faktorem pro rovnici (8.14) je proto $\frac{1}{P_2(y)P_3(z)Q_1(x)}$. □

Příklad 8.29. Určete řešení rovnice

$$Ay^2z^2dx + Bz^2x^2dy + Cx^2y^2dz = 0,$$

v oblasti $x > 0, y > 0, z > 0$, kde A, B, C jsou kladné konstanty.

Řešení. Separujeme si proměnné - vydělíme rovnici výrazem $x^2y^2z^2$ a dostaneme

$$\frac{A}{x^2}dx + \frac{B}{y^2}dy + \frac{C}{z^2}dz = 0.$$

Integrací levé strany dostaneme řešení

$$-\frac{A}{x} - \frac{B}{y} - \frac{C}{z} = -k,$$

neboli

$$\frac{A}{x} + \frac{B}{y} + \frac{C}{z} = k,$$

kde k je nějaká kladná konstanta. Ve většině případů pokládáme poslední rovnici za řešení naší úlohy. Je sice možné prohlásit některou z proměnných za závisle proměnnou a vyjádřit

ji pomocí zbývajících. Tento postup ale nelze použít vždy. Závisí to na tvaru řešení. V našem případě pokud prohlásíme za neznámou funkci z , tak dostaneme

$$z = \frac{1}{C \left(k - \frac{A}{x} - \frac{b}{y} \right)}.$$

□

Příklad 8.30. Určete řešení, pokud existuje, rovnice

$$ydx + xdy + zdz = 0.$$

Řešení. Máme $P = y, Q = x, R = z$. Podmínka řešitelnosti má tvar

$$R \left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x} \right) = z(1 - 1) = z \cdot 0 = 0.$$

Rovnice je řešitelná a podle předchozího je její řešení ve tvaru

$$F(x, y) + \int R(z)dz,$$

$$F(x, y) + \frac{z^2}{2}.$$

Najdeme si funkci F stejným postupem jako při řešení exaktní rovnice. Protože platí

$$\frac{\partial F}{\partial x} = y,$$

je

$$F = xy + \varphi(y).$$

Současně musí platit

$$\frac{\partial F}{\partial y} = x,$$

takže po dosazení máme

$$x + \varphi'(y) = x,$$

$$\varphi'(y) = 0,$$

$$\varphi(y) = C.$$

Takže jsme dostali

$$F(x, y) = xy + C$$

a řešení naší rovnice je funkce

$$xy + \frac{z^2}{2} + C.$$

□

Cvičení

1. Najděte obecné řešení rovnice

$$x \frac{\partial z}{\partial x} + y \frac{\partial z}{\partial y} = z.$$

2. Najděte řešení rovnice

$$(x^2 + y^2) \frac{\partial z}{\partial x} + 2xy \frac{\partial z}{\partial y} = 0.$$

- 3.

$$yz \frac{\partial z}{\partial x} + xz \frac{\partial z}{\partial y} = -2xy,$$

procházející kružnicí $x^2 + y^2 = 16$, $z = 3$.

Výsledky

1. Obecné řešení má tvar

$$z = x\psi\left(\frac{y}{x}\right),$$

kde ψ je libovolná diferencovatelná funkce.

2. Obecné řešení má tvar

$$z = \psi\left(\frac{y}{x^2 - y^2}\right),$$

kde ψ je libovolná diferencovatelná funkce.

3. Řešení dané úlohy je kulovou plochou

$$x^2 + y^2 + z^2 = 25.$$

9 Parciální diferenciální rovnice druhého řádu

9.1 Cíl kapitoly

V předchozích dvou kapitolách jsme se zabývali parciálními diferenciálními rovnicemi prvního řádu a jejich vlastnostmi.

Řada technických problémů, zvláště v elektrotechnice, se dá popsat pomocí parciálních diferenciálních rovnic druhého řádu. Proto se jimi teď budeme věnovat samostatně.

Cílem této kapitoly je seznámit čtenáře s pojmy o parciálních diferenciálních rovnicích druhého řádu.

Hlavní pozornost budeme věnovat lineárním parciálním diferenciálním rovnicím druhého řádu. Připomeneme si klasifikaci lineárních parciálních diferenciálních rovnic druhého řádu na rovnice eliptické, parabolické a hyperbolické. Dále si uvedeme větu o transformaci, která nám zajišťuje, že každou lineární parciální diferenciální rovnici druhého řádu můžeme lokální transformací převést na kanonický tvar. Ukážeme si způsoby provedení transformace pro různé typy rovnic.

9.2 Klasifikace rovnic na hyperbolické, parabolické a eliptické

Definice 9.1. Parciální diferenciální rovnicí druhého řádu dvou proměnných rozumíme rovnici

$$F\left(x, y, u(x, y), \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}, \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) = 0.$$

Definice 9.2. Parciální diferenciální rovnicí druhého řádu tří proměnných rozumíme rovnici

$$F\left(x, y, z, u(x, y, z), \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial z}, \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}, \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial z}, \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial z}, \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right) = 0.$$

Příklad 9.3. Parciální diferenciální rovnice druhého řádu se často používají při popisu fyzikálních a technických dějů a procesů. Následují některé parciální rovnice, které se

používají v elektrotechnice a příbuzných oborech.

$$\Delta u \equiv \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0 \quad \text{Laplaceova rovnice (elektrostatické pole),}$$

$$\Delta u = f \quad \text{Poissonova rovnice (elektrostatické pole s volnými náboji),}$$

$$\Delta u = a^2 u \quad \text{Helmholzova rovnice (stacionární vlnová rovnice),}$$

$$\Delta u = a \frac{\partial u}{\partial t} \quad \text{difusní rovnice ,}$$

$$\Delta u = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \quad \text{vlnová rovnice (šíření elektromagnetických vln),}$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(v \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(v \frac{\partial u}{\partial y} \right) = -J, \quad v = v(|\text{grad } u|) \quad \text{rovinné stacionární magnetické pole,}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0 \quad \text{rovnice pro kmity struny,}$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \quad \text{rovnice vedení tepla.}$$

Definice 9.4. Kvazilineární parciální diferenciální rovnicí druhého řádu dvou proměnných rozumíme rovnici

$$A \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + B \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + C \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + K = 0, \quad (9.1)$$

kde funkce A, B, C, K jsou funkcemi $x, y, u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}$.

Definice 9.5. Lineární parciální diferenciální rovnicí druhého řádu dvou proměnných rozumíme rovnici

$$a(x, y) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + b(x, y) \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + c(x, y) \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + d(x, y) \frac{\partial u}{\partial x} + e(x, y) \frac{\partial u}{\partial y} + g(x, y)u = f(x, y). \quad (9.2)$$

Funkce a, b, c, d, e, g, f jsou spojité v oblasti $\Omega \subset \mathbb{R}^2$, přičemž aspoň jedna z funkcí a, b, c je nenulová v každém bodě $(x, y) \in \Omega$.

Řešením rovnice (9.1) v oblasti Ω rozumíme každou funkci $u(x, y) \in C^2(\Omega)$, která v Ω identicky splňuje (9.1).

Analogií počátečních podmínek pro obyčejné diferenciální rovnice druhého řádu je předepsání funkční hodnoty řešení na nějaké křivce spolu s předepsáním hodnoty derivace řešení v nějakém směru různém od tečného směru křivky na niž jsou tyto hodnoty předepsány, to jest $u(x, y) = h(x, y)$ a $u'_{\vec{s}} = s(x, y)$ pro $[x, y] \in l = \{[x(t), y(t)], t \in I\}$. Podobně jako u parciálních diferenciálních rovnic prvního řádu nemohou být tyto křivky voleny libovolně. V tomto případě není důvodem skutečnost, že by hledané řešení mělo předepsané hodnoty na těchto křivkách, ale zaměříme se na možnost jednoznačně určit hodnoty parciální derivací druhého řádu řešení studované rovnice.

V dalších úvahách budeme předpokládat existenci všech požadovaných derivací, abychom se mohli zabývat Taylorovým rozvojem řešení, přesněji se omezíme na možnost z počátečních podmínek jednoznačně určit hodnoty druhých parciálních derivací řešení $u(x, y)$ na křivce l . Pro větší přehlednost zapíšeme rovnici (9.2) ve tvaru:

$$a \cdot u''_{xx} + 2b \cdot u''_{xy} + c \cdot u''_{yy} = P(x, y, u, u'_x, u'_y).$$

Dále zavedeme dvě funkce jedné reálné proměnné

$$P1(t) = u'_x(x(t), y(t)) \quad P2(t) = u'_y(x(t), y(t)),$$

pro jejichž derivace platí vztahy

$$\dot{P}1 = u''_{xx}\dot{x} + u''_{xy}\dot{y} \quad \dot{P}2 = u''_{xy}\dot{x} + u''_{yy}\dot{y},$$

kteřé spolu s rovnicí (9.2) tvoří soustavu 3 lineárních rovnic o neznámých u''_{xx} , u''_{xy} , u''_{yy} :

$$\begin{aligned} au''_{xx} + 2bu''_{xy} + cu''_{yy} &= P \\ \dot{x}u''_{xx} + \dot{y}u''_{xy} &= P1 \\ \dot{x}u''_{xy} + \dot{y}u''_{yy} &= P2. \end{aligned}$$

Poznamenejme, že funkce stojící v rovnicích vpravo tj. P , $P1$, $P2$ jsou jednoznačně určeny počátečními podmínkami, tedy aby bylo možno jednoznačně určit hodnoty všech parciálních derivací druhého řádu musí být determinant matice soustavy nenulový. V opačném případě tj.

$$\begin{vmatrix} a & 2b & c \\ \dot{x} & \dot{y} & 0 \\ 0 & \dot{x} & \dot{y} \end{vmatrix} = a(\dot{y})^2 - 2b\dot{x}\dot{y} + c(\dot{x})^2 = 0,$$

lze obdrženou rovnici přepsat na charakteristickou rovnici s využitím vztahu $y' = \frac{\dot{y}}{\dot{x}}$:

$$a(y')^2 - 2by' + c = 0. \quad (9.3)$$

Tato rovnice je obyčejnou diferenciální rovnicí prvního řádu v implicitním tvaru. Vzhledem k derivaci $y'(x)$ se jedná o rovnici kvadratickou a podle znaménka diskriminantu $D = b^2 - 4ac$ této kvadratické rovnice klasifikujeme lineární parciální diferenciální rovnice.

Definice 9.6. Řekneme, lineární parciální diferenciální rovnice druhého řádu je:

- **hyperbolického typu**, jestliže $D > 0$,
- **parabolického typu**, jestliže $D = 0$,
- **eliptického typu**, jestliže $D < 0$.

Podobně jako u parciálních diferenciálních rovnic prvního řádu nám znalost řešení charakteristické rovnice nebo-li znalost charakteristik umožňuje v mnohých případech dané rovnice řešit a to tak, že danou rovnici převedeme do kanonického tvaru, který je obvykle vhodnější pro určení řešení. Tyto kanonické tvary jsou členěny ve shodě s výše uvedenou klasifikací.

9.3 Kanonické tvary

Předpokládejme, že všechny dílčí úlohy potřebné k převodu na kanonické tvary budeme schopni řešit. Jedná se především o nalezení řešení obyčejné diferenciální rovnice 1. řádu, o které budeme předpokládat, že její řešení existuje a je jediné.

9.3.1 Hyperbolický typ

V tomto případě má charakteristická rovnice řešení ve tvaru dvou jedno parametrických soustav křivek určených implicitně rovnicemi

$$\varphi(x, y) = C_1 \quad \psi(x, y) = C_2,$$

které vyhovují charakteristické rovnici (9.3). Dále předpokládejme, že k substituci zadané rovnicemi

$$\xi = \varphi(x, y) \quad \eta = \psi(x, y),$$

existuje ve studované oblasti inverzní transformace a můžeme tedy definovat novou funkci $U(\xi, \eta)$ vztahem

$$u(x, y) = U(\varphi(x, y), \psi(x, y)).$$

Po substituci obdržíme pro funkci $U(\xi, \eta)$ diferenciální rovnici, kterou můžeme zapsat ve tvaru

$$U''_{\xi\eta} = \tilde{P}(\xi, \eta, U, U'_\xi, U'_\eta),$$

který je jednodušší, neboť obsahuje pouze jednu parciální derivaci druhého řádu. Celý postup budeme ilustrovat na příkladu. Pro jeho pochopení je vhodné si připomenout vztahy mezi derivacemi funkcí více proměnných, které jsou obsaženy ve složené funkci více proměnných:

$$u'_x = U'_\xi \xi'_x + U'_\eta \eta'_x \quad u'_y = U'_\xi \xi'_y + U'_\eta \eta'_y,$$

které lze symbolicky odvozovat s využitím znalosti diferenciálu funkce více proměnných.

Příklad 9.7. Proveďte klasifikaci lineární parciální diferenciální rovnice druhého řádu

$$x^2 u''_{xx} - 3xy u''_{xy} + 2y^2 u''_{yy} + xu'_x + xu'_x + 2yu'_y = 0 \quad (9.4)$$

a převedte ji na kanonický tvar.

Řešení. Tato rovnice má charakteristickou rovnici ve tvaru

$$x^2 (y')^2 + 3xyy' + 2y^2 = 0.$$

Jedná se hyperbolický typ, protože $D = (3xy)^2 - 4x^2 2y^2 = x^2 y^2 > 0$ s výjimkou počátku. Daná charakteristická rovnice může být chápána jako dvojice obyčejných diferenciálních rovnic:

$$x^2 (y')^2 + 3xyy' + 2y^2 = (xy' + y)(xy' + 2y) = 0 \equiv y' = -\frac{y}{x}, \quad y' = -2\frac{y}{x}.$$

Jedná se rovnice se separovanými proměnnými, které obě mají obecné řešení ve tvaru jedno parametrického systému křivek:

$$y = \frac{C_1}{x} \quad y = \frac{C_2}{x^2}.$$

Tedy transformace převádějící zadanou rovnici na kanonický tvar je dána:

$$\xi = xy \quad \eta = x^2y$$

a pro první derivace platí:

$$u'_x = U'_\xi y + U'_\eta 2xy \quad u'_y = U'_\xi x + U'_\eta x^2.$$

Výpočet parciálních derivací druhého řádu budeme ilustrovat na derivaci u''_{xx} :

$$u''_{xx} = \frac{\partial U'_\xi y}{\partial x} + \frac{\partial U'_\eta 2xy}{\partial x} = (U''_{\xi\xi} y + U''_{\xi\eta} 2xy) y + (U''_{\eta\xi} y + U''_{\eta\eta} 2xy) 2xy + U'_\eta 2y = \\ U''_{\xi\xi} y^2 + U''_{\xi\eta} 4xy^2 + U''_{\eta\eta} 4x^2 y^2 + U'_\eta 2y.$$

Analogicky dostáváme:

$$u''_{xy} = U''_{\xi\xi} xy + U''_{\xi\eta} 3x^2 y + U''_{\eta\eta} 2x^3 y + U'_\xi + U'_\eta 2x \quad u''_{yy} = U''_{\xi\xi} x^2 + U''_{\xi\eta} 2x^3 + U''_{\eta\eta} x^4.$$

Po dosazení do rovnice (9.4) získáme kanonický tvar:

$$U''_{\xi\eta} = 0,$$

u kterého je možné nalézt obecné řešení. □

9.3.2 Parabolický typ

Existuje jedna jedno parametrická soustava křivek určené implicitně rovnicemi

$$\varphi(x, y) = C,$$

které vyhovují charakteristické rovnici (9.3). V tomto případě převedeme substitucí

$$\xi = \varphi(x, y) \quad \eta = y$$

danou parciální diferenciální rovnici do kanonického tvaru:

$$U''_{\eta\eta} = \tilde{P}(\xi, \eta, U, U'_\xi, U'_\eta).$$

Příklad 9.8. Provedte klasifikaci lineární parciální diferenciální rovnice druhého řádu

$$x^2 u''_{xx} + 2xy u''_{xy} + y^2 u''_{yy} = 0 \tag{9.5}$$

a převedte je na kanonický tvar.

Řešení. Tato rovnice má charakteristickou rovnici ve tvaru

$$x^2 (y')^2 - 2xyy' + y^2 = 0.$$

Jedná se parabolický typ, protože $D = (2xy)^2 - 4x^2y^2 = 0$ s výjimkou počátku. Daná charakteristická rovnice je obyčejnou diferenciální rovnicí:

$$x^2 (y')^2 - 2xyy' + y^2 = (xy' - y)^2 = 0 \equiv y' = \frac{y}{x}.$$

Obecné řešení je ve tvaru jedno parametrického systému křivek:

$$y = Cx.$$

Tedy transformace převádějící zadanou rovnici na kanonický tvar je dána:

$$\xi = \frac{y}{x} \quad \eta = y$$

Výpočet parciálních derivací druhého řádu je obdobný jako v předchozím příkladě:

$$u''_{xx} = U''_{\xi\xi} \frac{y^2}{x^4} + U'_{\xi} \frac{y}{x^3} \quad u''_{xy} = U''_{\xi\xi} \frac{-y}{x^3} + U''_{\xi\eta} \frac{-y}{x^2} + U'_{\xi} \frac{-1}{x^2} \quad u''_{yy} = U''_{\xi\xi} \frac{1}{x^2} + \frac{2}{x} U''_{\xi\eta} + U''_{\eta\eta}.$$

Po dosazení do rovnice (9.5) získáme kanonický tvar:

$$U''_{\eta\eta} = 0,$$

u kterého je možné nalézt obecné řešení. □

9.3.3 Eliptický typ

Jedná se o případ kdy charakteristická rovnice (9.3) má řešení v implicitním tvaru

$$\varphi(x, y) \pm ij\psi(x, y) = K.$$

V tomto případě převedeme substitucí

$$\xi = \varphi(x, y) \quad \eta = \psi(x, y)$$

danou parciální diferenciální rovnicí do kanonického tvaru:

$$U''_{\xi\xi} + U''_{\eta\eta} = \tilde{P}(\xi, \eta, U, U'_{\xi}, U'_{\eta}).$$

V následujícím příkladě ukážeme, že lineární parciální diferenciální rovnice druhého řádu může být současně všech typů v jednotlivých oblastech.

Příklad 9.9. Proveďte klasifikaci lineární parciální diferenciální rovnice druhého řádu

$$u''_{xx} + yu''_{yy} + \frac{1}{2}u'_y = 0.$$

Řešení. U tohoto příkladu ponecháme mezivýpočty na čtenáři a pouze uvedeme výsledek, který závisí znaménku proměnné y .

- Pro $y < 0$ hyperbolický typ, transformace $\xi = x - 2\sqrt{-y}$, $\eta = x + 2\sqrt{-y}$,

$$\begin{aligned} u'_y &= (U'_\xi - U'_\eta) \frac{1}{\sqrt{-y}} \\ u''_{xx} &= U''_{\xi\xi} + 2U''_{\xi\eta} + U''_{\eta\eta} \\ u''_{yy} &= U''_{\xi\xi} \frac{1}{-y} + U''_{\xi\eta} \frac{-2}{-y} + U''_{\eta\eta} \frac{1}{-y} + (U'_\xi - U'_\eta) \frac{1}{2(-y)^{-3/2}} \end{aligned}$$

kanonický tvar: $U''_{\xi\eta} = 0$

- Pro $y = 0$ parabolický typ a rovnice je přímo v kanonickém tvaru
- Pro $y > 0$ eliptický typ, transformace $\xi = 2\sqrt{y}$, $\eta = x$

$$u'_y = U'_\xi \frac{1}{\sqrt{y}} \quad u''_{xx} = U''_{\eta\eta} \quad u''_{yy} = U''_{\xi\xi} \frac{1}{y} + U'_\xi \frac{-1}{2y^{3/2}}$$

kanonický tvar: $U''_{\xi\xi} + U''_{\eta\eta} = 0$

□

9.4 D'Alambertova metoda

Skutečnost, že kanonické tvary lineárních parciálních diferenciálních rovnic druhého řádu jsou vhodnější pro nalezení řešení těchto rovnic je základem D'Alambertovy metody řešení těchto rovnic, někdy je tato metoda nazývána metodou charakteristik. Tuto metodu je možné zejména uplatnit u počátečních úloh. Princip této metody lze shrnout do tří kroků:

1. Převědeme rovnici na kanonický tvar
2. Nalezneme obecné řešení LPDR (obvykle závisí na 2 libovolných funkcích dvou proměnných).
3. Aplikací počátečních podmínek určíme konkrétní partikulární řešení

Jednotlivé kroky postupu jsou netriviální matematické úlohy, které nemusí být řešitelné, proto budeme metodu demonstrovat na jednoduchých příkladech. Abychom zkrátili délku použijeme rovnice u kterých jsme první krok provedli výše.

Příklad 9.10. Nalezněte řešení LPDR 2. řádu

$$x^2 u''_{xx} - 3xy u''_{xy} + 2y^2 u''_{yy} + xu'_x + 2yu'_y = 0$$

určené počáteční podmínkou $u(x, 1) = 2x^2$, $u'_y(x, 1) = 3x^2$

Řešení. 1. V příkladě 9.7 byla daná rovnice transformací $\xi = xy$, $\eta = x^2y$ převedena do kanonického tvaru

$$u''_{\xi\eta}(\xi, \eta) = 0.$$

2. Tato rovnice má obecné řešení ve tvaru $u(\xi, \eta) = \varphi(\xi) + \psi(\eta)$. Po dosazení zpětné transformace dostáváme obecné řešení dané rovnice:

$$u(x, y) = \varphi(xy) + \psi(x^2y).$$

3. Pro zatím neznámé funkce dosazením počátečních podmínek získáme dvě rovnice:

$$2x^2 = u(x, 1) = \varphi(x) + \psi(x^2) \quad 3x^2 = u'_y(x, 1) = \varphi'(x)x + \psi'(x^2)x^2$$

Druhou rovnici vydělíme proměnnou x a následně integrujeme spolu s první rovnicí tak dostáváme soustavu dvou lineárních rovnic pro dvě neznámé:

$$\begin{aligned} 2x^2 &= \varphi(x) + \psi(x^2) \\ \frac{3}{2}x^2 &= \varphi(x) + \frac{1}{2}\psi(x^2). \end{aligned}$$

Tato soustava má řešení vzhledem k neznámým $f(x)$, $g(x^2)$:

$$\varphi(x) = x^2 \quad \psi(x^2) = x^2 \Leftrightarrow \psi(t) = t.$$

Dosazením těchto funkcí získáme partikulární řešení

$$u(x, y) = (xy)^2 + x^2y = x^2y(y + 1).$$

□

Poznámka 9.11. Pokud by byla v tomto příkladu zvolena $u'_x(x, 1)$ na místo $u'_y(x, 1)$ a tak by platilo, že je zadána derivace ve směru tečného vektoru, bylo by možné dovodit:

$$(u(x, 1))' = u'_x(x, 1).$$

V případě, že by tato podmínka platila, měli bychom pouze jednu počáteční podmínku a tedy by nebylo možné jednoznačně určit všechny druhé parciální derivace a tedy řešení by nebylo jednoznačné. Jestliže by tato podmínka nebyla splněna, řešení by neexistovalo.

Příklad 9.12. Nalezněte řešení LPDR 2. řádu

$$x^2u''_{xx} + 2xyu''_{xy} + y^2u''_{yy} = 0$$

určené počáteční podmínkou $u(x, x^3) = x^2 + x + 1$, $u'_y(x, x^3) = \frac{1}{x}$.

Řešení. 1. V příkladě 9.8 byla daná rovnice transformací $\xi = y/x$, $\eta = y$ převedena do kanonického tvaru

$$u''_{\eta\eta}(\xi, \eta) = 0.$$

2. Tato rovnice má obecné řešení ve tvaru $u(\xi, \eta) = \varphi(\xi) + \eta\psi(\xi)$. Po dosazení zpětné transformace dostáváme obecné řešení dané rovnice:

$$u(x, y) = \varphi\left(\frac{y}{x}\right) + y\psi\left(\frac{y}{x}\right).$$

3. Pro zatím neznámé funkce dosazením počátečních podmínek získáme dvě rovnice:

$$x^2 + x + 1 = u(x, x^3) = \varphi(x^2) + x^3\psi(x^2), \quad \frac{1}{x} = u'_y(x, x^3) = \varphi'(x^2)\frac{1}{x} + \psi(x^3) + x^3\psi'(x^2)\frac{1}{x}$$

Nyní první rovnici derivujeme a druhou rovnici vynásobíme výrazem $2x^2$:

$$2x + 1 = \varphi'(x^2)2x + 3x^2\psi(x^2) + x^3\psi'(x^3)2x \quad 2x = \varphi'(x^2)2x + 2x^2\psi(x^2) + x^3\psi'(x^2)$$

Rozdíl těchto rovnic určuje funkci ψ :

$$1 = x^2\psi(x^2) \equiv \frac{1}{x^2} = \psi(x^2) \equiv \psi(t) = \frac{1}{t}$$

Dosazením do první počáteční podmínky určíme i druhou funkci φ :

$$x^2 + x + 1 = \varphi(x^2) + x^3\frac{1}{x^2} \equiv x^2 + 1 = \varphi(x^2) \equiv \varphi(t) = t + 1.$$

Dosazením těchto funkcí získáme partikulární řešení

$$u(x, y) = \frac{y}{x} + 1 + y\frac{1}{\frac{y}{x}} = \frac{y}{x} + 1 + x.$$

□

Poznámka 9.13. Pokud by byla v tomto příkladu zvolena křivka na níž by byly podmínky zadávány ve tvaru $y = Cx$, tj. podmínka by byla zadávána na charakteristice, nebylo by možné z takto modifikovaných podmínek určit funkce φ , ψ :

$$u(x, Cx) = \varphi(C) + Cx\psi(C) \quad u'_y(x, Cx) = \varphi(C)\frac{1}{x} + \psi(C) + \psi(C)\frac{1}{x},$$

neboť bychom dostali pro funkce φ , ψ podmínky pouze v jedné hodnotě argumentu.

9.5 Řešené příklady

Příklad 9.14. Najděte kanonický tvar rovnice

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 8\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + 15\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

a její řešení.

Řešení. Máme $A = 1, B = 8, C = 15$. Takže platí

$$B^2 - 4AC = 8^2 - 4 \cdot 1 \cdot 15 = 64 - 60 = 4 > 0.$$

Rovnice je hyperbolického typu. Rovnici přiřadíme charakteristickou rovnici:

$$\lambda^2 - 8\lambda + 15 = 0$$

a určíme si její kořeny. Dostaneme

$$\lambda_1 = 3, \quad \lambda_2 = 5.$$

Podle předchozího volíme

$$\xi = y - 3x, \quad \eta = y - 5x.$$

Určíme si parciální derivace

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 9 \frac{\partial^2 U}{\partial \xi^2} + 30 \frac{\partial^2 U}{\partial \xi \partial \eta} + 25 \frac{\partial^2 U}{\partial \eta^2},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = -3 \frac{\partial^2 U}{\partial \xi^2} - 8 \frac{\partial^2 U}{\partial \xi \partial \eta} - 5 \frac{\partial^2 U}{\partial \eta^2},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 U}{\partial \xi^2} + 2 \frac{\partial^2 U}{\partial \xi \partial \eta} + \frac{\partial^2 U}{\partial \eta^2}.$$

Po dosazení dostaneme

$$\frac{\partial^2 U}{\partial \xi \partial \eta} = 0.$$

Budeme nyní hledat řešení této rovnice. Zvolme

$$\frac{\partial U}{\partial \eta} = v.$$

Potom

$$\frac{\partial v}{\partial \xi} = 0,$$

a proto je $v = f(\eta)$, kde f je libovolná funkce. Takže máme

$$\frac{\partial U}{\partial \eta} = f(\eta),$$

$$U = \int f(\eta) d\eta = F(\eta) + G(\xi),$$

kde F, G jsou funkce se spojitými parciálními derivacemi. Dosazením za ξ, η dostaneme řešení naší rovnice ve tvaru

$$u = F(y - 5x) + G(y - 3x).$$

□

Příklad 9.15. Převedte na kanonický tvar rovnici

$$4 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 12 \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + 13 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0.$$

Řešení. Máme $A = 4, B = 12, C = 13$. Takže platí

$$B^2 - 4AC = 12^2 - 4 \cdot 4 \cdot 13 = 144 - 208 = -64.$$

Rovnice je eliptického typu. Rovnici přiřadíme její charakteristickou rovnici:

$$4\lambda^2 - 12\lambda + 13 = 0$$

a určíme si její kořeny. Dostaneme

$$\lambda_{1,2} = \frac{12 \pm \sqrt{144 - 4 \cdot 4 \cdot 13}}{8} = \frac{12 \pm \sqrt{-64}}{8} = \frac{3}{2} \pm i.$$

Máme $\alpha = \frac{3}{2}, \beta = 1$. Podle předchozího volíme

$$\xi = y - \frac{3}{2}x, \quad \eta = -x.$$

Určíme si parciální derivace

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{9}{4} \frac{\partial^2 U}{\partial \xi^2} + 3 \frac{\partial^2 U}{\partial \xi \partial \eta} + \frac{\partial^2 U}{\partial \eta^2},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = -\frac{3}{2} \frac{\partial^2 U}{\partial \xi^2} - \frac{\partial^2 U}{\partial \xi \partial \eta},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 U}{\partial \xi^2}.$$

Po dosazení dostaneme

$$4 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 12 \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + 13 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0,$$

$$4 \left(\frac{9}{4} \frac{\partial^2 U}{\partial \xi^2} + 3 \frac{\partial^2 U}{\partial \xi \partial \eta} + \frac{\partial^2 U}{\partial \eta^2} \right) + 12 \left(-\frac{3}{2} \frac{\partial^2 U}{\partial \xi^2} - \frac{\partial^2 U}{\partial \xi \partial \eta} \right) + 13 \left(\frac{\partial^2 U}{\partial \xi^2} \right) = 0,$$

$$9 \frac{\partial^2 U}{\partial \xi^2} + 12 \frac{\partial^2 U}{\partial \xi \partial \eta} + 4 \frac{\partial^2 U}{\partial \eta^2} - 18 \frac{\partial^2 U}{\partial \xi^2} - 12 \frac{\partial^2 U}{\partial \xi \partial \eta} + 13 \left(\frac{\partial^2 U}{\partial \xi^2} \right) = 0,$$

$$4 \frac{\partial^2 U}{\partial \xi^2} + 4 \frac{\partial^2 U}{\partial \eta^2} = 0,$$

$$\frac{\partial^2 U}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial \eta^2} = 0,$$

□

Cvičení

1. Najděte kanonický tvar rovnice

$$x^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - y^2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0.$$

2. Najděte kanonický tvar rovnice

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - 2 \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + 2 \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0.$$

Výsledky

1. Kanonickým tvarem dané rovnice je rovnice

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} - \frac{1}{2\xi} \frac{\partial u}{\partial \eta} = 0.$$

2. Kanonickým tvarem dané rovnice je rovnice

$$\frac{\partial^2 z}{\partial^2 \xi} + \frac{\partial^2 z}{\partial^2 \eta} = 0.$$

Maplety

Kliknutím na následující odkaz si lze pomocí mapletu procvičit toto téma:

1. [Určí typ lineární parciální diferenciální rovnice druhého řádu a určí transformaci pro převod na kanonický tvar.](#)

10 Vlnová rovnice, D'Alembertův vzorec a Fourierova metoda

10.1 Cíl kapitoly

Budeme pokračovat ve studiu parciálních rovnic druhého řádu.

Cílem této kapitoly je seznámit čtenáře s vlnovou rovnicí a jedním ze způsobů nalezení jejího řešení. Vlnová rovnice je rovnicí hyperbolického typu.

Uvedeme si tvary okrajových a počátečních podmínek, které se používají pro popis kmitů struny a které potřebujeme je pro nalezení jednoznačného řešení dané úlohy.

Odvodíme si d'Alembertův vzorec, který nám popisuje jednu z možností, jak získat řešení. Řešení rovnice vedení tepla spolu s okrajovými podmínkami budeme hledat Fourierovou metodou separace proměnných.

V některých úlohách je potřeba rozvinout do Fourierových řad počáteční nebo okrajové podmínky. Proto je připojeno stručné zopakování některých poznatků o konstrukci Fourierových řad.

10.2 Vlnová rovnice

Často je tato rovnice nazývána též rovnicí pro kmity struny. Mějme ideální strunu zaujímající úsečku na ose x mezi hodnotami $x = 0$ a $x = l$. Jestliže vychýlíme strunu z rovnovážné polohy, začne kmitat. Předpokládejme, že kmitá v jedné rovině Oxy a označme $u(x, t)$ odchylku struny v bodě x a čase t . Rovnici kmitu struny je možno zapsat ve tvaru

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}. \quad (10.1)$$

Pro jednoznačnou řešitelnost musíme ještě požadovat splnitelnost dalších podmínek. Průběh pohybu struny bude jednoznačně určen, pokud budeme znát pohyb koncových bodů a počáteční polohu a rychlost každého bodu. Matematicky to znamená, že potřebujeme znát ještě okrajové a počáteční podmínky.

$$u(0, t) = \mu_1(t), \quad (10.2)$$

$$u(l, t) = \mu_2(t), \quad (10.3)$$

$$u(x, 0) = \varphi(x), \quad (10.4)$$

$$\frac{\partial u(x, 0)}{\partial t} = \psi(x). \quad (10.5)$$

$\mu_1, \mu_2, \varphi, \psi$ jsou zadané funkce.

Počáteční úloha pro rovnici struny je úloha nalezení řešení $u = u(x, t)$, která má spojité parciální derivace druhého řádu, splňuje podmínky (10.4) - (10.5) a rovnici (10.1).

10.3 D'Alembertův vzorec

Hledejme nyní řešení rovnice (10.1) vyjádřené pomocí známých funkcí φ, ψ , které jsou definovány pro všechna reálná čísla, tj. jedná se strunu nekonečné délky. Rovnice (10.1) je hyperbolického typu a substitucí $\xi = x + at$, $\zeta = x - at$ převedeme na kanonický tvar

$$U''_{\xi\zeta} = 0.$$

Tato rovnice má obecné řešení ve tvaru

$$U(\xi, \zeta) = f_1(\xi) + f_2(\zeta), \quad (10.6)$$

kde f_1, f_2 jsou libovolné dvakrát spojitě diferencovatelné funkce jedné proměnné. Zpětným dosazením původních proměnných dostáváme obecné řešení původní parciální diferenciální rovnice 10.1 ve tvaru

$$u(x, t) = f_1(x + at) + f_2(x - at). \quad (10.7)$$

Dosazením počátečních podmínek do rovnice (10.4) (10.5) dostaneme

$$u(x, 0) = f_1(x) + f_2(x) = \varphi(x) \quad (10.8)$$

$$u'_t(x, 0) = af'_1(x) - af'_2(x) = \psi(x) \quad (10.9)$$

Integrací rovnice (10.9) podle proměnné x dostaneme

$$f_1(x) - f_2(x) = \frac{1}{a} \int_{x_0}^x \psi(\tau) d\tau.$$

Odtud a z rovnice (10.8) určíme funkce

$$f_1(x) = \frac{1}{2}\varphi(x) + \frac{1}{2a} \int_{x_0}^x \psi(\tau) d\tau + \frac{C}{2}$$

$$f_2(x) = \frac{1}{2}\varphi(x) - \frac{1}{2a} \int_{x_0}^x \psi(\tau) d\tau - \frac{C}{2}$$

a dosazením požadovaných argumentů dostáváme

$$f_1(x + at) = \frac{1}{2}\varphi(x + at) + \frac{1}{2a} \int_{x_0}^{x+at} \psi(\tau) d\tau + \frac{C}{2}$$

$$f_2(x - at) = \frac{1}{2}\varphi(x - at) - \frac{1}{2a} \int_{x_0}^{x-at} \psi(\tau) d\tau - \frac{C}{2}$$

což s využitím vztahu pro integrály $\int_{x_0}^{x+at} - \int_{x_0}^{x-at} = \int_{x-at}^{x+at}$ umožňuje odvodit z 10.7 řešení počáteční úlohy ve tvaru

$$u(x, t) = \frac{1}{2}(\varphi(x + at) + \psi(x - at)) + \frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} \psi(\tau) d\tau. \quad (10.10)$$

Tento vztah se nazývá d'Alembertův vzorec.

10.4 Fourierova metoda separace proměnných

Okrajová úloha pro rovnici struny je úloha nalezení řešení $u = u(x, t)$ definovanou pro $0 \leq x \leq l, t \geq 0$, která zde má spojité parciální derivace prvního řádu, splňuje podmínky (10.2) - (10.5) a v oblasti $0 < x < l, t > 0$ má spojité parciální derivace druhého řádu a splňuje zde rovnici (10.1).

Platí

Věta 10.1. *Počáteční úloha pro rovnici struny má nejvýše jedno řešení.*

Při řešení některých parciálních diferenciálních rovnic se používá i metoda separace proměnných (Fourierova metoda, metoda separace proměnných). Základní myšlenkou této metody je, že řešení předpokládáme ve tvaru součinu dvou (respektive tří) funkcí, z nichž každá závisí pouze na jedné nezávislé proměnné. Pokud se nám podaří tímto způsobem separovat jednotlivé proměnné v Laplaceově rovnici, rozpadne se původní parciální rovnice na několik obyčejných diferenciálních rovnic. Umíme-li najít jejich obecná řešení, budeme umět i vyřešit původní Laplaceovu rovnici.

10.4.1 Fourieriovy řady

Definice 10.2. Předpokládejme, že f je funkce definovaná na intervalu $[-\pi, \pi]$ a že pro tuto funkci existují všechny níže uvedené integrály. Čísla

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx \, dx, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx \, dx, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

se nazývají **Fourierovy koeficienty** funkce $f(x)$. Řada

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

se nazývá **Fourierova řada** funkce $f(x)$.

10.4.2 Dirichletovy podmínky

Definice 10.3. Funkce $f(x)$ splňuje na intervalu $[-\pi, \pi]$ **Dirichletovy podmínky**, jestliže má na intervalu $[-\pi, \pi]$ konečný počet maxim a minim a jestliže je na tomto intervalu spojitá s výjimkou konečného počtu bodů nespojitosti prvního druhu.

Někdy jsou Dirichletovy podmínky formulovány také takto:

Definice 10.4. Funkce $f(x)$ splňuje na intervalu $[-\pi, \pi]$ **Dirichletovy podmínky**, jestliže lze tento interval rozdělit na konečný počet subintervalů takových, že uvnitř každého z nich je $f(x)$ monotonní a ohraničená.

Poznámka 10.5. Analogicky můžeme formulovat Dirichletovy podmínky pro libovolný interval $[a, b]$.

10.4.3 Dirichletova věta

Věta 10.6. Jestliže funkce $f(x)$ splňuje Dirichletovy podmínky, pak v každém bodě intervalu $[-\pi, \pi]$ Fourierova řada konverguje a platí

$$\frac{1}{2} [f(x-0) + f(x+0)] = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

a v obou krajních bodech intervalu $[-\pi, \pi]$ je součet Fourierovy řady roven

$$\frac{1}{2} [f(-\pi+0) + f(\pi-0)].$$

10.4.4 Rozvoj funkce s libovolnou periodou

Předpokládejme, že funkce $f(x)$ je definovaná na intervalu $[-l, l]$, kde $l > 0$. Fourierova řada pak má tvar

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{n\pi x}{l} + b_n \sin \frac{n\pi x}{l} \right),$$

kde

$$a_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) \cos \frac{n\pi x}{l} dx, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

$$b_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) \sin \frac{n\pi x}{l} dx, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

10.4.5 Příklad

Rozviňme do Fourierovy řady funkci

$$f(x) = \begin{cases} -1, & \text{for } -\pi \leq x < 0, \\ 1, & \text{for } 0 < x \leq \pi. \end{cases}$$

Tato funkce je nespojitá v bodě $x = 0$ a splňuje podmínky Dirichletovy věty. Navíc, protože se jedná o lichou funkci, máme $a_n = 0$. Vypočítejme koeficienty b_n :

$$b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi 1 \cdot \sin nx \, dx = -\frac{2}{n\pi} \cos nx \Big|_0^\pi = -\frac{2}{n\pi} (\cos n\pi - 1);$$

$$b_1 = \frac{4}{\pi}, \quad b_2 = 0, \quad b_3 = \frac{4}{3\pi}, \quad b_4 = 0, \quad b_5 = \frac{4}{5\pi}, \quad b_6 = 0, \dots$$

Tedy

$$f(x) = \frac{4}{\pi} \left[\sin x + \frac{1}{3} \sin 3x + \frac{1}{5} \sin 5x + \frac{1}{7} \sin 7x + \dots \right].$$

10.4.6 Riemannova věta

Věta 10.7. *Jestliže $f(x)$ splňuje Dirichletovy podmínky, pak:*

$$\lim_{p \rightarrow \infty} \int_a^b f(x) \cos px \, dx = 0$$

a

$$\lim_{p \rightarrow \infty} \int_a^b f(x) \sin px \, dx = 0.$$

V důsledku této věty pro koeficienty Fourierovy řady a_n, b_n dostáváme:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 0.$$

Ukažme tuto vlastnost na předchozím příkladu. Snadno uvidíme, že

$$\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-2}{n\pi} (\cos n\pi - 1) = 0$$

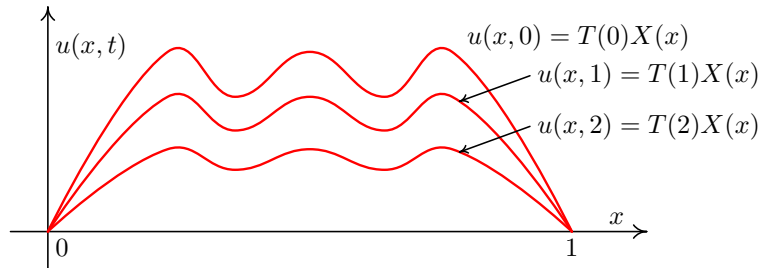
a

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} 0 = 0.$$

10.5 Fourierova metoda pro vlnovou rovnici

Fourierovu metodu můžeme s úspěchem použít i pro rovnici kmitů struny

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \tag{10.11}$$



Obr. 10.1: Separace proměnných pro vlnovou rovnici.

kde a je nenulová konstanta. Opět budeme hledat řešení u ve tvaru součinu dvou funkcí, z nichž každá závisí pouze na jedné proměnné:

$$u(x, t) = X(x) \cdot T(t).$$

Danou situaci si můžeme ilustrovat na obrázku 10.1.

Dále budeme předpokládat, že platí $X(x) \neq 0, T(t) \neq 0$. Potom má rovnice (10.11) tvaru

$$X''(x)T(t) = \frac{1}{a^2}X(x)T''(t).$$

Po úpravě dostaneme

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = \frac{1}{a^2} \cdot \frac{T''(t)}{T(t)}.$$

Máme rovnici jejíž levá strana závisí pouze na x a pravá pouze na t . Obě strany rovnice se mohou sobě pouze tehdy, jestliže se obě rovnají jedné a téže konstantě λ . Tedy

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = \frac{T''(t)}{a^2 T(t)} = \lambda.$$

Odtud dostaneme dvojici obyčejných diferenciálních rovnic

$$\begin{aligned} X''(x) - \lambda X(x) &= 0, \\ T''(t) - a^2 \lambda T(t) &= 0. \end{aligned}$$

Tyto rovnice umíme vyřešit, proto dostáváme i řešení rovnice (10.11). Obvykle nehledáme libovolné řešení, ale takové, které splňuje zadané počáteční a okrajové podmínky. Konkrétní aplikaci této důležité metody uvádíme v části 11.8.

10.6 Vzorce odvozené Fourierovou metodou pro vlnovou rovnici

Předpokládejme, že vlnová rovnice je zadána ve tvaru

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2},$$

kde a je nenulová konstanta. Jsou-li dány počáteční podmínky

$$u|_{t=0} = \varphi(x), \quad \left. \frac{\partial u}{\partial t} \right|_{t=0} = \psi(x)$$

a okrajové podmínky

$$u|_{x=0} = 0, \quad u|_{x=l} = 0, \tag{10.12}$$

potom lze najít řešení ve tvaru nekonečné řady

$$u(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} \left(a_k \cos \frac{k\pi at}{l} + b_k \sin \frac{k\pi at}{l} \right) \sin \frac{k\pi x}{l}, \tag{10.13}$$

kde

$$a_k = \frac{2}{l} \int_0^l \varphi(x) \sin \frac{k\pi x}{l} dx, \quad b_k = \frac{2}{k\pi a} \int_0^l \psi(x) \sin \frac{k\pi x}{l} dx.$$

Odvození těchto vzorců je podrobně uvedeno níže v příkladu 10.11.

10.7 Shrnutí kapitoly

Věnovali jsme se vlnové rovnici. Ukázali jsme některé její vlastnosti a také okrajové a počáteční podmínky, které se používají při hledání jejího řešení. Odvodili jsme d'Alembertův vzorec pro nalezení jejího řešení.

10.8 Řešené příklady

Příklad 10.8. Najděte řešení rovnice

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

za předpokladu, že

$$u|_{t=0} = x^2, \quad \left. \frac{\partial u}{\partial t} \right|_{t=0} = 0.$$

Řešení. Protože ze zadání příkladu vyplývá $\psi = 0$ dostáváme

$$u(x, t) = \frac{1}{2} (\varphi(x+t) + \varphi(x-t)),$$

kde $\varphi = x^2$. Proto

$$u(x, t) = \frac{1}{2} ((x+t)^2 + (x-t)^2).$$

Po úpravě dostáváme

$$u(x, t) = x^2 + t^2.$$

□

Příklad 10.9. Najděte profil struny, kmity které jsou popisovány rovnicí

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

pro hodnotu času $t = \pi/2$ za předpokladu, že

$$u|_{t=0} = \sin x, \quad \left. \frac{\partial u}{\partial t} \right|_{t=0} = 1.$$

Řešení. Dosazením do vztahu (10.10) dostáváme

$$u(x, t) = \frac{1}{2} \left(\sin(x+t) + \sin(x-t) + \int_{x-t}^{x+t} dz \right).$$

Odtud máme

$$u(x, t) = \sin x \cdot \cos t + \frac{1}{2} \cdot z|_{x-t}^{x+t}.$$

Po úpravě dostáváme

$$u(x, t) = \sin x \cdot \cos t + t.$$

□

Příklad 10.10. Kmitající struna je upevněna v bodech $x = 0$ a $x = l$, $l > 0$. V počáteční moment měla tvar paraboly

$$u = \left(\frac{4h}{l^2} \cdot x \cdot (l-x) \right)$$

Najděte profil struny za předpokladu, že platí podmínky (10.12).

Řešení. Využijeme rozklad do řady (10.13). Máme

$$\varphi := \left(\frac{4h}{l^2} \cdot x \cdot (l-x) \right), \quad \text{a} \quad \psi(x) = 0.$$

Najdeme koeficienty ve vzorci (10.13).

$$a_k = \frac{2}{l} \int_0^l \varphi(x) \cdot \sin \frac{k\pi x}{l} dx = \frac{8h}{l^3} \int_0^l (lx - x^2) \cdot \sin \frac{k\pi x}{l} dx$$

$$b_k = 0.$$

Abychom vypočetli koeficienty a_k , použijeme dvakrát metodu per partes. Nejprve označme

$$u_1 = lx - x^2, \quad du_1 = (l - 2x)dx,$$

$$v_1 = -\frac{l}{k\pi} \cos \frac{k\pi x}{l}, \quad dv_1 = \sin \frac{k\pi x}{l} dx.$$

Pak dostáváme

$$a_k = -\frac{8h}{l^3} (lx - x^2) \frac{l}{k\pi} \cdot \cos \frac{k\pi x}{l} \Big|_0^l$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{8h}{k\pi l^2} \int_0^l (l-2x) \cdot \cos \frac{k\pi x}{l} dx \\
& = \frac{8h}{k\pi l^2} \int_0^l (l-2x) \cdot \cos \frac{k\pi x}{l} dx.
\end{aligned}$$

Dále označíme

$$\begin{aligned}
u_2 &= l - 2x, & du_2 &= -2dx, \\
v_2 &= \frac{l}{k\pi} \sin \frac{k\pi x}{l}, & dv_2 &= \cos \frac{k\pi x}{l} dx.
\end{aligned}$$

Pokračujeme ve výpočtu:

$$\begin{aligned}
a_k &= \frac{8h}{k^2\pi^2 l} (l-2x) \sin \frac{k\pi x}{l} \Big|_0^l \\
& + \frac{16h}{k^2\pi^2 l} \int_0^l \sin \frac{k\pi x}{l} dx \\
& = -\frac{16h}{k^3\pi^3} \cos \frac{k\pi x}{l} \Big|_0^l \\
& = -\frac{16h}{k^3\pi^3} (\cos k\pi - 1) = \frac{16h}{k^3\pi^3} [1 - (-1)^k].
\end{aligned}$$

Dosazením a_k a b_k do vztahu (10.13) dostaneme

$$u(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{16h}{k^3\pi^3} \cdot [1 - (-1)^k] \cos \frac{k\pi at}{l} \sin \frac{k\pi x}{l}.$$

Je-li $k = 2n$, pak platí

$$1 - (-1)^k = 0$$

a v případě, že $k = 2n + 1$ máme

$$1 - (-1)^k = 2.$$

Proto můžeme poslední vyjádření funkce $u(x, t)$ zjednodušit:

$$u(x, t) = \frac{32h}{\pi^3} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^3} \cdot \cos \frac{(2n+1)\pi at}{l} \sin \frac{(2n+1)\pi x}{l}.$$

□

Příklad 10.11 (Fourierova metoda pro vlnovou rovnici). Najděte řešení rovnice

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2},$$

$c \in \mathbb{R}$ je nenulová konstanta, v oblasti, kde

$$0 < x < l, \quad t > 0$$

za předpokladu, že

$$u(x, 0) = \varphi(x), \quad 0 \leq x \leq l, \quad (10.14)$$

$$u'_t(x, 0) = \psi(x), \quad 0 \leq x \leq l, \quad (10.15)$$

$$u(0, t) = u(l, t) = 0, \quad t \geq 0. \quad (10.16)$$

Řešení. Podmínkám (10.14), (10.15) říkáme počáteční (jsou formulovány pro počáteční moment jevu - čas $t = 0$) a podmínky (10.27) nazýváme okrajové (vyjadřují uchycení struny na obou koncích během celé doby trvání kmitů). Naším cílem je najít řešení úlohy použitím Fourierovy metody. Předpokládejme, že řešení lze nalézt ve tvaru

$$u(x, t) = X(x) \cdot T(t),$$

kde $X(x)$ a $T(t)$ jsou vhodné funkce proměnných x a t . Dosazením do vlnové rovnice dostaneme

$$X(x)T''(t) - c^2 X''(x)T(t) = 0$$

nebo po úpravě

$$\frac{T''(t)}{c^2 T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)} = \lambda. \quad (10.17)$$

Z okrajových podmínek

$$u(0, t) = X(0)T(t) = 0, \quad u(l, t) = X(l)T(t) = 0$$

vyplývá

$$X(0) = X(l) = 0.$$

Proto funkce $X(x)$ vyhovuje okrajové úloze

$$X''(x) - \lambda X(x) = 0, \quad 0 < x < l, \quad (10.18)$$

$$X(0) = X(l) = 0. \quad (10.19)$$

Ukážeme, že okrajová úloha (10.18), (10.19) má netriviální řešení pouze tehdy, když $\lambda < 0$. Předpokládejme nejprve, že $\lambda > 0$. Potom charakteristická rovnice, příslušná homogenní diferenciální rovnici s konstantními koeficienty (10.18) je (hledaný kořen rovnice označíme ξ , neboť obvyklé písmeno λ již bylo použito)

$$\xi^2 - \lambda = 0 \quad (10.20)$$

a její kořeny jsou (bereme do úvahy $\lambda > 0$)

$$\xi_1 = \sqrt{\lambda}, \quad \xi_2 = -\sqrt{\lambda}.$$

Obecné řešení rovnice (10.18) má tvar

$$X(x) = C_1 e^{\sqrt{\lambda}x} + C_2 e^{-\sqrt{\lambda}x},$$

kde C_1 a C_2 jsou libovolné konstanty. Jejich volbu provedeme na základě okrajových podmínek (10.19):

$$\begin{aligned}x = 0 &\implies C_1 + C_2 = 0, \\x = l &\implies C_1 e^{\sqrt{\lambda}l} + C_2 e^{-\sqrt{\lambda}l} = 0.\end{aligned}$$

Z prvního vztahu máme $C_2 = -C_1$ a z druhého dostáváme

$$C_1 (e^{\sqrt{\lambda}l} - e^{-\sqrt{\lambda}l}) = 0. \quad (10.21)$$

Protože pro každé $l > 0$ platí

$$e^{\sqrt{\lambda}l} \neq e^{-\sqrt{\lambda}l}$$

(zdůvodněte proč) je vztah (10.22) splněn pouze tehdy, když $C_1 = C_2 = 0$. Tyto hodnoty vedou na triviální řešení okrajové úlohy (10.18), (10.19), které je však pro nás nezajímavé. Proto nemůže být $\lambda > 0$.

Předpokládejme tedy, že $\lambda < 0$. Za tohoto předpokladu má charakteristická rovnice (10.20) příslušná homogenní diferenciální rovnici s konstantními koeficienty (10.18) kořeny

$$\xi_1 = i\sqrt{|\lambda|}, \quad \xi_2 = -i\sqrt{|\lambda|},$$

kde i je komplexní jednotka ($i^2 = -1$). Obecné řešení rovnice (10.18) má tvar

$$X(x) = C_1 \cos \sqrt{|\lambda|x} + C_2 \sin \sqrt{|\lambda|x},$$

kde C_1 a C_2 jsou libovolné konstanty. Jejich volbu opět provedeme na základě okrajových podmínek (10.19):

$$\begin{aligned}x = 0 &\implies C_1 = 0, \\x = l &\implies C_2 \sin \sqrt{|\lambda}l = 0.\end{aligned}$$

Z prvního vztahu máme $C_1 = 0$ a z druhého (opět považujeme možnost $C_2 = 0$ za nezajímavou)

$$\sin \sqrt{|\lambda}l = 0 \quad (10.22)$$

odkud

$$\sqrt{|\lambda}l = n\pi, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

a

$$|\lambda| = \left(\frac{n\pi}{l}\right)^2, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

Posledním vztahem jsou fakticky určeny možné hodnoty čísla λ . Protože je jich nekonečně mnoho, budeme je indexovat a také budeme brát do úvahy, že to musí být záporná čísla. Proto

$$\lambda_n = -\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2, \quad n = 1, 2, \dots$$

Uzavřeme zkoumání okrajové úlohy (10.18), (10.19) s tím, že má nekonečně mnoho různých netriviálních řešení tvaru

$$X_n(x) = a_n \sin \frac{n\pi x}{l}, \quad n = 1, 2, \dots$$

odpovídající hodnotám

$$\lambda = \lambda_n = - \left(\frac{n\pi}{l} \right)^2, \quad n = 1, 2, \dots \quad (10.23)$$

Dosazením (10.23) do (10.17) dostáváme pro hledanou funkci T a pro každou hodnotu indexu $n = 1, 2, \dots$ obyčejnou diferenciální rovnici

$$T''(t) + \left(\frac{n\pi c}{l} \right)^2 T(t) = 0,$$

která má obecné řešení (tentokrát vynecháme detaily jeho nalezení, typově je rovnice shodná s rovnicí (10.18))

$$T_n(t) = b_n^* \cos \frac{n\pi c}{l} t + c_n^* \sin \frac{n\pi c}{l} t$$

a b_n^* , c_n^* jsou libovolné konstanty. Proto jsou funkce

$$\begin{aligned} u_n(x, t) &= X_n(x)T_n(t) = \left(b_n^* \cos \frac{n\pi c}{l} t + c_n^* \sin \frac{n\pi c}{l} t \right) a_n \sin \frac{n\pi x}{l} \\ &= \left(A_n \cos \frac{n\pi c}{l} t + B_n \sin \frac{n\pi c}{l} t \right) \sin \frac{n\pi x}{l}, \end{aligned}$$

kde jsme přeznačili $A_n = b_n^* a_n$ a $B_n = c_n^* a_n$ (nyní jsou A_n a B_n libovolnými konstantami) řešeními úlohy

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} &= c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad 0 \leq x \leq l, \quad t > 0, \\ u(0, t) &= u(l, t) = 0, \quad t \geq 0, \end{aligned}$$

tj. řešeními výchozí úlohy ale bez počátečních podmínek (10.14), (10.15). Abychom našli řešení výchozí úlohy, které by vyhovovalo i těmto počátečním podmínkám budeme ho hledat ve tvaru

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(A_n \cos \frac{n\pi c}{l} t + B_n \sin \frac{n\pi c}{l} t \right) \sin \frac{n\pi x}{l}. \quad (10.24)$$

Funkce (10.24) bude vyhovovat počátečním podmínkám, jestliže

$$u(x, 0) = \varphi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin \frac{n\pi x}{l}. \quad (10.25)$$

a dále

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = \psi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \left(\frac{n\pi c}{l} \right) \sin \frac{n\pi x}{l}. \quad (10.26)$$

Definujme na intervalu $[-l, l]$ liché funkce

$$\varphi^*(x) = \begin{cases} \varphi(x) & x \in [0, l], \\ -\varphi(-x) & x \in [-l, 0] \end{cases}$$

(ze zadání úlohy vyplývá, že $\varphi(0) = 0$ (zdůvodněte proč)) a

$$\psi^*(x) = \begin{cases} \psi(x) & x \in (0, l], \\ -\psi(-x) & x \in [-l, 0) \end{cases}$$

Rozviňme funkce $\varphi^*(x)$ a $\psi^*(x)$ do Fourierových řad podle vzorců pro rozvoje lichých funkcí, definovaných na intervalu $[-l, l]$, které jsou uvedeny v části 10.4.1 Protože na intervalu $[0, l]$ platí $\varphi(x) = \varphi^*(x)$ a na intervalu $(0, l]$ je $\psi(x) = \psi^*(x)$ můžeme Fourierovy řady zapsat takto

$$\varphi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin \frac{n\pi x}{l}, \quad x \in [0, l], \quad (10.27)$$

kde Fourierovy koeficienty b_n jsou

$$b_n = \frac{2}{l} \int_0^l \varphi(x) \sin \frac{n\pi x}{l} dx \quad (10.28)$$

a

$$\psi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \bar{b}_n \sin \frac{n\pi x}{l}, \quad x \in (0, l], \quad (10.29)$$

kde Fourierovy koeficienty \bar{b}_n jsou

$$\bar{b}_n = \frac{2}{l} \int_0^l \psi(x) \sin \frac{n\pi x}{l} dx. \quad (10.30)$$

Dva rozvoje funkcí pro φ (rozvoje (10.25), (10.27)) a ψ (rozvoje (10.26), (10.29)) musí být stejné. Jejich porovnáním a užitím vztahů (10.28), (10.30) docházíme k závěru, že

$$A_n = b_n = \frac{2}{l} \int_0^l \varphi(x) \sin \frac{n\pi x}{l} dx,$$

$$B_n = \frac{l}{n\pi c} \bar{b}_n = \frac{2}{n\pi c} \int_0^l \psi(x) \sin \frac{n\pi x}{l} dx.$$

Řešení úlohy je zakončeno a jeho tvar, vyhovující všem počátečním a okrajovým podmínkám je

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[\left(\frac{2}{l} \int_0^l \varphi(x) \sin \frac{n\pi x}{l} dx \right) \cos \frac{n\pi ct}{l} + \left(\frac{2}{n\pi c} \int_0^l \psi(x) \sin \frac{n\pi x}{l} dx \right) \sin \frac{n\pi ct}{l} \right] \sin \frac{n\pi x}{l}. \quad (10.31)$$

Na závěr ještě učiníme poznámku o jednoznačnosti řešení. Lze dokázat, že pokud je funkce φ dvakrát spojitě diferencovatelná na $[0, l]$, $\varphi'''(x)$ je po částech spojitá, funkce ψ je spojitě diferencovatelná na $[0, l]$, $\psi''(x)$ je po částech spojitá a

$$\begin{aligned}\varphi(0) &= \varphi''(0) = \varphi(l) = \varphi''(l) = 0, \\ \psi(0) &= \psi(l) = 0,\end{aligned}$$

pak je nalezené řešení (10.31) s uvedenými koeficienty jediným řešením formulované úlohy. \square

Cvičení

1. Kmitající struna je upevněna v bodech $x = 0$ a $x = l$, $l > 0$. V počáteční moment měla tvar lomené čáry

$$u = \begin{cases} \frac{2h}{l} \cdot x & \text{jestliže } 0 \leq x \leq \frac{l}{2}, \\ \frac{2h}{l} \cdot (l - x) & \text{jestliže } \frac{l}{2} \leq x \leq l. \end{cases}$$

Najděte profil struny za předpokladu, že platí podmínky (10.12) a $\psi(x) = 0$.

2. Najděte řešení rovnice

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

za předpokladu, že

$$u|_{t=0} = x, \quad \left. \frac{\partial u}{\partial t} \right|_{t=0} = -x.$$

3. Najděte řešení rovnice

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

za předpokladu, že

$$u|_{t=0} = 0, \quad \left. \frac{\partial u}{\partial t} \right|_{t=0} = \cos x.$$

Výsledky

1. Funkce $u(x, t)$ je dána součtem řady:

$$\begin{aligned}u(x, t) &= \frac{8h}{\pi^2} \left(\sin \frac{\pi x}{l} \cdot \cos \frac{\pi at}{l} - \frac{1}{3^2} \sin \frac{3\pi x}{l} \cdot \cos \frac{3\pi at}{l} \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{5^2} \sin \frac{5\pi x}{l} \cdot \cos \frac{5\pi at}{l} - \frac{1}{7^2} \sin \frac{7\pi x}{l} \cdot \cos \frac{7\pi at}{l} + \dots \right).\end{aligned}$$

2. Daná úloha má řešení

$$u(x, t) = x(1 - t).$$

3. Daná úloha má řešení

$$u(x, t) = \frac{\cos x \sin at}{a}.$$

11 Rovnice vedení tepla a Laplaceova rovnice

11.1 Cíl kapitoly

Budeme pokračovat ve studiu parciálních diferenciálních rovnic druhého řádu. Nyní budeme studovat některé rovnice parabolického a eliptického typu, které se často v aplikacích vyskytují - rovnici vedení tepla a Laplaceovu rovnici.

Ukážeme si jejich základní vlastnosti a také, jaké se kladou okrajové a počáteční podmínky, aby jimi bylo řešení určeno jednoznačně.

Řešení Laplaceovy rovnice budeme hledat Fourierovou metodou separace proměnných.

11.2 Rovnice vedení tepla

Teplota homogenního izotropního tělesa se dá popsat rovnicí

$$\frac{c\rho}{k} \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}, \quad (11.1)$$

přičemž $u(x, y, z, t)$ označuje teplotu tělesa v bodě $[x, y, z]$ v době t , k je koeficient vodivosti tepla, c je specifické teplo a ρ je hustota tělesa. Pokud si zavedeme substituci

$$\tau = \frac{k}{c\rho},$$

potom se rovnice zjednoduší na tvar

$$\frac{\partial u}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}. \quad (11.2)$$

Řešením této rovnice prohlásíme každou funkci, která má spojitě druhé parciální derivace podle proměnných x, y, z a spojitou první derivaci podle τ .

Pokud budeme předpokládat, že funkce u závisí pouze na jedné prostorové proměnné, dostaneme tzv. rovnici pro vedení tepla v tyči

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad (11.3)$$

přítom pro jednoduchost jsme označili τ jako t .

11.3 Dirichletova úloha pro rovnice vedení tepla

V praxi jsou diskutované parciální rovnice řešeny za různých počátečních a okrajových podmínek. Velice častá je tzv. Dirichletova úloha. Nyní uvedeme jednu z jejich formulací: Najít řešení $u(x, t)$ rovnice (11.3), které je spojitě pro $0 \leq x \leq l, t \geq 0$ a splňuje počáteční podmínku

$$u(x, 0) = \varphi(x), \quad (11.4)$$

a okrajové podmínky

$$u(0, t) = \mu_1(t), \quad (11.5)$$

$$u(l, t) = \mu_2(t), \quad (11.6)$$

kde φ, μ_1, μ_2 jsou zadané funkce.

11.4 Princip maxima pro rovnici vedení tepla

Následující věta dává možnost vniknout do vlastností řešení rovnice (11.3).

Věta 11.1. *Jestliže $u(x, t)$ je řešením rovnice (11.3), které je spojitě na uzavřené oblasti*

$$\begin{aligned} 0 &\leq x \leq l, \\ 0 &\leq t \leq T, \end{aligned}$$

potom funkce u nabývá svého maxima buď pro $t = 0$, nebo pro x nebo pro $x = l$.

Fyzikální smysl principu maxima je zřejmý: teplota tyče je největší buď na začátku sledované doby (tj. $t = 0$) a nebo na krajích tyče. Stačí si uvědomit, že se tyč nikde nezahřívá a sledujeme jen vedení tepla. V případě zahřívání tyče by jsme museli pro popis použít rovnici

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x, t), \quad (11.7)$$

kde funkce $f(x, t)$ je nezáporná a kladná aspoň pro některé hodnoty x a t .

11.5 Laplaceova rovnice

Budeme-li předpokládat, že výše studované parabolické rovnice popisují stacionární (na čase nezávislé) jevy, potom budou parciální derivace řešení podle času nulové a parabolické rovnice přejdou v rovnice eliptického typu. Nyní uvedeme často se vyskytující eliptické rovnice, nazývané Laplaceovými.

Laplaceova rovnice má v případě dvou nezávislých proměnných tvar

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0. \quad (11.8)$$

Často uvažujeme také Laplaceovu rovnici v případě, že hledaná funkce závisí na třech proměnných. Potom je její tvar:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0. \quad (11.9)$$

Obě rovnice (11.8) a (11.9) jsou rovnicemi eliptického typu. Často je zapisujeme ve tvaru

$$\Delta u = 0,$$

kde symbolem Δu rozumíme v případě rovnice (11.8) operátor

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2},$$

a v případě rovnice (11.9) operátor

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}.$$

Příklad 11.2. Řešení Laplaceovy rovnice $\Delta u = 0$ pro $u = u(x, y)$ lze vyjádřit ve tvaru řady

$$u = \sum_{i=0}^{\infty} a_i \sin(ix + \beta_i) \sinh(iy + \gamma_i),$$

kde $a_i, \beta_i, \gamma_i \in \mathbb{R}$.

11.6 Fourierova metoda separace proměnných pro Laplaceovu rovnici

Také při řešení Laplaceových rovnic se používá metoda separace proměnných (Fourierova metoda) o které jsme již hovořili v části 10.4. Budeme její použití ilustrovat na příkladu.

Příklad 11.3. Hledejme řešení Laplaceovy rovnice $\Delta u = 0$ pro $u = u(x, y)$ metodou separace proměnných.

Řešení. Máme rovnici $\Delta u = 0$ a předpokládáme, že platí $u = u(x, y) = \varphi(x)\psi(y)$. Potom po dosazení do Laplaceovy rovnice dostaneme

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} &= 0, \\ \frac{\partial^2 \varphi(x)\psi(y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi(x)\psi(y)}{\partial y^2} &= 0, \\ \psi(y) \frac{\partial^2 \varphi(x)}{\partial x^2} + \varphi(x) \frac{\partial^2 \psi(y)}{\partial y^2} &= 0. \end{aligned}$$

Budeme dále předpokládat, že funkce φ, ψ jsou nenulové, potom můžeme poslední rovnici vydělit jejich součinem. Příslušné parciální derivace budou obyčejnými derivacemi, protože jde o parciální derivování funkcí jedné proměnné. Dostaneme

$$\frac{\varphi''(x)}{\varphi(x)} + \frac{\psi''(y)}{\psi(y)} = 0.$$

V poslední rovnici máme na levé straně součet dvou činitelů, z nichž první závisí pouze na proměnné x a druhý pouze na proměnné y . Jejich součet se bude rovnat nule pouze v případě, že se oba sčítance rovnají konstantě s opačným znaménkem. Označme ji λ . Potom máme

$$\frac{\varphi''(x)}{\varphi(x)} = \lambda, \quad \frac{\psi''(y)}{\psi(y)} = -\lambda,$$

neboli

$$\varphi''(x) = \lambda\varphi(x), \quad \psi''(y) = -\lambda\psi(y).$$

Tyto rovnice umíme řešit. Řešení zapíšeme ve tvaru

$$\varphi_\lambda(x) = \begin{cases} Ae^{\sqrt{\lambda}x} + Be^{-\sqrt{\lambda}x} & \text{pro } \lambda > 0, \\ Ax + B & \text{pro } \lambda = 0, \\ Ae^{j\sqrt{-\lambda}x} + Be^{-j\sqrt{-\lambda}x} & \text{pro } \lambda < 0, \end{cases}$$

$$\psi_\lambda(y) = \begin{cases} Ce^{j\sqrt{\lambda}y} + De^{-j\sqrt{\lambda}y} & \text{pro } \lambda > 0, \\ Cy + D & \text{pro } \lambda = 0, \\ Ce^{\sqrt{-\lambda}y} + De^{-\sqrt{-\lambda}y} & \text{pro } \lambda < 0. \end{cases}$$

Řešení lze také zapsat ve tvaru

$$\varphi_\lambda(x) = \begin{cases} \alpha \sinh(\sqrt{\lambda}x + \beta) & \text{pro } \lambda > 0, \\ \alpha x + \beta & \text{pro } \lambda = 0, \\ \alpha \sin(\sqrt{-\lambda}x + \beta) & \text{pro } \lambda < 0, \end{cases}$$

$$\psi_\lambda(y) = \begin{cases} \gamma \sin(\sqrt{\lambda}y + \delta) & \text{pro } \lambda > 0, \\ \gamma y + \delta & \text{pro } \lambda = 0, \\ \gamma \sinh(\sqrt{-\lambda}y + \delta) & \text{pro } \lambda < 0. \end{cases}$$

Integrační konstanty $A, B, C, D, \alpha, \beta, \gamma, \delta$ závisí na veličině λ .

Z posledních vzorců mimo jiné plyne, že řešení dvojrozměrné Laplaceovy rovnice nemůže být současně periodické ve směru x a y . \square

11.7 Shrnutí kapitoly

Pokračovali jsme ve studiu parciálních diferenciálních rovnic druhého řádu. Věnovali jsme se rovnicím parabolického a eliptického typu = rovnici vedení tepla a Laplaceovu rovnici.

Seznámili jsme se s jejich základními vlastnostmi. Ukázali jsme si jaké se používají okrajové a počáteční podmínky pro nalezení jednoznačného řešení dané úlohy.

Pro určení řešení Laplaceovy rovnice jsme použili Fourierovou metodou separace proměnných.

11.8 Řešené příklady

11.8.1 Fourierova metoda pro rovnici vedení tepla

Příklad 11.4. Najděte řešení rovnice

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \alpha^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

pro

$$0 < x < l, \quad t > 0$$

za předpokladu, že

$$\begin{aligned} u(x, 0) &= \varphi(x), \quad 0 \leq x \leq l, \\ u(0, t) &= u(l, t) = 0, \quad t \geq 0. \end{aligned}$$

Řešení. Naším cílem je najít řešení úlohy použitím Fourierovy metody. Předpokládejme, že se proměnné dají rozdělit takto:

$$u(x, t) = X(x) \cdot T(t).$$

Dosazením do rovnice dostaneme

$$X(x)T'(t) - \alpha^2 X''(x)T(t) = 0$$

nebo po úpravě

$$\frac{T'(t)}{\alpha^2 T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)} = \lambda. \quad (11.10)$$

Z okrajových podmínek

$$u(0, t) = X(0)T(t) = 0, \quad u(l, t) = X(l)T(t) = 0$$

vyplývá, že

$$X(0) = X(l) = 0.$$

Proto funkce $X(x)$ vyhovuje okrajové úloze

$$X''(x) - \lambda X(x) = 0, \quad 0 < x < l, \quad (11.11)$$

$$X(0) = X(l) = 0. \quad (11.12)$$

Funkce $T(t)$ vyhovuje rovnici

$$T'(t) - \lambda \alpha^2 T(t) = 0. \quad (11.13)$$

Hledáme takové hodnoty λ , které vedou k netriviálním řešením uvedené rovnice. Jsou možné následující tři případy:

(i) Nechť $\lambda = \beta^2$, $\beta > 0$. Pak má úloha (11.11) obecné řešení tvaru

$$X(x) = c_1 \exp(\beta x) + c_2 \exp(-\beta x).$$

Z okrajových podmínek (11.12) dostáváme

$$\begin{aligned} c_1 + c_2 &= 0, \\ c_1 \exp(\beta l) + c_2 \exp(-\beta l) &= 0. \end{aligned}$$

Odtud máme $c_1 = c_2 = 0$. Proto je tento případ nezajímavý.

(ii) Nechť $\lambda = 0$. Pak má úloha (11.11) obecné řešení tvaru

$$X(x) = c_1 x + c_2.$$

Z okrajových podmínek (11.12) dostáváme

$$\begin{aligned} c_2 &= 0, \\ c_1 l + c_2 &= 0. \end{aligned}$$

Odtud opět máme $c_1 = c_2 = 0$. Tento případ je proto také nezajímavý.

(iii) Nechť $\lambda = -\beta^2$, $\beta > 0$. Pak má úloha (11.11) obecné řešení tvaru

$$X(x) = c_1 \cos \beta x + c_2 \sin \beta x.$$

Z okrajových podmínek (11.12) dostáváme

$$\begin{aligned} c_1 &= 0, \\ c_1 \cos \beta l + c_2 \sin \beta l &= 0. \end{aligned}$$

Odtud máme

$$c_1 = 0, \quad \sin \beta l = 0.$$

Proto

$$\beta l = n\pi.$$

Úloha (11.11), (11.12) má netriviální řešení pouze v případě, když

$$\lambda = \lambda_n = -\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2, \quad n = 1, 2, \dots$$

Toto řešení má tvar

$$X_n(x) = a_n \sin \frac{n\pi x}{l}.$$

Čísla λ_n nazýváme vlastními čísly a funkce $X_n(x)$ vlastními funkcemi. Řešení rovnice (11.13), ve které je položeno $\lambda = \lambda_n$ je

$$T_n(t) = b_n \exp\left(-\left(\frac{n\pi\alpha}{l}\right)^2 t\right).$$

Proto jsou funkce

$$u_n(x, t) = A_n \exp\left(-\left(\frac{n\pi\alpha}{l}\right)^2 t\right) \cdot \sin \frac{n\pi x}{l}$$

řešeními úlohy

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} &= \alpha^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad 0 \leq x \leq l, \quad t > 0, \\ u(0, t) &= u(l, t) = 0, \quad t \geq 0. \end{aligned}$$

Abychom našli řešení výchozí úlohy budeme její řešení hledat ve tvaru

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \exp\left(-\left(\frac{n\pi\alpha}{l}\right)^2 t\right) \cdot \sin \frac{n\pi x}{l}. \quad (11.14)$$

Funkce (11.14) bude vyhovovat počátečním podmínkám, jestliže

$$u(x, 0) = \varphi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin \frac{n\pi x}{l}, \quad 0 \leq x \leq l.$$

Rozvinutím funkce $\varphi(x)$ do Fourierovy řady dostaneme hodnoty koeficientů

$$A_n = \frac{2}{l} \int_0^l \varphi(x) \sin \frac{n\pi x}{l} dx, .$$

Na závěr ještě učiníme poznámku o jednoznačnosti řešení. Lze dokázat, že pokud je funkce φ spojitá na $[0, l]$, $\varphi'(x)$ je po částech spojitá a

$$\varphi(0) = \varphi(l) = 0,$$

pak je nalezené řešení (11.14) s uvedenými koeficienty jediným řešením formulované úlohy. \square

Cvičení

1. Najděte řešení rovnice

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

pro

$$0 < x < a, \quad 0 < y < b$$

za předpokladu, že

$$\begin{aligned} u(x, 0) &= u(x, b) = 0, \quad 0 \leq x \leq a, \\ u(0, y) &= g(y), \quad \frac{\partial u}{\partial x}(a, y) = h(y), \quad 0 \leq y \leq b. \end{aligned}$$

2. Najděte řešení rovnice

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

pro

$$0 < x < \pi, \quad 0 < y < \pi$$

za předpokladu, že

$$\frac{\partial u}{\partial y}(x, 0) = \frac{\partial u}{\partial y}(x, \pi) = \frac{\partial u}{\partial x}(0, y) = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial x}(\pi, y) = \cos 3y.$$

3. Najděte řešení rovnice

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

pro

$$0 < x < \pi, \quad 0 < y < \pi$$

za předpokladu, že

$$u(0, y) = \frac{\partial u}{\partial y}(x, 0) + u(x, 0) = \frac{\partial u}{\partial x}(\pi, y) = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial x}(x, \pi) = \sin \frac{3x}{2}.$$

Výsledky

1. Funkce $u(x, y)$ je dána součtem $u(x, y) = u_1(x, y) + u_2(x, y)$, kde

$$u_1(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \left(\cosh \frac{n\pi x}{b} - \tanh \frac{n\pi a}{b} \sinh \frac{n\pi x}{b} \right) \sin \frac{n\pi y}{b},$$

$$u_2(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sinh \frac{n\pi x}{b} \sin \frac{n\pi y}{b}$$

a pro koeficienty platí

$$a_n = \frac{2}{b} \int_0^b g(y) \sin \frac{n\pi y}{b} dy,$$

$$b_n = \frac{2}{n\pi} \cdot \frac{1}{\cosh \frac{n\pi a}{b}} \int_0^b h(y) \sin \frac{n\pi y}{b} dy.$$

2. Řešení je dáno vztahem

$$u(x, y) = \frac{\cosh 3x}{3 \sinh 3\pi} \cdot \cos 3y.$$

3. Řešení je dáno vztahem

$$u(x, y) = \frac{3 \cosh \frac{3y}{2} - 2 \sinh \frac{3y}{2}}{3 \cosh \frac{3\pi}{2} - 2 \sinh \frac{3\pi}{2}} \cdot \cos 3y.$$

12 Metoda konečných diferencí pro PDR

12.1 Cíl kapitoly

V předchozích kapitolách jsme se seznámili s teorií parciálních diferenciálních rovnic prvního a druhého řádu a s některými analytickými metodami jejich řešení.

Nevýhodou analytického řešení je, že se nedá použít vždy. Existuje velmi široká třída rovnic, které neumíme analyticky řešit. V těchto případech musíme použít numerické metody řešení.

Cílem této kapitoly je seznámit čtenáře s možností numerického řešení některých typů parciálních diferenciálních rovnic druhého řádu pomocí metody konečných diferencí.

12.2 Princip metoda konečných diferencí pro PDR

Vezměme si nejjednodušší případ: Mějme parciální lineární diferenciální rovnici eliptického typu

$$-\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \sigma(x, y)u = f(x, y), \quad (12.1)$$

kde $u = u(x, y)$, $\Omega = \{(x, y) : a \leq x \leq b, c \leq y \leq d\}$, $\sigma(x, y) \geq 0 \forall x, y \in \Omega$, σ, f jsou spojité na Ω .

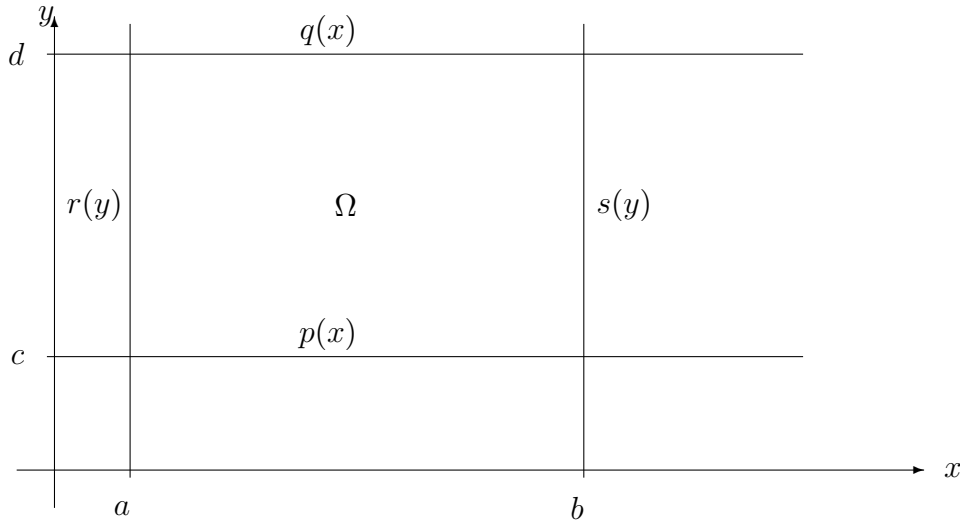
Nechť je splněna tzv. Dirichletova okrajová podmínka na hranicích oblasti Ω :

$$\begin{aligned} u(x, c) &= p(x), & u(x, d) &= q(x), & a \leq x \leq b, \\ u(a, y) &= r(y), & u(b, y) &= s(y), & c \leq y \leq d, \\ p(a) &= r(c), & p(b) &= s(c), & q(a) = r(d), & q(b) = s(d). \end{aligned}$$

Poslední řádek nám zabezpečuje spojitost okrajových podmínek v „rozích“ oblasti Ω . Viz obrázek 12.1.

Vytvoříme síť na oblasti Ω (nejčastěji se používají čtvercové a nebo obdélníkové sítě).

$$\begin{aligned} x_i &= a + ih, & i &= 0, 1, \dots, n, n+1, & h &= \frac{b-a}{n+1}, \\ y_j &= c + jk, & j &= 0, 1, \dots, m, m+1, & k &= \frac{d-c}{m+1}. \end{aligned}$$



Obr. 12.1: Metoda konečných diferencí

Uzly jsou pak body (x_i, y_j) . Označme $u_{ij} = u(x_i, y_j)$. Za předpokladu, že platí

$$\left| \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} \right| \leq M_4, \quad \left| \frac{\partial^4 u}{\partial y^4} \right| \leq M_4, \quad M_4 \in \mathbb{R}, \quad M_4 < \infty,$$

t.j. $u(x, y)$ je spojitá a má ohraničené parciální derivace do čtvrtého řádu včetně. Pak můžeme vyjádřit derivace pomocí diferencí a dostaneme

$$-\frac{\partial^2 u(x_i, y_j)}{\partial x^2} = - \left(\frac{u_{i+1,j} - 2u_{ij} + u_{i-1,j}}{h^2} - \frac{h^2}{12} u^{(4)}(\xi_i, y_j) \right),$$

$$-\frac{\partial^2 u(x_i, y_j)}{\partial y^2} = - \left(\frac{u_{i,j+1} - 2u_{ij} + u_{i,j-1}}{k^2} - \frac{k^2}{12} u^{(4)}(x_i, \eta_j) \right),$$

kde $x_{i-1} < \xi_i < x_{i+1}$, $y_{j-1} < \eta_j < y_{j+1}$. Jestliže předpokládáme spojitost $u(x, y)$, pak pro dostatečně malé h, k můžeme zanedbat chybové funkce. Potom dosazením do (12.1) dostáváme pro $i = 1, 2, \dots, n$, $j = 1, 2, \dots, m$:

$$\frac{2u_{ij} - u_{i+1,j} - u_{i-1,j}}{h^2} + \frac{2u_{ij} - u_{i,j+1} - u_{i,j-1}}{k^2} + \sigma_{ij} u_{ij} = f_{ij}.$$

Vynásobením této rovnice koeficientem hk dostaneme

$$\left(2 \left(\frac{h}{k} + \frac{k}{h} \right) + hk\sigma_{ij} \right) u_{ij} - \frac{k}{h} (u_{i+1,j} + u_{i-1,j}) - \frac{h}{k} (u_{i,j+1} + u_{i,j-1}) = hkf_{ij}.$$

Dosadíme podle počátečních podmínek

$$u_{i,0} = p_i, \quad u_{i,m+1} = q_i, \quad u_{0,j} = r_j, \quad u_{n+1,j} = s_j,$$

kde $p_i = p(x_i)$, $q_i = q(x_i)$, $r_j = r(y_j)$, $s_j = s(y_j)$, dostaneme tak soustavu lineárních algebraických rovnic a po jejím vyřešení získáme hodnoty u_{ij} . V případě pravidelné čtvercové sítě, t.j. $h = k$, se tato soustava dále zjednoduší na tvar

$$(4 + h^2\sigma_{ij}) u_{ij} - u_{i+1,j} - u_{i-1,j} - u_{i,j+1} - u_{i,j-1} = h^2 f_{ij}. \quad (12.2)$$

Všimněte si, že matice soustavy je v obou případech pro $\sigma_{ij} \neq 0$ diagonálně dominantní a proto můžeme použít i iterační metody řešení. V případě $\sigma_{ij} \equiv 0$ jde o soustavu, kde je diagonální dominantnost neostrá, ale je ostrá pro všechny rovnice, v nichž je aspoň jeden hraniční bod. Pro takovéto matice nám bude opět konvergovat Gauss-Seidelova metoda, ale obecně dosti pomalu. Při větším počtu rovnic se vyplatí používat relaxační nebo superrelaxační Gauss-Seidelovu metodu, které nám podstatně zlepšují konvergenci a hlavně rychlost výpočtu. Zvláště v tomto případě, kdy matice koeficientů soustavy je řídká (t.j. obsahuje velké množství nulových prvků).

Analogický postup můžeme použít pro numerické řešení všech lineárních parciálních diferenciálních rovnic druhého řádu. Postup řešení je vždy stejný: derivace nahradíme diferencemi a hledáme řešení soustavy lineárních algebraických rovnic.

Pro další parciální derivace se používají aproximace:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u(x_i, y_j)}{\partial x} &= \frac{u_{i+1,j} - u_{i,j}}{h}, & \frac{\partial u(x_i, y_j)}{\partial y} &= \frac{u_{i,j+1} - u_{i,j}}{k}, \\ \frac{\partial u(x_i, y_j)}{\partial x} &= \frac{u_{i,j} - u_{i-1,j}}{h}, & \frac{\partial u(x_i, y_j)}{\partial y} &= \frac{u_{i,j} - u_{i,j-1}}{k}, \\ \frac{\partial u(x_i, y_j)}{\partial x} &= \frac{u_{i+1,j} - u_{i-1,j}}{2h}, & \frac{\partial u(x_i, y_j)}{\partial y} &= \frac{u_{i,j+1} - u_{i,j-1}}{2k}, \\ \frac{\partial^2 u(x_i, y_j)}{\partial x \partial y} &= \frac{u_{i+1,j+1} - u_{i+1,j-1} - u_{i-1,j+1} + u_{i-1,j-1}}{2h2k}. \end{aligned}$$

Problémy při řešení mohou vznikat, pokud oblast Ω není obdelníková.

Definice 12.1. Bod $P_{ij} = (x_i, y_j)$ sítě na oblasti Ω nazveme *vnitřním*, jestliže všechny body úseček spojujících jej se sousedními body $P_{i\pm 1,j}$, $P_{i,j\pm 1}$ leží v Ω a nazveme jej *hraničním* v opačném případě.

Pro určení hodnoty funkce u v hraničních bodech se nejčastěji používá lineární interpolace či extrapolace.

Nechť hraniční bod Q leží na spojnici uzlů P_{ij} , $P_{i+1,j}$, ve vzdálenosti δ od bodu P_{ij} . Nechť se hodnoty funkce u mění lineárně podél této spojnice. Potom

$$\frac{u(Q) - u(P_{ij})}{\delta} = \frac{u(P_{ij}) - u(P_{i-1,j})}{h}.$$

Protože podle definice ?? můžeme psát $u(Q) = \varphi(Q)$ a dále $u(P_{ij}) = u_{ij}$, tak po úpravě dostaneme

$$\varphi(Q) = \left(1 + \frac{\delta}{h}\right) u_{ij} - \frac{\delta}{h} u_{i-1,j}$$

a nebo

$$u_{ij} = \frac{h\varphi(Q) + \delta u_{i-1,j}}{h + \delta} = \frac{h}{h + \delta} \varphi(Q) + \frac{\delta}{h + \delta} u_{i-1,j},$$

protože známe hodnotu v bodě Q a potřebujeme dopočítat hodnotu v bodě P_{ij} .

Pro rovnice jiných typů je postup analogický. Vždy požadujeme, aby výsledná soustava lineárních algebraických rovnic byla jednoznačně řešitelná. Z této podmínky plynou i požadavky na tvar rovnice, které nám potom zaručí jednoznačnost a konvergenci řešení.

Postup si ukážeme na rovnici parabolického typu, půjde o zobecnění rovnice vedení tepla (11.3), kdy přidáme ještě další člen,

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x, t), \quad (12.3)$$

počáteční podmínka

$$u(x, 0) = \varphi(x), \quad (12.4)$$

a okrajové podmínky

$$u(0, t) = \mu_1(t), \quad (12.5)$$

$$u(l, t) = \mu_2(t), \quad (12.6)$$

kde f, φ, μ_1, μ_2 jsou zadané spojité funkce, $x \in \langle 0, l \rangle$, $t \in \langle 0, T \rangle$.

Rozdělíme si interval $\langle 0, l \rangle$ na n dílů délky $\Delta x = \frac{l}{n}$. Na ose t si zvolíme velikost kroku Δt tak, aby platilo $\Delta t = \varrho \Delta x^2$. Důvod bude zřejmý z dalšího výkladu. Derivace v rovnici (12.3) nahradíme diferencemi a dostaneme

$$\frac{u_{i,k+1} - u_{i,k}}{\Delta t} = \frac{u_{i+1,k} - 2u_{i,k} + u_{i-1,k}}{\Delta x^2} + f(x_i, t_k).$$

Nyní vynásobíme celou rovnici výrazem $\Delta t = \varrho \Delta x^2$ a dostaneme po úpravě

$$u_{i,k+1} = (1 - 2\varrho)u_{i,k} + \varrho(u_{i-1,k} + u_{i+1,k}) + \Delta t f(x_i, t_k). \quad (12.7)$$

Dosažením do počátečních a okrajových podmínek dostaneme

$$u_{i,0} = \varphi(x_i), u_{0,k} = \mu_1(t_k), u_{l,k} = \mu_2(t_k). \quad (12.8)$$

Tím jsme získali soustavu lineárních algebraických rovnic. Pro její řešitelnost je třeba volit $\varrho \leq 1/2$. V opačném případě nastává numerická nestabilita a výpočet se bude výrazně lišit od skutečnosti.

12.3 Shrnutí kapitoly

Seznámili jsme se s použitím numerické metody konečných diferencí pro určení řešení některých typů parciálních diferenciálních rovnic druhého řádu.

Základem metody je diskretizace proměnných, přičemž krok nemusí být na obou souřadnicových osách stejný. Místo spojitého řešení hledáme diskrétní funkci definovanou na

konečném počtu bodů. Úloha nalézt řešení parciální diferenciální rovnice druhého řádu je převedena na úlohu nalézt řešení soustavy lineárních algebraických rovnic. Konstrukce řešení nám zaručuje, že získaná soustava lineárních algebraických rovnic bude jednoznačně řešitelná. Získaná diskrétní funkce v limitě konverguje k přesnému řešení naší úlohy.

12.4 Řešený příklad

Příklad 12.2. Metodou konečných diferencí řešte okrajovou úlohu

$$u_{xx} + u_{yy} = 8x$$

$$u(x, 0) = x^3, \quad u(0, y) = 0, \quad u(x, y)|_{x^2+y^2=10} = 10x(y+1),$$

kde oblast Ω je vnitřní část čtvrtkruhu

$$x \geq 0, \quad y \geq 0, \quad x^2 + y^2 \leq 10.$$

Řešení. Rovnici si upravíme na stejný tvar jako (12.1)

$$-\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -8x.$$

Zvolme čtvercovou síť s krokem $h = 1$. Potom máme hraniční body

$$\begin{aligned} u(0, 0) &= 0, \quad u(1, 0) = 1, \quad u(2, 0) = 8, \quad u(3, 0) = 27, \\ u(0, 1) &= u(0, 2) = u(0, 3) = 0, \\ u(1, 3) &= 40, \quad u(3, 1) = 60. \end{aligned}$$

Ještě potřebujeme znát hodnotu v bodě $P_{2,2}$. Protože je

$$Q = (2.449; 2), \quad \varphi(Q) = 73.485, \quad \delta = 0.449,$$

, lineární interpolací dostaneme

$$u_{2,2} = \frac{1 \cdot 73.485 + 0.449 \cdot u_{1,2}}{1 + 0.449} = 50.697 + 0.310u_{1,2}.$$

Nyní pro 3 vnitřní uzly sestavíme síťové rovnice podle (12.2), přitom hraniční uzly jsou podtrženy.

$$4u_{1,1} - \underline{u_{0,1}} - \underline{u_{2,1}} - \underline{u_{1,0}} - u_{1,2} = -8,$$

$$4u_{1,2} - u_{1,1} - \underline{u_{1,3}} - \underline{u_{0,2}} - \underline{u_{2,2}} = -8,$$

$$4u_{2,1} - u_{1,1} - \underline{u_{3,1}} - \underline{u_{2,0}} - \underline{u_{2,2}} = -16$$

a pak přidáním odvozeného vztahu pro $u_{2,2}$ dostaneme soustavu 4 rovnic o čtyřech neznámých. Po úpravě

$$u_{1,1} = \frac{1}{4}(0 + u_{2,1} + 1 + u_{1,2}) - \frac{1}{4}8,$$

$$\begin{aligned}u_{2,1} &= \frac{1}{4}(u_{1,1} + u_{2,2} + 60 + 8) - \frac{1}{4}16, \\u_{1,2} &= \frac{1}{4}(0 + 40 + u_{1,1} + u_{2,2}) - \frac{1}{4}8, \\u_{2,2} &= 50.697 + 0.310u_{1,2}.\end{aligned}$$

Jejím řešením je pak

$$\begin{aligned}u_{1,1} &= 12.384, \\u_{2,1} &= 30.768, \\u_{1,2} &= 25.768, \\u_{2,2} &= 58.688.\end{aligned}$$

Další postup je pak obvyklý, t.j. zmenšíme krok a opakujeme výpočet až se nám odchylky v uzlových bodech ustálí.

Nechť je $h = 1/2$. Potom dostaneme síťové rovnice pro 19 vnitřních bodů a ještě musíme dopočítat hodnoty 5 hraničních uzlů lineární interpolací. Dostaneme tedy soustavu 24 rovnic o 24 neznámých. Přitom každá rovnice obsahuje nejvýše 5 nenulových hodnot proměnných.

Pro hraniční uzly máme

$$\begin{aligned}u_{6,1} &= 37.651 + 0.196u_{5,1}, \\u_{5,3} &= 44.388 + 0.223u_{4,3}, \\u_{4,4} &= 38.717 + 0.473u_{3,4}, \\u_{3,5} &= 36.196 + 0.446u_{2,5},\end{aligned}$$

a pro poslední hodnotu bereme buď

$$u_{1,6} = \frac{1}{2}(u_{0,6} + u_{2,6}) = 20,$$

nebo si tuto hodnotu vypočítáme, přitom bereme sousední uzly po vertikále (doposud jsme je brali po horizontále), pak dostaneme rovnici

$$u_{1,6} = 16.567 + 0.196u_{1,5}.$$

Pro vnitřní uzly pak budeme mít soustavu

$$\begin{aligned}-4u_{11} + u_{01} + u_{10} + u_{21} + u_{12} &= 1, \\-4u_{12} + u_{02} + u_{11} + u_{22} + u_{13} &= 1, \\-4u_{13} + u_{03} + u_{12} + u_{23} + u_{14} &= 1, \\-4u_{14} + u_{04} + u_{13} + u_{24} + u_{15} &= 1, \\-4u_{15} + u_{05} + u_{14} + u_{25} + u_{16} &= 1, \\-4u_{21} + u_{11} + u_{20} + u_{31} + u_{22} &= 2,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
-4u_{22} + u_{12} + u_{21} + u_{32} + u_{23} &= 2, \\
-4u_{23} + u_{13} + u_{22} + u_{33} + u_{24} &= 2, \\
-4u_{24} + u_{14} + u_{23} + u_{34} + u_{25} &= 2, \\
-4u_{25} + u_{15} + u_{24} + u_{35} + u_{26} &= 2, \\
-4u_{31} + u_{21} + u_{30} + u_{41} + u_{32} &= 3, \\
-4u_{32} + u_{22} + u_{31} + u_{42} + u_{33} &= 3, \\
-4u_{33} + u_{23} + u_{32} + u_{43} + u_{34} &= 3, \\
-4u_{34} + u_{24} + u_{33} + u_{44} + u_{35} &= 3, \\
-4u_{41} + u_{31} + u_{40} + u_{51} + u_{42} &= 4, \\
-4u_{42} + u_{32} + u_{41} + u_{52} + u_{43} &= 4, \\
-4u_{43} + u_{33} + u_{42} + u_{53} + u_{44} &= 4, \\
-4u_{51} + u_{41} + u_{50} + u_{61} + u_{52} &= 5, \\
-4u_{52} + u_{42} + u_{51} + u_{62} + u_{53} &= 5.
\end{aligned}$$

Tím máme celou soustavu hotovou a zbývá ji „jen“ vyřešit. □

Cvičení

1. Metodou konečných diferencí řešte okrajovou úlohu

$$u_{xx} + u_{yy} = 8x$$

$$u(x, 0) = x^2, \quad u(0, y) = 0, \quad u(x, y)|_{x^2+y^2=10} = 10x(y+1),$$

kde oblast Ω je vnitřní část čtverťkruhu

$$x \geq 0, \quad y \geq 0, \quad x^2 + y^2 \leq 9.$$

2. Co to jsou hraniční body sítě?

Výsledky

1. Postupujte podobně jako v řešeném příkladu [12.2](#).

2. Tento pojem je uveden v definici [12.1](#).

13 Metoda konečných prvků pro PDR - řešení pomocí Matlabu

13.1 Cíl kapitoly

Cílem této kapitoly je předvést, jak můžeme parciální diferenciální rovnice numericky řešit s použitím Matlabu. Matlab nepoužívá pro řešení PDR metodu konečných diferencí, popsanou v předchozí kapitole, nýbrž metodu konečných prvků, která je jednou z nejdůležitějších a nepoužívanějších numerických metod pro řešení parciálních diferenciálních rovnic. Princip této metody zde bude nastíněn jen velmi, velmi zhruba, protože na podrobnější vysvětlení bohužel nemáme prostor.

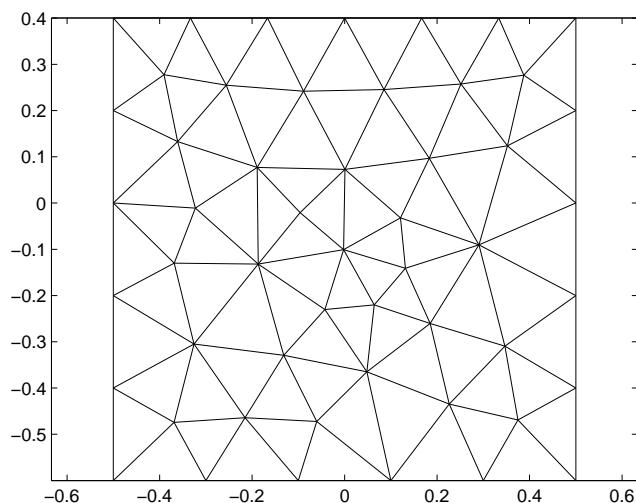
13.2 Metoda konečných prvků

Metoda konečných prvků (MKP, anglicky FEM – „finite element method“) má mnoho společných rysů s metodou konečných diferencí (MKD). Opět hledáme řešení nějaké parciální diferenciální rovnice na zadané oblasti Ω . Matlab umožňuje řešit parciální diferenciální rovnice druhého řádu na rovinných oblastech (tj. hledaná funkce u závisí na prostorových proměnných x a y a případně na čase t), ale obecně lze metodou konečných prvků řešit i rovnice vyššího než druhého řádu a ve vyšších dimenzích než v rovině (ovšem už v třírozměrném prostoru se problém technicky velmi zkomplikuje). Všude dál v této kapitole budeme uvažovat pouze rovinné oblasti.

Stejně jako u metody konečných diferencí oblast Ω pokryjeme sítí. Na rozdíl od MKD se však v základní verzi metody konečných prvků používají trojúhelníkové sítě, viz obrázek 13.1. Říkáme, že **oblast Ω ztriangulujeme**. Na obrázku vidíme, že síť nemusí být nikterak pravidelná. Je však vhodné, aby jednotlivé trojúhelníky nebyly příliš „placaté“, tj. aby jejich vnitřní úhly nebyly příliš malé.

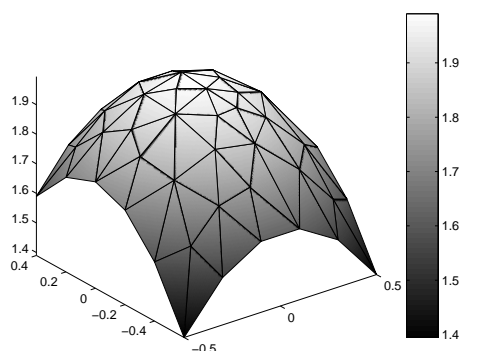
Výhodou trojúhelníkových sítí (oproti obdélníkovým, které se používají u MKD) je to, že mohou dobře vystihnout i velmi složité oblasti. Tím odpadají problémy s realizací okrajových podmínek, které jsme řešili u MKD (viz příklad 12.2).

Další analogie s metodou konečných diferencí je v tom, že **původní parciální diferenciální rovnici převedeme na soustavu algebraických rovnic** (lineárních či nelineárních, dle povahy původní úlohy) s neznámými u_1, u_2, \dots, u_n , kde u_i je přibližná hodnota řešení v i -tém uzlu sítě a n je počet uzlů. Postup, jakým je tato soustava tzv. diskretizačních rovnic získána, je však zcela odlišný a daleko komplikovanější než u MKD

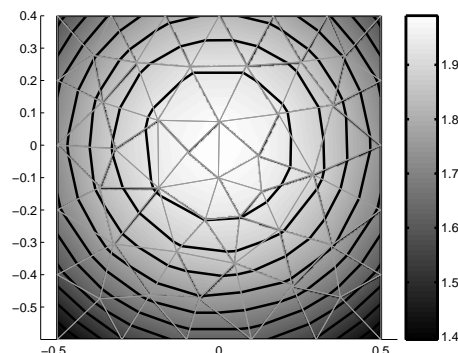
Obr. 13.1: Triangulovaná oblast Ω

a popisovat jej zde nebudeme. Soustavu diskretizačních rovnic vyřešíme – tím získáme hodnoty řešení v uzlových bodech – a za přibližné řešení rovnice na celé oblasti Ω bereme destičkovou plochu (což je prostorová analogie lomené čáry v rovině, viz obrázek 13.2) danou těmito hodnotami. To, že získáme řešení na celé oblasti, a nikoli jen v uzlech sítě, je další výhodou metody konečných prvků oproti MKD.

Pro ilustraci slouží obrázek 13.2, na kterém vidíme přibližné řešení rovnice $-\Delta u = 4$ na oblasti Ω z obrázku 13.1 s okrajovou podmínkou $u(x, y) = 2 - x^2 - y^2$ na $\partial\Omega$. Snadno bychom ověřili, že přesným řešením této rovnice s touto okrajovou podmínkou je funkce $u(x, y) = 2 - x^2 - y^2$. Grafem řešení tedy je rotační paraboloid. Vidíme, že přibližné řešení nalezené metodou konečných prvků tvarem paraboloidu vcelku odpovídá, pro přesnější srovnání bychom museli porovnat příslušné numerické hodnoty. Prostorový graf nemusí být ovšem zrovna nejpřehlednější, řešení se proto častěji znázorňuje pomocí vrstevnic, viz obrázek 13.3.



Obr. 13.2: Graf přibližného řešení



Obr. 13.3: Přibližné řešení téže rovnice znázorněné pomocí vrstevnic

13.3 Příklad řešení pomocí Matlabu

Poznámka 13.1. Všem jazykovým puristům se omlouváme za to, že v dalším textu budeme do češtiny míchat různá anglická slova (a občas je ještě navíc potvořit skloňováním). Autoři z vlastní zkušenosti soudí, že v oblasti počítačových programů je příliš důsledný překlad do češtiny spíš na škodu věci.

V Matlabu lze parciální diferenciální rovnice řešit velmi snadno, máme-li nainstalovaný tzv. PDE Toolbox (PDE = „partial differential equations“). Nejpohodlnější je pracovat s grafickým uživatelským rozhraním (GUI). Ukážeme zde řešení jednoho příkladu právě v tomto prostředí. Budeme řešit téměř totožný příklad, jako byl ten v předchozí kapitole (př. 12.2).

Příklad 13.2. Pomocí Matlabu řešte metodou konečných prvků okrajovou úlohu

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 8x \quad \text{na } \Omega, \quad (13.1)$$

kde oblast Ω je čtvrtina kruhu se středem v počátku souřadné soustavy a poloměrem 3, která leží v prvním kvadrantu:

$$\Omega = \{(x, y) : x \geq 0, y \geq 0, x^2 + y^2 \leq 9\},$$

s Dirichletovými okrajovými podmínkami

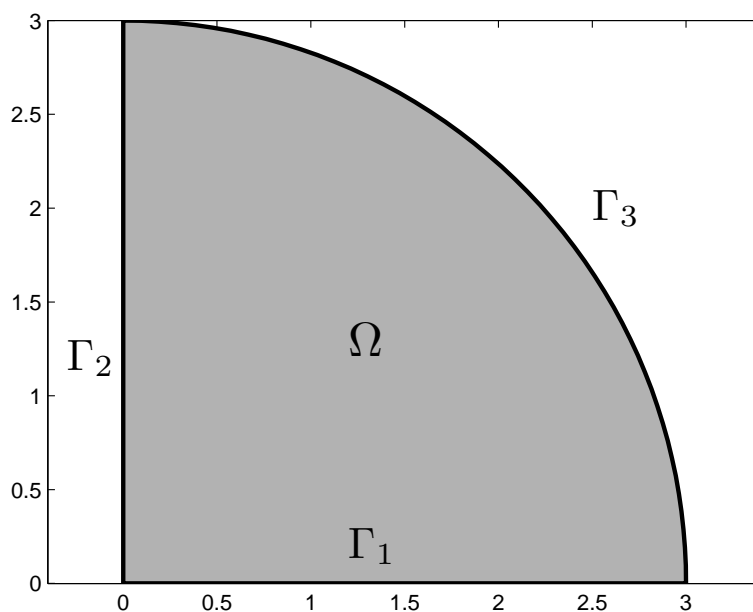
$$\begin{aligned} u(x, y) &= x^3 & \text{na } \Gamma_1 &= \{(x, y) : 0 \leq x \leq 3, y = 0\}, \\ u(x, y) &= 0 & \text{na } \Gamma_2 &= \{(x, y) : x = 0, 0 \leq y \leq 3\}, \\ u(x, y) &= 9x(y + 1) & \text{na } \Gamma_3 &= \{(x, y) : x \geq 0, y \geq 0, x^2 + y^2 = 9\}. \end{aligned} \quad (13.2)$$

Oblast Ω s vyznačenými částmi hranice Γ_1 , Γ_2 a Γ_3 vidíme na obrázku 13.4.

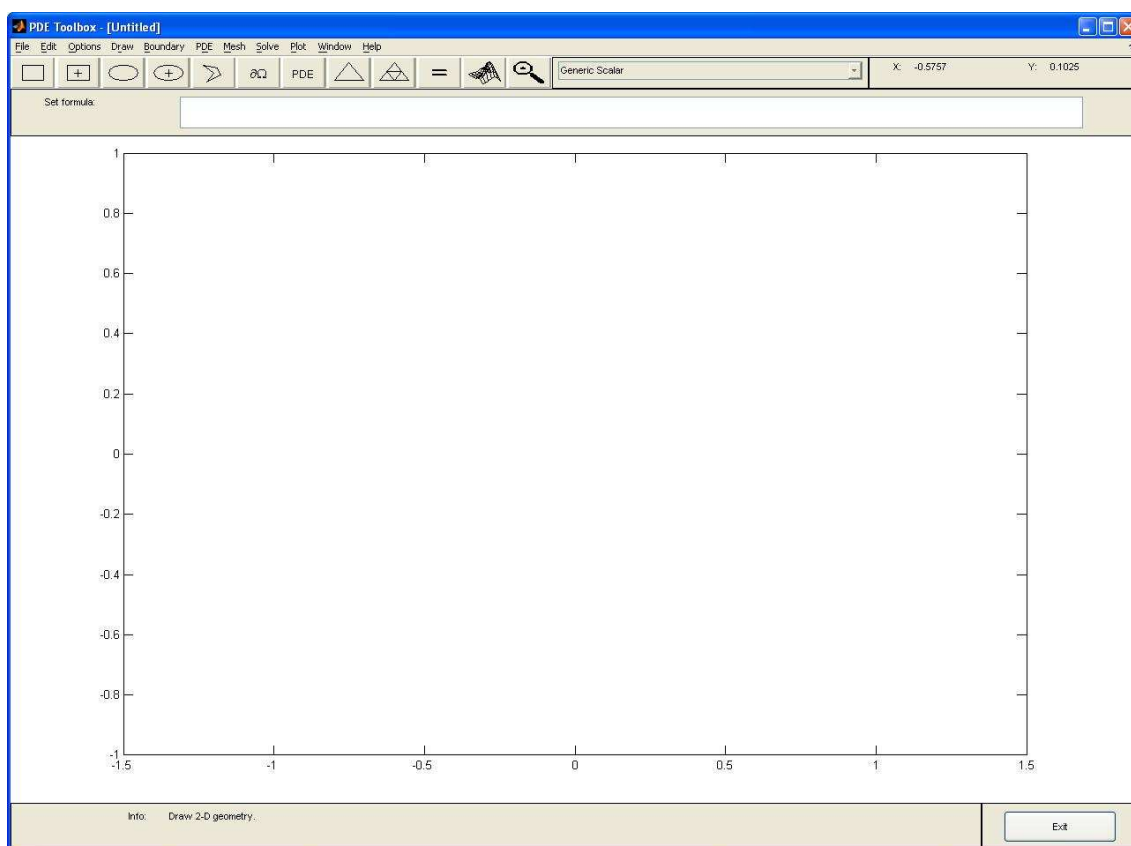
Řešení. Spustíme Matlab. Do příkazového okna napíšeme příkaz k otevření prostředí pro řešení parciálních diferenciálních rovnic:

```
>> pdetool
```

Otevře se následující okno



Obr. 13.4: K příkladu 13.2: Oblast Ω a její hranice, rozdělená na tři části



Řešení příkladu v tomto prostředí popíšeme krok za krokem. Každá akce, kterou je třeba provést, bude označena symbolem ●.

Zadání oblasti Ω

Oblast, na které řešíme parciální diferenciální rovnici, můžeme zadat interaktivně. Na bílou plochu uprostřed můžeme umisťovat různé geometrické obrazce (obdélníky, kruhy, elipsy a polygony) a pak z nich pomocí množinových operací (sjednocení, průniku a rozdíl) sestavit požadovanou oblast. Naši oblast (čtvrtkruh) dostaneme jako průnik kruhu se středem v počátku a poloměrem 3 a čtverce, který má levý dolní vrchol v počátku a stranu o délce 3 (případně cokoli většího než 3).

Rozmezí os na ploše neodpovídá našim potřebám, a proto je musíme změnit:

- V menu v položce **Options** vybereme **Axis Limits...** a nastavíme správné rozmezí - pro náš příklad můžeme zadat pro obě osy např. meze -1 až 4.

Dále nastavíme, aby se ukazovala mřížka a aby se body, které budeme za chvíli klikáním zadávat (vrcholy čtverce a pod.) k mřížce přichytávaly.

- V **Options** klikneme na položku **Grid**.
- V **Options** klikneme na položku **Snap** („snap to grid“ = „přilnout k mřížce“).

Nyní zadáme kruh:

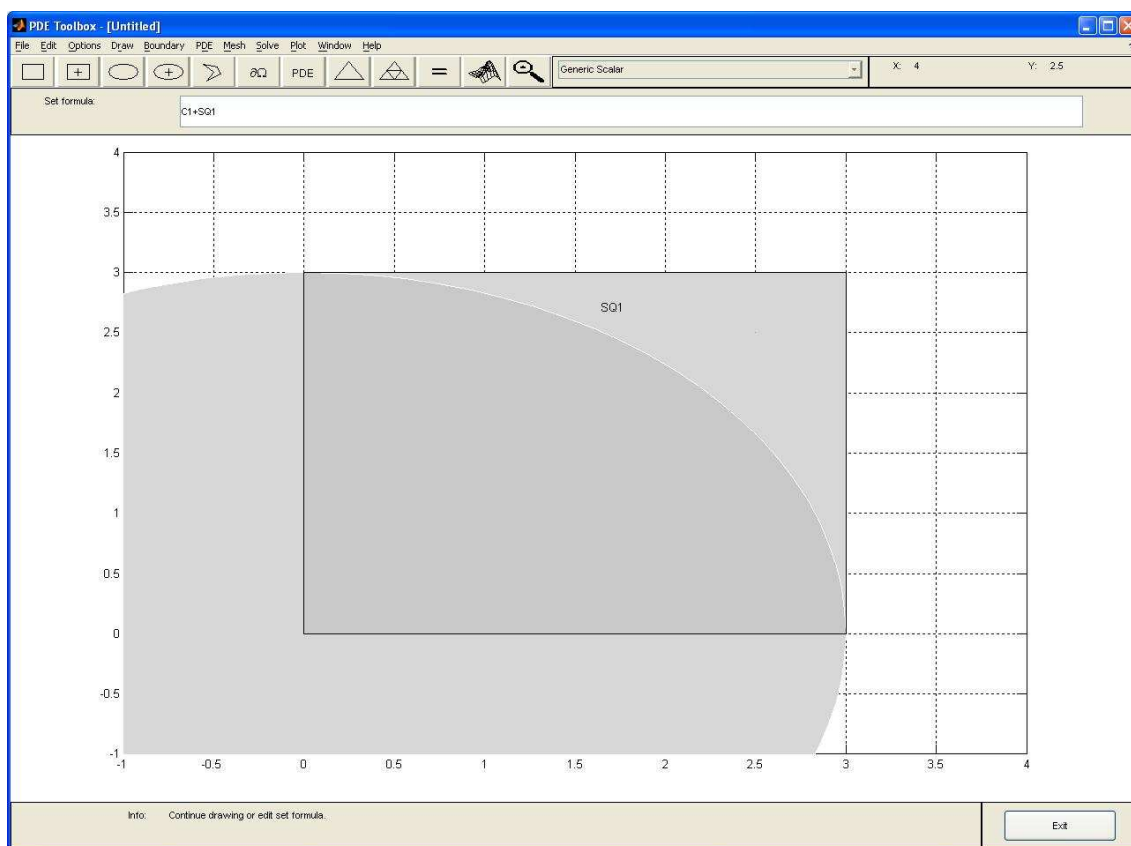
- Klikneme na tlačítko se symbolem \oplus . Tím budeme zadávat elipsu, s tím, že první bod, na který klikneme, je jejím středem.

- Najedeme myší na bod $(0, 0)$, stiskneme tlačítko myši (díky tomu, že jsme zvolili „snap to grid“, se nemusíme trefit úplně přesně) a táhneme - objeví se obrys elipsy. Táhneme, až elipsu (v našem případě vlastně kruh) natáhneme do požadovaných rozměrů.

Podobným způsobem zadáme čtverec:

- Klikneme na tlačítko se symbolem \square . Tím budeme zadávat obdélník.
- Opět najedeme na bod $(0, 0)$ (levý dolní roh čtverce) a dotáhneme kurzor do bodu $(3, 3)$ (pravý horní roh).

Výsledek by měl vypadat nějak takto:



Kdybychom některý z objektů zadali jinak, než jsme chtěli, můžeme jej vcelku snadno opravit: Nejprve na požadovaný objekt klikneme a tím jej vybereme pro další úpravy (aktuálně vybraný objekt má černě zvýrazněnou hranici). Je-li nevhodně umístěn, ale velikost má přitom správnou, můžeme jej pomocí myši přetáhnout na jiné místo. Chceme-li změnit velikost, stačí, když na vybraný objekt „doubleklikneme“ (Jak je tohle správně česky? Poklepeme? Dvojklikneme?). Otevře se dialog, ve kterém můžeme změnit rozměry, umístění i název. Pokud jsme to zkusili úplně, můžeme vybraný objekt stisknutím klávesy Delete odstranit a začít znovu.

Zatím jsme jen zadali kruh a čtverec, ale nijak jsme počítači nesdělili, že nás zajímá jejich průnik. To provedeme nyní. Podíváme se na políčko nadepsané **Set formula**. Do tohoto políčka zadáváme množinový vzorec („set“ má kromě mnoha jiných i význam „množina“, „formula“ snad překládat netřeba), pomocí něhož je z jednotlivých zadaných oblastí sestavena oblast výsledná. Můžeme používat operátory + (sjednocení), * (průnik) a – (množinový rozdíl). Při našem zadávání kruhu a čtverce se v poli Set formula automaticky objevil text C1+SQ1. Kdybychom to tak nechali, za oblast Ω by se vzalo sjednocení oblastí C1 (C jako „circle“ = kruh) a SQ1 (SQ jako „square“ - čtverec). My ale potřebujeme průnik, a proto

- změníme text v editačním poli **Set formula** na C1*SQ1. Navenek nepoznáme žádnou změnu, obrázek bude vypadat pořád stejně.

Nyní nastal vhodný okamžik pro uložení výdobytků naší práce.

- Uložíme rozpracovanou úlohu např. jako soubor příklad1.m (klasicky: v menu **File**, **Save as...**).

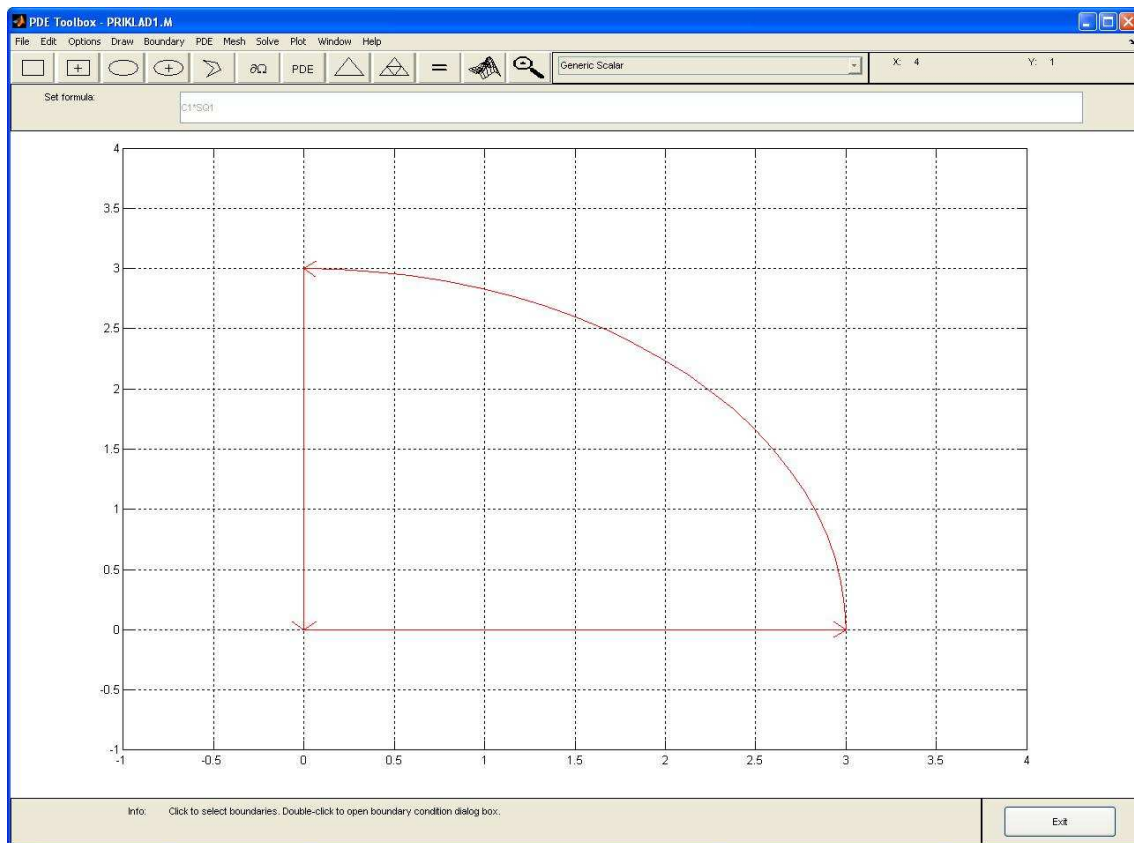
Můžeme se do uloženého souboru podívat, např. v editoru Matlabu nebo třeba v Poznámkovém bloku, jak kdo chce. Uvidíme, že Matlab automaticky vytvořil poměrně dlouhý soubor, v němž většině věcí nerozumíme, a proto do něj nebudeme vrtat.

Při další práci je vhodné čas od času úlohu opět uložit, dále již to zdůrazňovat nebudeme.

Zadání okrajových podmínek

Pokračujeme zadáním okrajových podmínek. Nejprve si necháme zobrazit hranici oblasti.

- Klikneme na tlačítko se symbolem $\partial\Omega$. (Jiná možnost: v menu **Boundary**, pak **Boundary Mode**.) Ukáže se nám hranice oblasti:



Postupně zadáme okrajové podmínky podle předpisů (13.2). Nejprve zadáme podmínku na vodorovné části hranice Γ_1 (viz též obrázek 13.4).

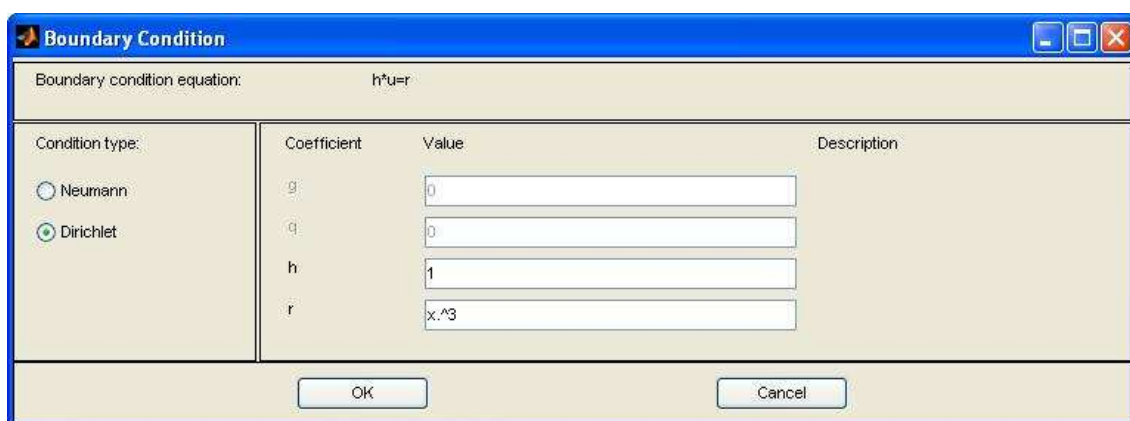
- Doubleklikneme na vodorovnou část hranice. Otevře se dialog pro zadávání okrajové podmínky. Jiná možnost: Na příslušnou část hranice klikneme (jednou). Tím bude tato část hranice vybrána pro další práci. Pak vybereme v menu **Boundary** a **Specify Boundary Conditions...**

V dialogu nyní zadáme okrajovou podmínku $u(x, y) = x^3$. V Matlabu lze zadávat dva základní druhy okrajových podmínek, Dirichletovy (je přímo zadáno, čemu se má řešení na hranici rovnat) a Neumannovy (které obsahují též derivaci řešení ve směru normály k hranici). Naše okrajové podmínky jsou Dirichletova typu.

• V dialogu proto vybereme (či spíš necháme nastaveno) **Condition type** na **Dirichlet**.

Matlab očekává nyní podmínku ve tvaru (viz horní část dialogu) $h \cdot u = r$, kde h a r jsou zadané funkce, případně konstanty. Pro naši podmínku $u(x, y) = x^3$ je $h = 1$ a $r(x, y) = x^3$.

• V dialogu vyplníme kolonku pro funkci r výrazem $x.^3$. (Funkce h je na jedničku nastavená automaticky.) Vyplněný dialog by měl vypadat takto:



Podobným způsobem zadáme okrajové podmínky na ostatních částech hranice:

- Doubleklikneme na svislou část hranice. V dialogu zkontrolujeme, zda je zatržen Dirichletův typ okrajových podmínek a vyplníme kolonku pro funkci r výrazem 0 .
- Totéž provedeme pro obloukovou část hranice, tentokrát zadáme $9*x.*(y+1)$.

Zadání rovnice

Nyní zadáme samotnou parciální diferenciální rovnici, kterou chceme vyřešit.

• Klikneme na tlačítko **PDE** nebo v menu vybereme **PDE** a pak **PDE Specification...**

Otevře se dialog pro zadání rovnice. V levé části dialogu vybíráme typ rovnice - na výběr máme rovnici eliptickou, parabolickou, hyperbolickou a problém vlastních čísel. Naše rovnice (13.1) je typu eliptického, proto

• vybereme (případně jen zkontrolujeme, zda je vybrán) z možností pro **Type of PDE** typ **Elliptic**.

Rovnice je nyní očekávána (viz horní část dialogu) ve tvaru

$$-\operatorname{div}(c \cdot \operatorname{grad} u) + au = f \quad (13.3)$$

a po nás se chce, abychom doplnili funkce c , a a f . Doufáme, že tvarem (13.3) nejste příliš zaskočení, pro jistotu však připomeňme, že je-li f funkce proměnných x_1, x_2, \dots, x_n , pak gradient funkce f je

$$\operatorname{grad} f = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n} \right),$$

a jsou-li g_1, g_2, \dots, g_n funkce proměnných x_1, x_2, \dots, x_n , pak divergence zobrazení $g = (g_1, \dots, g_n)$ je

$$\operatorname{div} g = \frac{\partial g_1}{\partial x_1} + \frac{\partial g_2}{\partial x_2} + \dots + \frac{\partial g_n}{\partial x_n}.$$

Těž si snad pamatujete, že

$$\operatorname{div}(\operatorname{grad} f) = \frac{\partial}{\partial x_1} \left(\frac{\partial f}{\partial x_1} \right) + \dots + \frac{\partial}{\partial x_n} \left(\frac{\partial f}{\partial x_n} \right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} + \dots + \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2} = \Delta f.$$

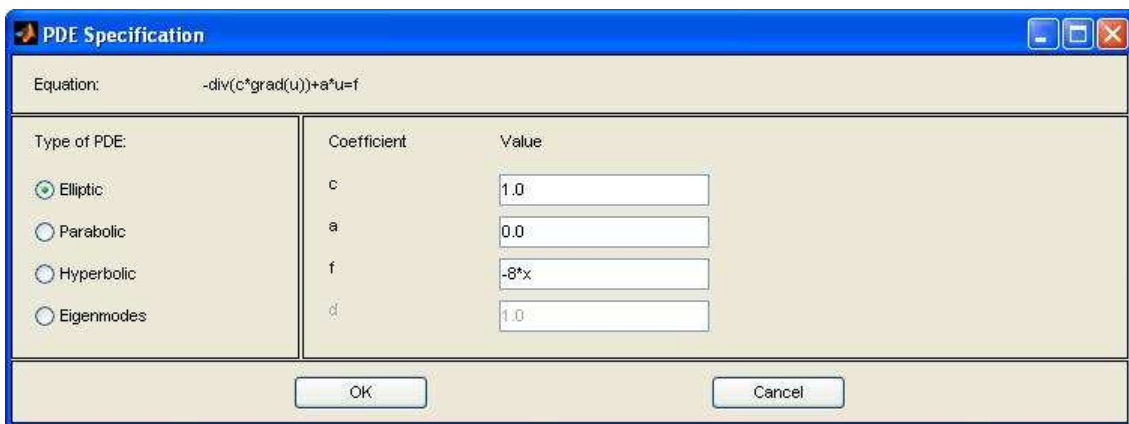
Řešená rovnice (13.1), tj. $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 8x$, po snadné úpravě $-\Delta u = -8x$, se tedy do tvaru (13.3) přepíše jako

$$-\operatorname{div}(1 \cdot \operatorname{grad} u) + 0 \cdot u = -8x.$$

Proto dialog pro zadání rovnice doplníme takto (některé z uvedených hodnot už tam možná jsou „samy od sebe“, pak je pochopitelně necháme být):

- Do kolonky pro funkci c doplníme konstantu 1, do kolonky pro a napíšeme nulu a do kolonky pro f napíšeme $-8*x$.

Celá věc by pak měla vypadat následovně:



Triangulace oblasti

Oblast Ω ztriangulujeme:

- Klikněte na tlačítko s trojúhelníkem nebo v menu vyberte **Mesh** a pak **Initialize Mesh**

Chceme-li mít síť jemnější, můžeme

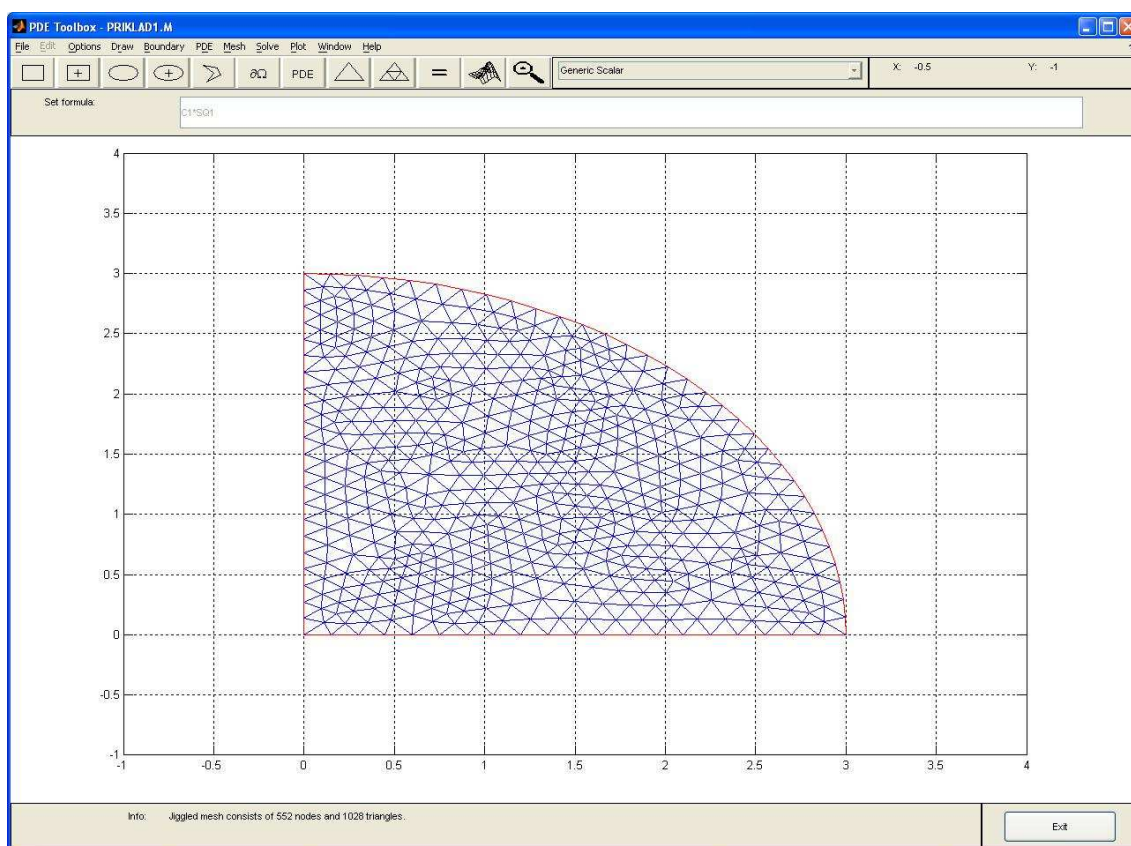
- kliknout na tlačítko s trojúhelníkem rozděleným na čtyři menší trojúhelníky nebo v menu vybrat **Mesh** a pak **Refine Mesh**.

Zjemněnou síť pak můžeme ještě poněkud vylepšit (zpravidelnit, odstranit z ní některé úzké trojúhelníky) pomocí funkce Jiggle. (Původní význam slova „jiggle“ je „pohupovat“ či „trhaně se pohybovat“, v souvislosti se sítí se tím myslí zhruba to, že uzly sítě se trochu popřemisťují, každý uzel se přesune do průměru svých sousedů.)

- Můžeme v menu vybrat **Mesh** a pak **Jiggle Mesh** - tuto operaci můžeme provádět i opakovaně.

Pokud se nám to, co se se sítí děje, nelíbí, můžeme úpravy brát zpět pomocí menu: Mesh, pak Undo Mesh Change. První návrh sítě můžeme ovlivnit pomocí nastavení parametrů (v menu Mesh, Parameters...). Zde můžeme např. nastavit maximální povolenou délku hrany (maximum edge size).

Jestliže jsme zjemnění a „jigglování“ provedli právě jednou, měli bychom mít na obrazovce toto:



Sít' můžeme exportovat pro její případné další použití: v menu Mesh, pak Export Mesh... Sít' bude uložena pomocí tří matic, jejichž jména si můžeme vybrat. Matlab nám nabízí jména p , e a t . První matice bude obsahovat informace o uzlech sítě (points), druhá o hranách (edges) a třetí o trojúhelnících (triangles). S těmito maticemi pak v Matlabu můžeme dále pracovat dle potřeby, např. si jejich prvky můžeme nechat vypsat do souboru, který pak můžeme přenést a používat v jiném programu.

Řešení rovnice a jeho grafické znázornění

Teď když máme všechno připravené, můžeme konečně najít přibližné řešení rovnice.

- Klikneme na tlačítko s rovnítkem nebo v menu vybereme **Solve**, pak **Solve PDE**.

Řešení bude asi chvílku trvat (je nutno ne zcela jednoduchým způsobem sestavit a pak vyřešit systém zhruba 500 rovnic o 500 neznámých – pokud pracujeme se sítí, která je na předchozím obrázku). Až je počítač hotov, řešení se zobrazí pomocí dvourozměrného obrázku – hodnoty řešení na oblasti Ω jsou rozlišeny pomocí barev, vpravo máme zobrazenou stupnici (angl. colorbar), pomocí níž poznáme, jaká barva odpovídá jaké hodnotě řešení.

Chceme-li řešení exportovat pro další použití, uděláme to přes menu: Solve, pak Export Solution. . . Řešení je uloženo ve formě vektoru (jméno si můžeme vybrat, automaticky se nabízí u), jehož složky jsou hodnoty řešení v jednotlivých uzlech sítě. Chceme-li s tímto řešením dále pracovat, případně je (přes soubor) přenést do nějakého jiného programu, musíme k němu samozřejmě mít i příslušnou síť, hlavně její uzly, jinak je zcela bezcenné.

Parametry zobrazení řešení můžeme měnit. Formulář pro nastavení parametrů se nám zobrazí po stisknutí tlačítka s 3-D grafem, případně se k němu dostaneme z menu: Plot, Parameters. . . Zde již necháme každému čtenáři prostor pro experimentování. \square

Cvičení

1. Pomocí Matlabu najděte přibližné řešení úlohy

$$-\Delta u = 5 \sin\left(10 \arctg \frac{y}{x}\right) \quad \text{na } \Omega,$$

kde Ω je část mezikruží o poloměrech $r = 1$, $R = 3$, která leží v prvním kvadrantu,

$$\Omega = \{(x, y) : x \geq 0, y \geq 0, 1 \leq x^2 + y^2 \leq 9\},$$

s okrajovými podmínkami

$$\begin{aligned} u(x, y) &= 0 & \text{na } \Gamma_1 &= \{(x, y) : x \geq 0, y \geq 0, x^2 + y^2 = 1\}, \\ u(x, y) &= 5 & \text{na } \Gamma_2 &= \{(x, y) : x \geq 0, y \geq 0, x^2 + y^2 = 9\}, \\ \vec{n} \cdot \text{grad } u &= 0 & \text{na } \Gamma_3 &= \{(x, y) : 1 \leq x \leq 3, y = 0\} \text{ a } \Gamma_4 = \{(x, y) : x = 0, 1 \leq y \leq 3\}. \end{aligned}$$

Výsledky

1. Spíše několik poznámek a tipů:

Pozor na okrajovou podmínku zadanou na Γ_3 a Γ_4 . Symbolem \cdot se zde nemyslí obyčejné násobení, ale skalární součin. Podmínka mohla být též zapsána jako $\partial u / \partial \vec{n} = 0$. Jedná se o homogenní Neumannovu okrajovou podmínku, které se též říká podmínka kolmosti. Až budete mít řešení, nechte si zobrazit vrstevnice (contours) a pokuste se odhadnout, proč se v souvislosti s touto podmínkou zmiňuje zrovna kolmost.

Při zadávání této podmínky si můžete všimnout, že v Matlabu bude očekáván tvar $\mathbf{n} * \mathbf{c} * \text{grad}(u) + \mathbf{q} = \mathbf{g}$. Písmenem \mathbf{n} se myslí normála \vec{n} , takže nezadávejte nic. Funkce c je tatáž jako v rovnici (viz (13.3)) a zadáme ji (nebo spíš necháme nastavenou na 1) až při zadávání rovnice. Jediné, co musíme zadat přímo zde, jsou funkce q a g .

Pravá strana rovnice je poněkud komplikovaná, ale není to ze zlomyslnosti, spíš k tomu vedla snaha o to, aby výsledný obrázek byl zajímavější než u řešeného příkladu. Pozor na správný zápis operátorů - nezapomeňte na patřičné místo napsat tečku. Funkce \arctg se v Matlabu zadává jako atan , ne třeba \arctan ! Z toho, že zlomek y/x na části hranice oblasti Ω není definován, si nemusíte dělat hlavu - Matlab si s tím poradí, zvláště, když se tento zlomek dále dosazuje do funkce \arctg .

Literatura

- [1] I.G. Aramanovič, G.L. Lunc, L.E. Elsgolc: *Funkcie komplexnej premennej, operátorový počet, teória stability*, Alfa, Bratislava, SNTL Praha, 1973.
- [2] L. Bican: *Lineárna algebra*, SNTL 1979, rozšírené vydání 2001.
- [3] G. Birkhoff, T.C. Bartee: *Aplikovaná algebra*, Alfa, Bratislava 1981.
- [4] G. Birkhoff, S. MacLane: *Algebra*, Alfa, Bratislava 1973.
- [5] J. Diblík, J. Baštinec *Matematika IV*, Nakladatelství VUT v Brně, 1991. (skriptum)
- [6] J. Diblík, A. Haluzíková, J. Baštinec: *Numerické metody a matematická statistika*, VUT Brno, 1987. (skriptum)
- [7] J. Diblík, J., O. Příbyl: *Obyčejné diferenciální rovnice*, FAST VUT, Akademické vydavatelství CERM, s. r. o. Brno, 2004. (skriptum)
- [8] J. Diblík, M. Růžicková, *Obyčejné diferenciální rovnice*, Edis - vydavatelstvo ŽU, Žilina, 2008.
- [9] R. Černá, M. Machlický, J. Vogel, Č. Zlatník *Základy numerické matematiky a programování*, SNTL 1987, ISBN 978-80-8070-891-7.
- [10] M. Demlová, J. Nagy: *Algebra*, MVŠT —III, SNTL 1982.
- [11] L.E. Garner: *Calculus and analytic geometry*, London, 1988.
- [12] F. Fabian, Z. Kluiber: *Metoda Monte Carlo a možnosti jejího uplatnění*, Prospektrum, Praha, 1998.
- [13] J. Franců: *Parciální diferenciální rovnice*, Akademické nakladatelství CERM s.r.o. Brno, 2003, ISBN 80-214-2334-X. (skriptum)
- [14] M. Greguš, M. Švec, V. Šeda: *Obyčejné diferenciální rovnice*, Alfa, Bratislava, SNTL, Praha, 1985.
- [15] A. Haluzíková *Numerické metody*, Redakce VN MON VUT Brno, 1989. (skriptum)
- [16] V. Havel, J. Holenda: *Lineární algebra*, SNTL 1984.

- [17] Z. Horský: *Množiny a matematické struktury*, MVŠT — I, SNTL 1980.
- [18] Z. Horský: *Vektorové prostory*, MVŠT — II, SNTL 1980.
- [19] Z. Horský: *Diferenciální počet*, MVŠT - V., Praha 1982.
- [20] B. Hruža, H. Mrhačová: *Cvičení z algebry a geometrie*, VUT, 1990.
- [21] J. Hronec: *Diferenciální rovnice I*, Slovenská akadémia vied, Bratislava, 1956.
- [22] V. Jarník: *Diferenciální počet I, II*, Nakladatelství ČSAV, Praha 1963.
- [23] V. Jarník: *Integrální počet I, II*, Nakladatelství ČSAV, Praha 1963.
- [24] F. Jirásek, J. Benda, S. Čipera, M. Vacek: *Sbírka řešených příkladů z matematiky III*, SNTL, Praha, 1989.
- [25] J. Kalas, M. Ráb: *Obyčejné diferenciální rovnice*, MU Brno, PŘF, 2001.
- [26] P. Kaprálik, J. Tvarožek: *Zbierka riešených príkladov a úloh z lineárnej algebry a analytickej geometrie*, Alfa, Bratislava, 1987.
- [27] I. Kluvánek, L. Mišík, M. Švec: *Matematika II*, Alfa, Bratislava, 1961.
- [28] S. Koukal, M. Křížek, R. Potůček: *Fourierovy trigonometrické řady a metoda konečných prvků v komplexním oboru*. Academia, Praha, 2002, ISBN 80-200-1029-7.
- [29] J. Kuben: *Obyčejné diferenciální rovnice*, VA Brno 2000.
- [30] J. Kurzweil: *Obyčejné diferenciální rovnice*, SNTL Praha, 1978.
- [31] G.I. Marčuk *Metody numerické matematiky*, Academia Praha 1987.
- [32] M. Medveď: *Dynamické systémy*, VEDA, Bratislava, 1988.
- [33] S. Míka: *Numerické metody algebry*, MVŠT — IV, SNTL 1982.
- [34] J. Myslík: *Elektrické obvody*, BEN – technická literatura, Praha 1997.
- [35] J. Nagy: *Elementární metody řešení obyčejných diferenciálních rovnic*, MVŠT IX, SNTL, Praha, 1978.
- [36] J. Nagy: *Soustavy obyčejných diferenciálních rovnic*, MVŠT XV, SNTL, Praha, 1980.
- [37] J. Nagy: *Stabilita řešení obyčejných diferenciálních rovnic*, MVŠT IX, SNTL, Praha, 1980.
- [38] J. Nagy, E. Nováková, M. Vacek: *Integrální počet*, MVŠT - VI., Praha 1983.
- [39] J. Nagy, E. Nováková, M. Vacek: *Vektorová analýza*, MVŠT - VIII., Praha 1984.
- [40] M. Nekvinda, J. Šrubař, J. Vild *Úvod do numerické matematiky*, SNTL 1976.

-
- [41] P. Pták: *Diferenciální rovnice, Laplaceova transformace*, ČVUT Praha 1999.
- [42] P. Příkryl *Numerické metody matematické analýzy*, MVŠT — XXIV, SNTL 1985.
- [43] M. Ráb: *Metody řešení obyčejných diferenciálních rovnic*, MU Brno, PřF, 1998.
- [44] T. Šalát: *Metrické priestory*, Alfa, Bratislava 1981.
- [45] K. Rektorys a kol.: *Přehled užití matematiky*, SNTL Praha.
- [46] K. Rektorys: *Obyčejné a parciální diferenciální rovnice s okrajovými podmínkami*, ČVUT Praha, 2001, ISBN 80-01-01611-0. (skriptum)
- [47] Z. Riečanová a kol. *Numerické metody a matematická štatistika*, Alfa Bratislava 1987.
- [48] R. Rychnovský, J. Výborná: *Parciální diferenciální rovnice a jejich některá řešení*, SNTL Praha, 1963.
- [49] M.M. Smirnov: *Diferenciálne uravnenija v častnych proizvodnych vtorovo porjadka*, Nauka, Moskva, 1964.
- [50] M. Šikulová, Z. Karpíšek: *Matematika IV – Pravděpodobnost a matematická statistika*, VUT Brno, 1987. (skriptum)
- [51] D. G. Zill: *A first course in differential equations*, Boston, 1992.

Rejstřík

- Autonomní systém, 109
- Bernoulliho rovnice, 16
- Besselova rovnice, 89
- Besselovy funkce, 92
 - prvního druhu, 92
- Bod
 - Hyperbolický, 113
 - Ohnisko, 115
 - Sedlový, 113
- Cauchyova úloha, 53, 54
- Charakteristická rovnice, 28
 - Reálné a různé kořeny, 63
- Clairautova rovnice, 19
- Dirichletova věta, 160
- Dirichletovy podmínky, 159
- Dynamický rovinný systém, 109
- Dynamický systém, 109
 - Fázový prostor, 109
 - Trajektorie, 109
- Exponenciála matice, 48
- Exponenciála matice, 52
- Fázová rovina, 109
- Fázový obraz, 110
- Fourierova metoda, 176
- Fourierova metoda, 165
- Fourierova transformace, 159
- Fourierova řada, 159
 - Sudé a liché funkce, 160
- Fourierovy řady, 159
- Fundamentální systém, 71
 - Konstrukce, 71
 - Příklady, 72
- Fázový prostor, 109
- Homogenní lineární rovnice
 - Konstantní koeficienty, 28
- Hyperbolický bod, 113
- Komplexní vlastní čísla, 65
- Lineární systém v rovině, 109
- Lineární rovnice
 - Vyššího řádu
 - Transformace na systém, 55
- Lineární rovnice
 - Obecné řešení
 - Konstantní koeficienty, 28
- Matice
 - Exponenciála matice, 52
- Maticová exponenciála
 - Metoda výpočtu, 52
- metoda
 - konečných diferencí pro PDR, 181
 - konečných prvků pro PDR, 187
- Metoda neurčitých koeficientů, 29
- Metoda odhadu, 29
- Metoda variace konstant, 32
- Nehomogenní lineární rovnice
 - Metoda neurčitých koeficientů, 29
 - Metoda odhadu, 29
 - Metoda variace konstant, 32
- Nestabilní ohnisko, 115
- Neurčité koeficienty, 29
- Násobná vlastní čísla, 70
- Obecné řešení, 28
- Ohnisko, 115
- Picardova metoda postupných aproximací, 20
- Počáteční úloha, 54
- Počáteční úloha, 53
- princip maxima, 175

Prostor

- Fázový, 109

Reálná a různá vlastní čísla, 63

- Riccatiova rovnice, 17

- Riemannova věta, 162

Rovinný systém

- Řešení, 110, 111

Rovnice

- Bernoulliiova, 16

- Besselova, 89

- Charakteristická, 28

- Clairautova, 19

- Laplaceova, 175

- Riccatiova, 17

- vedení tepla, 174

- vlnová, 163

- Vyššího řádu

 - Transformáce na systém, 55

Sedlový bod, 113

Soustavy lineárních rovnic

- Základní pojmy, 62

Střed, 114

Trajektorie, 109

Uzel

- Nestabilní, 112, 116

- Stabilní, 112, 120

Variace konstant, 32

Vlastní vektory

- Metoda, 71

- Příklady, 72

- Zobecněné, 70

Vlastní čísla

- Komplexní, 65

- Násobná, 70

- Reálná, nenásobná, 63

vzorec

- D'Alembertův, 163

Weyrova maticová metoda, 80

Weyrova metoda

- Tabulka, 81

Zobecněné vlastní vektory, 70–72