VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ V BRNĚ
FAKULTA ELEKTROTECHNIKY A KOMUNIKAČNÍCH TECHNOLOGIÍ
ÚSTAV MATEMATIKY

Náhodné procesy

(Biomedicínské inženýrství a bioinformatika)

Jaromír Baštinec
Zdeněk Svoboda

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Ústav matematiky FEKT VUT v Brně, 2014

http://www.umat.feec.vutbr.cz

Tento text byl vytvořen v rámci realizace projektu CZ.1.07/2.2.00/15.0156,
Inovace výuky matematických předmětů v rámci studijních programů FEKT a FIT VUT v Brně.

Součástí tohoto učebního textu jsou odkazy na tzv. maplety, tj. programy vytvořené v prostředí Maple. Tyto odkazy jsou v textu zvýrazněny barvou, příp. uvozeny slovem *maplet*. Maplety ke svému běhu nevyžadují software Maple – je však nutné mít na klientském počítači nainstalováno prostředí Java a nastavenou vhodnou úroveň zabezpečení prohlížeče i prostředí Java. Po kliknutí na odkaz mapletu se v závislosti na softwarovém prostředí klientského počítače zobrazí různá hlášení o zabezpečení – všechny dialogy je třeba povolit a spouštění požadovaných prvků neblokovat.

Doplňující součástí tohoto učebního textu jsou příklady zpracované v elektronické bance příkladů.

Obsah

Úvod

Motto:
Učitel Vám může pootevřít dvéře,
vstoupit už musíte sami.

Čínské přísloví

Předmluva

Studijní materiál, který máte v rukou, je nově vytvořený text pro předmět *Náhodné procesy*, určený posluchačům studijního oboru Biomedicínské inženýrství a bioinformatika na FEKT VUT v Brně.

Na základě zkušeností s pilotním ročníkem bylo do textu zařazeno i důkladné opakování potřebného matematického aparátu a teorie pravděpodobností. Až po vybudování těchto základů bylo přistoupeno k výkladu náhodných procesů.

Autoři uvítají Vaše připomínky a návrhy.

V Brně 31. 3. 2014 Autoři

Označení

$\mathbb{N}$	množina přirozených čísel
$\mathbb{Z}$	množina celých čísel
$\mathbb{R}$	množina reálných čísel
$\mathbb{Q}$	množina racionálních čísel
$\mathbb{I}$	množina iracionálních čísel
$\mathbb{C}$	množina komplexních čísel
$P_n(x)$	polynom n-tého stupně proměnné x
$A_{m,n}$	matice typu m, n (s m řádky a n sloupci)
$A = (a_{ij})$	matice s prvky a_{ij}
I	jednotková matice
$\mathcal{O}$	nulová matice
$det\, A = \|A\|$	determinant matice A
A^{-1}	matice inverzní k matici A
$adj\, A$	matice adjungovaná k matici A
A_{ks}	algebraický doplněk prvku a_{ks}
$hod\,(A)$	hodnost matice A
$(\mathbb{R}^n, +, .)$	vektorový prostor všech uspořádaných n-tic
$\dim P$	dimenze prostoru P.
$a \cdot a$	skalární součin vektorů a, b
$\\|x\\|$	norma vektoru x
$\square$	konec důkazu, konec příkladu
$\langle A \rangle$	lineární obal množiny A
$M^{\mathcal{A}}_{\mathcal{A}'}$	matice přechodu od báze $\mathcal{A}$ k bázi $\mathcal{A}'$
$a \perp b$	vektor a je ortogonální na vektor b
$f\|_V = g$	zúžení funkce na podmnožinu
$A \times B$	kartézský součim množin A, B
$a \times b$	vektorový součin vektorů a, b
$[a, b, c]$	smíšený součin vektorů a, b, c
$\\|A\\|$	míra množiny A
$\square$	konec důkazu
$A \times B$	kartézský součin množin A, B
$\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$	posloupnost prvků x_n
$A \cap B$	průnik množin A, B
$A \cup B$	sjednocení množin A, B
$\emptyset$	prázdná množina, jev nemožný
I	jev jistý
$\bar{A}$	jev opačný k jevu A
$\bar{x}$	výběrový průměr
s^2	výběrový rozptyl
s^2	výběrová směrodatná odchylka
m_k	obecný moment k-tého řádu
M_k	centrální moment k-tého řádu
C	kovariace
R	koeficient korelace

1 Pomocný aparát

Průvodce studiem

Při studiu předmětu „Náhodné procesy“, budete potřebovat vhodný matematický aparát. Protože jste se s tímto aparátem seznamovali v průběhu bakalářského studia a protože jste od té doby mohli mnohé zapomenout, pokládali jsme za vhodné zařadit v úvodu našeho kurzu opakování potřebných pojmů a vztahů.

Od poslední zkoušky z matematiky už u Vás uplynuly minimálně 3 semestry. Rychlost zapomínání je u každého jiná. Proto tuto kapitolu mohou přeskočit Ti, kteří si věří a kteří ovládají potřebný matemický aparát.

Nejdříve se budeme věnovat polynomům a jejich vlastnostem. Uvedeme si možnosti určení kořenů polynomu. Dále se budeme věnovat rozkladu racionální funkce lomenné na parciální zlomky.

Potom si zopakujeme matice a determinaty, ketré následně budeme využívat při řešení soustav lineárních algebraických rovnic.

Cíle

Po prostudování této kapitoly budete schopni:

- Určit celočíselné kořeny celočíselného polynomu.
- Pracovat s maticemi.
- Řešit soustavy lineárních algebraických rovnic.

1.1 Mnohočleny a racionální funkce

1.1.1 Mnohočleny

Definice 1.1. Polynomem n-tého stupně proměnné x nazveme výraz

$$P_n(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0,$$

kde $n \in \mathbb{N}$ a $a_n, \ldots, a_1, a_0$ jsou libovolná reálná či komplexní čísla, přičemž $a_n \neq 0$.

Polynom může být zapsán i ve tvaru

$$P_n(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_{n-1}x^{n-1} + a_nx^n.$$

Podle toho z jaké množiny bereme koeficienty $a_i, i = 1, 2, \ldots, n$, mluvíme o polynomu celočíselném, realném, racionálním, komplexním, atd. Polynomy můžeme sčítat, násobit číslem, násobit mezi sebou a dělit. Nechť pro $n \geq m$ máme

$$P_n(x) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1x + a_0,$$

$$Q_m(x) = b_mx^m + b_{m-1}x^{m-1} + \cdots + b_1x + b_0,$$

potom

$$P_n(x) + Q_m(x) = (a_0 + b_0) + (a_1 + b_1)x + \cdots + (a_m + b_m)x^m + a_{m+1}x^{m+1} + \cdots + a_nx^n,$$

$$\alpha P_n(x) = (\alpha a_n)x^n + (\alpha a_{n-1})x^{n-1} + \cdots + (\alpha a_1)x + (\alpha a_0),$$

$$P_n(x) \cdot Q_m(x) = c_{n+m}x^{n+m} + \cdots + c_1x + c_0,$$

kde

$$c_k = \sum_{i+j=k} a_ib_j, \quad i = 0, 1, \ldots, n, \ j = 0, 1, \ldots, m.$$

Pro $n \geq m$ platí

$$\frac{P_n(x)}{Q_m(x)} = S_{n-m}(x) + \frac{R_k(x)}{Q_m(x)},$$

kde $R_k(x)$ je zbytek stupně $k < m$, což si můžeme zapsat ve tvaru

$$P_n(x) = S_{n-m}(x)Q_m(x) + R_k(x).$$

Definice 1.2. Polynom $D(x)$, který dělí beze zbytku polynomy $P_n(x)$ a $Q_m(x)$ se nazývá společným dělitelem polynomů $P_n(x)$ a $Q_m(x)$.
Polynom $D(x)$, který má ze všech společných dělitelů nejvyšší stupeň se nazývá největší společný dělitel polynomů $P_n(x)$ a $Q_m(x)$.

1.1.2 Eukleidův algoritmus

Eukleidův[1] algoritmus byl svým autorem odvozen pro čísla, ale lze jej použít i pro polynomy.

Nechť jsou dány nenulové polynomy P, Q, stupeň $P = \text{st}\ (P) > \text{st}\ (Q)$. Polynom P vydělíme polynomem Q a dostaneme částečný podíl S a zbytek R_1, st $(R_1) <$ st (Q),

$$P = QS + R_1.$$

[1]**Eukleides z Alexandrie** (asi 340 př.n.l. – asi 278 př.n.l.) Starořecký matematik, autor nejvýznamnější matematické knihy celé dosavadní historie.Zabýval se geometrií,optikou,teorií hudby. Jako jeden z prvních se začal zabývat logickými základy matematiky. Jeho hlavním dílem je kniha „Základy“ (řecky „Stoicheia“), která byla skoro 2000 let učebnicí matematiky a dodnes neztratila svoji důležitost. Obsahuje planimetrii, stereometrii, geometrickou algebru, řešení kvadratických rovnic, teorii čísel aj. Je to první pokus o axiomatickou výstavbu matematické teorie.

Nyní vydělíme polynom Q zbytkem R_1 a získáme částečný podíl S_1 a zbytek R_2, st $(R_2) <$ st (R_1),

$$Q = R_1 S_1 + R_2.$$

Vydělíme polynom R_1 zbytkem R_2 a dostaneme

$$R_1 = R_2 S_2 + R_3.$$

Pokračujeme dále, až v k-tém kroku dostaneme

$$R_{k-2} = R_{k-1} S_{k-1} + R_k.$$

Protože st $(R_k) <$ st $(R_{k-1}) < \cdots <$ st $(R_2) <$ st $(R_1) <$ st $(Q) <$ st (P), proto po konečném počtu t kroků dostaneme

$$R_{t-2} = R_{t-1} S_{t-1} + R_t,$$
$$R_{t-1} = R_t S_t + 0.$$

Z poslední rovnosti plyne, že polynom R_t je dělitelem polynomu R_{t-1}. Dosazením do předposlední rovnosti dostaneme

$$R_{t-2} = R_t S_t S_{t-1} + R_t = R_t \left(S_t S_{t-1} + 1 \right),$$

neboli R_t je i dělitelem polynomu R_{t-2} a tak můžeme pokračovat dále a ukázat, že všechny polynomy $R_j, j < t$ jsou dělitelné polynomem R_t a tedy že i P a Q jsou dělitelné R_t. A obráceně, nechť je polynom D společným dělitelem polynomů P a Q. Potom bude D dělitelem polynomu R_1. Jestliže D dělí Q a R_1, potom dělí i R_2. Jestliže dělí R_1 a R_2, dělí i R_3, atd., polynom D tedy musí dělit i R_t.
R_t je tedy *největším společným dělitelem polynomů P a Q.*

Definice 1.3. Číslo α je kořenem polynomu $P_n(x)$, jestliže platí

$$P_n(\alpha) = a_n \alpha^n + a_{n-1} \alpha^{n-1} + \cdots + a_1 \alpha + a_0 = 0.$$

Věta 1.4. Základní věta algebry
Každý polynom s reálnými a nebo komplexními koeficienty stupně $n \geq 1$ má alespoň jeden kořen, obecně komplexní.

Věta 1.5. Bézoutova[1]
Číslo α je kořenem polynomu $P_n(x)$ stupně $n \geq 1$ právě tehdy, když

$$P_n(x) = (x - \alpha) Q_{n-1}(x),$$

kde $Q_{n-1}(x)$ je vhodný polynom stupně $n - 1$.

Důsledek 1.6. *Každý polynom $P_n(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$, stupně $n \geq 1$ s (komplexními) kořeny $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$, přičemž kořeny nemusí být navzájem různé, se dá rozložit na součin kořenových činitelů*

$$P_n(x) = a_n (x - \alpha_1)(x - \alpha_2) \ldots (x - \alpha_n).$$

[1]**Etiene Bézout** (31.3.1730 – 27.9.1783) francouzský matematik. Zabýval se hlavně algebrou a balistikou, vyučoval na dělostřeleckém učilišti. Rozpracoval obecné metody řešení soustav algebraických rovnic libovolného stupně. Dodnes nese jedna z důležitých vět o homogenních polynomech jeho jméno. Autor šestidílného kursu matematiky, který byl ve své době často používán a znovu a znovu vydáván.

Definice 1.7. Násobností kořene α rozumíme počet, kolikrát se α vyskytuje v rozkladu na kořenové činitele.

Důsledek 1.8. *Kořen α polynomu $P_n(x)$ má násobnost k, jestliže je $P_n(x)$ dělitelný polynomem $(x-\alpha)^k$, ale není dělitelný polynomem $(x-\alpha)^{k+1}$.*

Věta 1.9. Hornerovo pravidlo[1]
Pro výpočet hodnoty polynomu

$$P_n(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0,$$

v bodě $x = \alpha$, nebo pro určení koeficientů b_i polynomu

$$Q_{n-1}(x) = b_{n-1}x^{n-1} + \cdots + b_1 x + b_0,$$

vzniklého dělením polynomu $P_n(x)$ členem $(x-\alpha)$ používáme tohoto postupu:

$$\begin{array}{c|cccccc} x=\alpha & a_n & a_{n-1} & \dots & a_2 & a_1 & a_0 \\ \hline & b_{n-1} & b_{n-2} & \dots & b_1 & b_0 & r \end{array},$$

kde platí

$$\begin{aligned} b_{n-1} &= a_n, \\ b_{n-2} &= b_{n-1}\alpha + a_{n-1}, \\ \dots &\quad \dots \\ b_1 &= b_2\alpha + a_2, \\ b_0 &= b_1\alpha + a_1, \\ r &= b_0\alpha + a_0 = P_n(\alpha) \end{aligned}$$

Důsledek 1.10. *Jestliže ve větě 1.9 je $r = 0$, potom je α kořenem polynomu $P_n(x)$.*

Věta 1.11. Vietovy vzorce[2]
Mezi koeficienty a kořeny polynomu

$$P_n(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 = a_n(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\dots(x-\alpha_n)$$

platí vztahy

$$a_{n-1} = -a_n(\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n),$$

[1] **Wiliam George Horner** (1786 – 22.9.1837) anglický matematik. Studoval a působil v Bristolu. Zabýval se hlavně algebraickými rovnicemi. V r.1819 vypracoval metodu pro přibližné řešení rovnic libovolného stupně, dnes nazývanou Ruffini-Hornerovou. Zavedl pro algebru velmi důležitou metodu pro dělení polynomu dvojčlenem.

[2] **F. Viete** (1540 – 1603) francouzský matematik , povoláním pravník. Záliba v astronomii jej přivedla ke studiu algebry a trigonometrie, v nichž dosáhl důležitých výsledků. Vybudoval tehdejší algebru jako vědu o algebraických rovnicích. Jeho matematické práce byly psány velmi těžkým jazykem a proto dlouho nevešly v obecnou známost. Jako první zavedl symbolické označování (použitím písmen) nejen pro neznámé ale i pro koeficienty. Přitom počáteční písmena abecedy vyhradil pro koeficienty $(a, b, \dots)$ a koncová písmena pro neznámé $(x, y, z, \dots)$. Ve své době byl ceněn jako dešifrant. Rozluštil kód, který používali Španělé ve válce proti Francii.

$$\begin{array}{rcl} a_{n-2} & = & a_n(\alpha_1\alpha_2 + \alpha_1\alpha_3 + \cdots + \alpha_2\alpha_3 + \cdots + \alpha_{n-1}\alpha_n), \\ \ldots & & \ldots \\ a_0 & = & (-1)^n a_n(\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n). \end{array}$$

Důsledek 1.12. *Každý kořen dělí absolutní člen.*

Věta 1.13. *Mějme polynom s celočíselnými koeficienty*

$$P_n(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0.$$

Celé číslo α může být kořenem, jestliže α dělí absolutní člen a_0.
Racionální číslo $\frac{p}{q}$ (kde p je celé číslo a q je přirozené číslo nesoudělné s p) může být kořenem polynomu $P_n(x)$, jestliže p dělí absolutní člen a_0 a q dělí koeficient u nejvyšší mocniny a_n.

1.1.3 Racionální funkce

Definice 1.14. Nechť $P_n(x)$ a $Q_m(x)$ jsou polynomy. Jejich podíl

$$R(x) = \frac{P_n(x)}{Q_m(x)}$$

nazveme *racionální funkcí lomenou.*
Je-li $n < m$, mluvíme o racionální funkci *ryze* lomenné.

Věta 1.15. *Každá racionální neryze lomená funkce $R(x)$ se dá jednoznačně vyjádřit ve tvaru*

$$R(x) = F(x) + G(x),$$

kde $F(x)$ je polynom stupně $n - m$ a $G(x)$ je racionální funkce ryze lomená.

Věta 1.16. O rozkladu na parciální zlomky
Mějme reálnou ryze lomenou racionáklní funkci

$$R(x) = \frac{P_n(x)}{Q_m(x)}, \quad n < m,$$

s rozkladem jmenovatele na kořenové činitele

$$Q_m(x) =$$

$$a_m(x-\alpha_1)^{k_1}(x-\alpha_2)^{k_2}\ldots(x-\alpha_r)^{k_r}(x^2+p_1x+q_1)^{s_1}(x^2+p_2x+q_2)^{s_2}\ldots(x^2+p_vx+q_v)^{s_v},$$

kde α_i, $i = 1, 2, \ldots, r$ jsou reálné kořeny násobnosti k_i a kvadratický trojčlem $x^2 + p_j x + q_j$ $j =$ $= 1, 2, \ldots, v, p_j^2 - 4q_j < 0$, nám reprezentuje dvojici komplexně sdružených kořenů násobnosti s_j. Potom

$$R(x) = \sum_{i=1}^{r}\left(\frac{A_{i1}}{(x-\alpha_i)} + \frac{A_{i2}}{(x-\alpha_i)^2} + \cdots + \frac{A_{ik_i}}{(x-\alpha_i)^{k_i}}\right) +$$

$$+ \sum_{j=1}^{v}\left(\frac{M_{j1}x + N_{j1}}{(x^2+p_jx+q_j)} + \frac{M_{j2}x + N_{j2}}{(x^2+p_jx+q_j)^2} + \cdots + \frac{M_{js_j}x + N_{js_j}}{(x^2+p_jx+q_j)^{s_j}}\right).$$

Příklad 1.17. Rozložte na parciální zlomky racionální lomenou funkci

$$R(x) = \frac{6x^2 + 7x + 4}{2x^3 + 3x^2 - 1}.$$

Řešení. Rozložíme jmenovatele na součin kořenových činitelů (nejlépe pomocí Hornerova schématu).

$$2x^3 + 3x^2 - 1 = 2\left(x - \frac{1}{2}\right)(x + 1)^2.$$

Máme jeden prostý reálný kořen $x = \frac{1}{2}$ a jeden reálný kořen $x = -1$, který má násobnost 2. Dosadíme podle předchozí věty a dostaneme:

$$\frac{6x^2 + 7x + 4}{2x^3 + 3x^2 - 1} = \frac{A}{x - \frac{1}{2}} + \frac{B}{x + 1} + \frac{C}{(x + 1)^2}.$$

Neznámé koeficienty určíme tak, že celou rovnici vynásobíme jmenovatelem racionální funkce (t.j. polynomem $2x^3 + 3x^2 - 1$) a upravíme.

$$6x^2 + 7x + 4 = A2(x + 1)^2 + B2(x - \frac{1}{2})(x + 1) + C2(x - \frac{1}{2}),$$

$$6x^2 + 7x + 4 = A2(x^2 + 2x + 1) + B(2x - 1)(x + 1) + C(2x - 1),$$

$$6x^2 + 7x + 4 = A2(x^2 + 2x + 1) + B(2x^2 + x - 1) + C(2x - 1).$$

Srovnáním koeficientů polynomů na obou stranách rovnice dostaneme soustavu rovnic.

$$\begin{aligned} 6 &= 2A + 2B \\ 7 &= 4A + B + 2C \\ 4 &= 2A - B - C \end{aligned}$$

Soustava má jedinné řešeni

$$A = 2, B = 1, C = -1.$$

Rozklad na parciální zlomky má proto tvar

$$\frac{6x^2 + 7x + 4}{2x^3 + 3x^2 - 1} = \frac{2}{x - \frac{1}{2}} + \frac{1}{x + 1} - \frac{1}{(x + 1)^2}.$$

□

Příklad 1.18. Rozložte na parciální zlomky racionální lomenou funkci

$$F(x) = \frac{16x^3 - 15x^2 + 6x + 5}{(2x - 1)^2(x^2 + 2x + 5)}.$$

Řešení. Jmenovatel má jeden reálný kořen $x = \frac{1}{2}$ násobnosti 2 a dvojici komplexně sdružených kořenů. Rozklad na parciální zlomky bude mít tvar:

$$\frac{16x^3 - 15x^2 + 6x + 5}{(2x - 1)^2(x^2 + 2x + 5)} = \frac{A}{x - \frac{1}{2}} + \frac{B}{\left(x - \frac{1}{2}\right)^2} + \frac{Cx + D}{x^2 + 2x + 5}.$$

Po vynásobení společněm jmenovatelem dostaneme

$$16x^3 - 15x^2 + 6x + 5 = 4A\left(x - \frac{1}{2}\right)(x^2 + 2x + 5) + 4B(x^2 + 2x + 5) + 4(Cx + D)\left(x - \frac{1}{2}\right)^2.$$

Po úpravě dostaneme soustavu rovnic, která má řešení

$$A = 0,\ B = \frac{1}{4},\ C = 4,\ D = 0.$$

Rozklad na parciální zlomky má tedy tvar

$$\frac{16x^3 - 15x^2 + 6x + 5}{(2x-1)^2(x^2 + 2x + 5)} = \frac{1}{(2x-1)^2} + \frac{4x}{x^2 + 2x + 5}.$$

□

Věta 1.19. *Mějme reálnou ryze lomenou racionální funkci*

$$R(x) = \frac{P_n(x)}{Q_m(x)}, \quad n < m,$$

jejíž jmenovatel má pouze prosté kořeny

$$Q_m(x) = a_m(x - \lambda_1)(x - \lambda_2)\dots(x - \lambda_m),$$

Potom

$$R(x) = \frac{L_1}{(x - \lambda_1)} + \frac{L_2}{(x - \lambda_2)} + \dots + \frac{L_m}{(x - \lambda_m)}, \quad \textit{kde} \quad L_i = \frac{P_n(\lambda_i)}{Q'_m(\lambda_i)},\ i = 1, 2, \dots, m.$$

Příklad 1.20. Rozložte na parciální zlomky racionální lomenou funkci

$$R(x) = \frac{x^2 + 1}{(x^2 - 1)(x^2 + x - 6)}.$$

Řešení. Rozložíme jmenovatele na součin kořenových činitelů.

$$(x^2 - 1)(x^2 + x - 6) = (x + 1)(x - 1)(x + 3)(x - 2).$$

Všechny kořeny jsou reálné prosté. Rozklad bude mít tvar

$$\frac{x^2 + 1}{(x^2 - 1)(x^2 + x - 6)} = \frac{A}{x + 1} + \frac{B}{x - 1} + \frac{C}{x + 3} + \frac{D}{x - 2}.$$

Po vynásobení rovnice jmenovatelem $(x^2 - 1)(x^2 + x - 6)$ dostaneme

$$x^2 + 1 = A(x - 1)(x + 3)(x - 2) + B(x + 1)(x + 3)(x - 2) + C(x + 1)(x - 1)(x - 2) +$$

$$+ D(x + 1)(x - 1)(x + 3).$$

Do poslední rovnice postupně dosazujeme jednotlivé kořeny. Pro $x_1 = -1$ dostaneme po dosazení:

$$(-1)^2 + 1 = A(-1 - 1)(-1 + 3)(-1 - 2) + B(-1 + 1)(-1 + 3)(-1 - 2) + C \cdot 0 + D \cdot 0,$$

$$2 = A(-2)(2)(-3),$$
$$A = \frac{1}{6}.$$

Pro $x = 1$:

$$1 + 1 = A(1-1)(1+3)(1-2) + B(1+1)(1+3)(1-2) + C \cdot 0 + D \cdot 0,$$
$$2 = B(2)(4)(-1),$$
$$B = -\frac{1}{4}.$$

Pro $x = -3$:

$$(-3)^2 + 1 = A \cdot 0 + B \cdot 0 + C(-3+1)(-3-1)(-3-2) + D \cdot 0,$$
$$10 = C(-2)(-4)(-5),$$
$$C = -\frac{1}{4}.$$

Pro $x = 2$:

$$2^2 + 1 = A \cdot 0 + B \cdot 0 + C \cdot 0 + D(2+1)(2-1)(2+3),$$
$$5 = D(3)(1)(5),$$
$$D = \frac{1}{3}.$$

Konečný rozklad má tedy tvar

$$\frac{x^2+1}{(x^2-1)(x^2+x-6)} = \frac{1}{6(x+1)} - \frac{1}{4(x-1)} - \frac{1}{4(x+3)} + \frac{1}{3(x-2)}.$$

□

1.2 Matice a determinanty

1.2.1 Matice

Definice 1.21. Nechť m, n jsou přirozená čísla. Jestliže každé uspořádané dvojici $(i, j) \in \{1, 2, \ldots, m\} \times \{1, 2, \ldots, n\}$ přiřadíme prvek $a_{ij} \in \mathbb{R}$, obdržíme reálnou *matici* typu (m, n) nad $\mathbb{R}$. Čísla i, j jsou indexy , i je řádkový a j je sloupcový index.

Pokud místo $\mathbb{R}$ vezmeme jinou číselnou množinu (např. $\mathbb{Z}, \mathbb{C}$) nebo i množina funkcí s dannou vlastností, jako je spojitost na určitém intervalu a pod., ..., dostaneme matici celočíselnou, komplexní, funkcí, ...
Matice zapisujeme jako

$$A = (a_{ij}) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ . & . & \ldots & . \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Matice budeme označovat velkými písmeny.
Speciální typy matic:

Matice řádková $$B = (a_1, a_2, \dots, a_n).$$

Matice sloupcová $$C = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ . \\ . \\ . \\ a_n \end{pmatrix}.$$

Matice diagonální $$a_{ij} = 0 \ \forall i \neq j, \quad D = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22} & \dots & 0 \\ . & . & \dots & . \\ 0 & 0 & \dots & a_{mm} \end{pmatrix}.$$

Prvky a_{ii} $i = 1, 2, \dots, \min(m, n)$ tvoří hlavní diagonálu. Matice D je typu (m, m), obecně může mít diagonální matice buď ještě další sloupce, v nichž budou samé nuly a nebo další řádky, v nichž budou opět samé nuly. Jestliže $m = n$, potom mluvíme o čtvercové matici řádu m.

Matice jednotková $$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ . & . & \dots & . \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}.$$

Matice jednotková je tedy čtvercová diagonální matice, která má na hlavní diagonále samé jedničky.

Matice nulová $$\mathcal{O} = (a_{ij}), \ a_{ij} = 0 \ \forall i, j.$$

Matice transponovaná $$A^T = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{m2} \\ . & . & \dots & . \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Matice symetrická $$a_{ij} = a_{ji} \ \forall i, j.$$

Matice téhož typu (m, n) nad $\mathbb{R}$ budeme značit $\mathbb{R}_{m,n}$.

Definice 1.22. Matice $A = (a_{ij})$ je *rovna* matici $B = (b_{kl})$, jsou-li obě matice stejného typu a stejnolehlé prvky se sobě rovnají, tj. $A \in \mathbb{R}_{m,n}$, $B \in \mathbb{R}_{m,n}$, $a_{ij} = b_{ij}$, $\forall i \ \in \{1, 2, \dots, m\}$, $\forall j \in \{1, 2, \dots, n\}$.

Definice 1.23. *Součtem* dvou matic $A, B \in \mathbb{R}_{m,n}$ stejného typu je matice $C \in \mathbb{R}_{m,n}$ téhož typu a taková, že $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$.
Číselným násobkem $\alpha \in \mathbb{R}$ matice $A \in \mathbb{R}_{m,n}$ je matice $B \in \mathbb{R}_{m,n}$ taková, že $b_{ij} = \alpha a_{ij}$.
Lineární kombinací matic $A_1, A_2, \dots, A_k \in \mathbb{R}_{m,n}$ s koeficienty $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$ nazveme matici $A = \lambda_1 A_1 + \lambda_2 A_2 + \dots + \lambda_k A_k$.

Definice 1.24. Mějme rovnost $\lambda_1 A_1 + \lambda_2 A_2 + \cdots + \lambda_k A_k = \mathcal{O}$ kde $\mathcal{O}$ je nulová matice. Matice $A_1, A_2, \ldots, A_k$ nazveme *lineárně závislé*, pokud $\exists \lambda_i \neq 0, i = 1, 2, \ldots, k$ a uvedená rovnost platí. Matice $A_1, A_2, \ldots, A_k$ nazveme *lineárně nezávislé*, pokud uvedená rovnost platí tehdy a jen tehdy, když $\lambda_i = 0, \forall i = 1, 2, \ldots, k$.

Důsledek 1.25. *Jsou-li $A_1, A_2, \ldots, A_k$ lineárně závislé, potom aspoň jedna z nich je lineární kombinací zbývajících.*

Důsledek 1.26. *Je-li některá z matic $A_1, A_2, \ldots, A_k$ lineární kombinací zbývajících jsou matice $A_1, A_2, \ldots, A_k$ lineárně závislé.*

Důsledek 1.27. *Je-li některá z matic $A_1, A_2, \ldots, A_k$ nulová, jsou matice $A_1, A_2, \ldots, A_k$ lineárně závislé.*

Příklad 1.28. Určete lineární závislost či nezávislost matic

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad A_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

.

Řešení. Matice A_1, A_2, A_3 jsou lineárně závislé, protože platí $A_1 + 2A_2 - A_3 = \mathcal{O}$. □

Příklad 1.29. Určete lineární závislost či nezávislost matic

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad A_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Řešení. Sestavíme si lineární kombinaci těchto vektorů podle definice 1.24:

$$\lambda_1 A_1 + \lambda_2 A_2 + \lambda_3 A_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Dosadíme

$$\lambda_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 + \lambda_2 \\ 2\lambda_2 + \lambda_3 \\ \lambda_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Srovnáním stejnolehlých prvků dostaneme soustavu rovnic

$$\begin{aligned} \lambda_1 + \lambda_2 &= 0, \\ 2\lambda_2 + \lambda_3 &= 0, \\ \lambda_3 &= 0, \end{aligned}$$

která má řešení $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$. Podle definice 1.24 jsou matice A_1, A_2, A_3 lineárně nezávislé. □

1.2.2 Determinant

Definice 1.30. *Permutace* je zobrazení množiny $\{1, 2, \dots, n\}$ na sebe.

Definice 1.31. *Inverzí* v permutaci $(i_1, i_2, \dots, i_n)$ rozumíme každý výskyt takové dvojice čísel, že větší stojí před menším, tj. vlevo od něj.

Příklad 1.32. Permutace $(2, 3, 1)$ má dvě inverze 2 — 1 a 3 — 1.

Definice 1.33. *Determinant* čtvercové matice A řádu n je číslo

$$det\, A = |A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ . & . & \dots & . \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{(j_1, j_2, \dots, j_n)} (-1)^{t(j)} a_{1j_1} a_{2j_2} \dots a_{nj_n},$$

kde sčítáme přes všechny permutace $(j_1, j_2, \dots, j_n)$ a $t(j)$ nabývá hodnoty počtu inverzí v permutaci $(j_1, j_2, \dots, j_n)$.

Příklad 1.34. Výpočet determinantu matice druhého řádu:

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc,$$

Příklad 1.35. Sarrusovo pravidlo pro výpočet determinantu matice třetího řádu:

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & k \end{vmatrix} = aek + bfg + cdh - ceg - afh - bdk.$$

Poznámka 1.36. Pro determinanty vyšších řádů se podobný vzorec nepoužívá, protože by byl příliš složitý. Stačí si uvědomit, že u determinantu čtvrtého řádu by se jednalo o 24 sčítanců, z nichž každý by byl součinem 4 prvků a znaménka. U deterninantu pátého řádu by se jednalo o 120 sčítanců, z nichž každý by byl součinem 5 prvků a ynaménka. Atd.

Věta 1.37. Vlastnosti determinantů:

1. *V definičním vyjádření determinantu matice A se vyskytuje člen $(a_{i_1j_1} a_{i_2j_2} \dots a_{i_nj_n})$ se znaménkem $(+)$ pokud mají permutace $(i_1, i_2, \dots, i_n), (j_1, j_2, \dots, j_n)$ současně sudý počet inverzí a nebo současně lichý počet inverzí; a se znaménkem $(-)$ pokud má jedna permutace sudý počet inverzí a druhá má lichý počet inverzí.*
2. $det\, A \ = det\,(A^T)$.
3. *Záměnou dvou sloupců matice A se znaménko determinantu změní na opačné.*
4. *Determinant matice, která má dva stejné sloupce, je roven nule.*
5. *Nechť B je matice, která vznikne z matice A vynásobením jednoho sloupce číslem λ a ponecháním ostatních beze změny, potom $|B| = \lambda |A|$, neboli spoležný dělitel všech prvků sloupce se může vytknout před determinant.*

6. *Nechť prvky s-tého sloupce matice A jsou lineární kombinace prvků tvaru $a_{is} = \beta b_{is} + \gamma c_{is}$, potom $|A| = \beta|A_b| + \gamma|A_c|$, kde matici A_b získáme z matice A nahrazením s-tého sloupce prvky b_{is} a ponecháním ostatních beze změny a matici A_c získáme obdobně nahrazením s-tého sloupce matice A prvky c_{is} a ponecháním ostatních beze změny.*

7. *Jestliže některý sloupec matice A je lineární kombinací zbývajících, potom $|A| = 0$.*

8. *Hodnota determinantu se nezmění, pokud přičteme k jednomu sloupci lineární kombinaci zbývajících.*

9. *Determinant diagonální matice je roven součinu prvků na hlavní diagonále.*

Důkaz. Důkazy jednotlivých tvrzení vyplývají přímo z definice 1.33. Navíc z vlastnosti 2 plyne ekvivalentnost řádků a sloupců, neboli všechno tvrzení pro sloupce platí i pro řádky. □

Definice 1.38. Nechť v matici A řádu n vynecháme s-tý sloupec a k-tý řádek. Zbývající prvky tvoří matici řádu $(n-1)$ a její determinant nazveme *minorem* M_{ks} *prvku* a_{ks}.

Definice 1.39. *Algebraickým doplňkem* A_{ks} prvku a_{ks} nazveme $A_{ks} = (-1)^{k+s} M_{ks}$.

Věta 1.40. Laplaceova[1] věta o rozvoji determinantu.
Pro každou čtvercovou matici A řádu n a pro každé $k \in \{1, 2, \dots, n\}$ platí

$$|A| = a_{1k}A_{1k} + a_{2k}A_{2k} + \cdots + a_{nk}A_{nk},$$

Důkaz. Provedeme jej v několika krocích.
a) Mějme matici, která má všechny prvky prvého sloupce nulové, s vyjímkou prvku a_{11}. Potom podle definice 1.33 máme

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ . & . & \dots & . \\ 0 & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{(j_1,j_2,\dots,j_n)\text{sudé}} a_{1j_1}a_{2j_2}\dots a_{nj_n} - \sum_{(i_1,i_2,\dots,i_n)\text{liché}} a_{1i_1}a_{2i_2}\dots a_{ni_n}$$

V každém sčítanci je právě jeden element z prvého sloupce, které jsou však všechny nulové s vyjímkou prvku a_{11}. Zůstanou zachovány proto pouze ty členy, které obsahují a_{11}:

$$|A| = \sum_{(1,j_2,\dots,j_n)\text{sudé}} a_{11}a_{2j_2}\dots a_{nj_n} - \sum_{(1,i_2,\dots,i_n)\text{liché}} a_{11}a_{2i_2}\dots a_{ni_n}.$$

Protože jednička na prvém místě v permutaci nevytváří žádnou inverzi, je počet inverzí v permutaci $(1, j_2, \dots, j_n)$ roven počtu inverzí v permutaci $(j_2, \dots, j_n)$. Můžeme proto člen a_{11} vytknout a dostaneme

$$|A| = a_{11}\left(\sum_{(j_2,\dots,j_n)\text{sudé}} a_{2j_2}\dots a_{nj_n} - \sum_{(i_2,\dots,i_n)\text{liché}} a_{2i_2}\dots a_{ni_n} \right).$$

[1]**Piere Simon Laplace** (23.3.1749 – 5.3.1827) francouzský matematik, fyzik a astronom. Za Velké francouzské revoluce se aktivně účastnil na reorganizaci vzdělávacího systému a vytváření jednotné soustavy měr a vah. V r.1799 byl krátkou dobu ministrem vnitra ve vládě Napoleona Bonaparta. Jeho vědecká činnost byla velmi rozsáhlá. Patří mu řada fundamentálních výsledků v matematice, fyzice, nebeské mechnice, a j. Vedle algebry se věnoval parciálním diferenciálním rovnicím, teorii pravděpodobností, integrálním transformacím, teorii chyb, numerickým metodám, ...

V závorce vpravo máme podle definice 1.33 determinant řádu $n-1$, který dostaneme z matice A vynecháním prvého řádku a prvého sloupce. Je to algebraický doplněk členu a_{11}, protože platí $A_{11} = (-1)^{1+1} M_{11}$. Proto platí

$$|A| = a_{11} A_{11}.$$

b) Mějme nyní determinat matice B, která má všechny prvky k-tého sloupce nulové s vyjímkou prvku a_{ik}.

$$|B| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & 0 & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & 0 & \dots & a_{2n} \\ . & . & \dots & . & \dots & . \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{ik} & \dots & a_{in} \\ . & . & \dots & . & \dots & . \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & 0 & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Upravíme matici B tak, aby se i-tý řádek dostal na místo prvního řádku. Postupně jej budeme vyměňovat s $(i-1), (i-2), \dots$ řádky. Celkově provedeme $(i-1)$ výměn, při každé z nich se hodnota determinantu násobí číslem (-1). Dále přemístíme k-tý sloupec na místo prvního. Musíme provést $(k-1)$ výměn, při každé z nich se opět hodnota determinantu násobí číslem (-1). Nakonec dostaneme

$$|B_1| = \begin{vmatrix} a_{ik} & a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{in} \\ 0 & a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ . & . & . & \dots & . \\ 0 & a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Přitom $|B_1|$ získáme z $|B|$ vynásobením číslem

$$(-1)^{(i-1)+(k-1)} = (-1)^{i+k-2} = (-1)^{i+k}.$$

V části a) důkazu jsme dokázali, že $|B_1|$ je roven součinu nenulového prvku v prvním sloupci (v našem případě jde o prvek a_{ik} a jeho algebraického doplňku. Tento algebraický doplněk je v našem případě minor řádu $(n-1)$, který získáme z matice B vynecháním i-tého řádku a k-tého sloupce.

$$|B_1| = a_{ik} M_{ik},$$

a současně platí

$$|B| = (-1)^{i+k} |B_1| = (-1)^{i+k} a_{ik} M_{ik} = a_{ik} A_{ik}.$$

Věta platí i v tomto případě.

c) Vezměme si nyní obecný případ. Zapíšeme si matici A ve tvaru

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & (a_{1k} + 0 + \dots + 0) & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & (0 + a_{2k} + \dots + 0) & \dots & a_{2n} \\ . & . & \dots & . & \dots & . \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & (0 + 0 + \dots + a_{nk}) & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Prvky v k-tém sloupci máme vyjádřeny jako součet n prvků. Podle věty 1.37, bod 6, si můžeme determinat vyjádřit jako součet n determinantů, z nichž každý má v k-tém sloupci jeden prvek původního sloupce a zbývající prvkz jsou nulové.

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1k} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & 0 & \dots & a_{2n} \\ . & . & \dots & . & \dots & . \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & 0 & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & 0 & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2k} & \dots & a_{2n} \\ . & . & \dots & . & \dots & . \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & 0 & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} +$$

$$+\cdots+\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & 0 & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & 0 & \dots & a_{2n} \\ . & . & \dots & . & \dots & . \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nk} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Použitím části b) důkazu dostaneme platnost věty i pro tento případ. □

Důsledek 1.41. *Vzhledem k rovnoprávnosti řádků a sloupců platí* $\forall\, k \in \{1, 2, \dots, n\}$

$$|A| = a_{k1}A_{k1} + a_{k2}A_{k2} + \cdots + a_{kn}A_{kn}.$$

Důkaz. Důkaz se provede analogicky předchozímu důkazu. □

Příklad 1.42. Určit hodnotu deterninantu matice A,

$$A = \begin{pmatrix} -10 & 5 & -7 & 4 \\ -7 & 3 & -9 & 3 \\ -2 & 1 & -1 & 1 \\ -5 & 5 & -3 & 5 \end{pmatrix}.$$

Řešení. Násobky druhého sloupce budeme přičítat ke zbývajícím tak, aby jsme ve třetím řádku dostali nuly. Dvojnásobek druhého sloupce přičteme k prvnímu sloupci, Ke třetímu sloupci přičteme druhý a od čtvrtého sloupce odečteme druhý sloupec.

$$|A| = \begin{vmatrix} -10 & 5 & -7 & 4 \\ -7 & 3 & -9 & 3 \\ -2 & 1 & -1 & 1 \\ -5 & 5 & -3 & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 5 & -2 & -1 \\ -1 & 3 & -6 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 5 & 5 & 2 & 0 \end{vmatrix} =$$

Rozvineme determinant podle třetího řádku a potom podle posledního sloupce:

$$= (-1)^{(3+2)}1 \begin{vmatrix} 0 & -2 & -1 \\ -1 & -6 & 0 \\ 5 & 2 & 0 \end{vmatrix} = (-1)(-1)(-1)^{(1+3)} \begin{vmatrix} -1 & -6 \\ 5 & 2 \end{vmatrix} = 28$$

□

Příklad 1.43. Určit hodnotu deterninantu matice M,

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 2 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Řešení. Podle definice 1.33 je detrminant číslo přiřazené *čtvercové* matici. $M \in \mathbb{R}_{5,6}$ není čtvercová matice. Úloha proto nemá řešení. □

Příklad 1.44. Určit hodnotu deterninantu matice A,

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 2 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Řešení. Rozvineme determinant podle prvního sloupce

$$|A| = 1 \cdot (-1)^{(1+1)} \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -2 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & -1 & 0 & -1 \end{vmatrix}.$$

Rozvineme determinant podle čtvrtého řádku

$$|A| = 2 \cdot (-1)^{(4+3)} \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & -2 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & -1 \end{vmatrix}.$$

První řádek vynásobemý (-1) přičítáme ke druhému řádku:

$$|A| = -2 \cdot \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ -1 & 2 & -2 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & -1 \end{vmatrix}.$$

Rozvineme podle druhého řádku

$$|A| = -2 \cdot 2 \cdot (-1)^{(2+4)} \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -2 \\ -1 & 1 & 0 \end{vmatrix}.$$

Třetí řádek přičteme k prvnímu

$$|A| = -4 \cdot \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & -2 \\ -1 & 1 & 0 \end{vmatrix}.$$

Rozvineme podle prvního řádku

$$|A| = -4 \cdot (-1)^{(1+3)} \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = -4 \cdot ((-1) \cdot 1 - (-1) \cdot 2) = -4 \cdot 1 = -4.$$

Hodnota determinantu matice A je rovna -4. □

Poznámka 1.45. Při výpočtu je vhodné si nejprve zapsat sloupec, nebo řádek, jehož násobky budeme přičítat ke zbývajícím. Zapisujeme jej na jeho misto, protože nemůžeme měnit pořadí jednotlivých sloupců, aniž by došlo i ke změně hodnoty deterninantu. Snížíme tím pravděpodobnost, že se dopustíme nechtěně chyby.

Věta 1.46. *Pro každou čtvercovou matici A řádu n a pro každou dvojici různých indexů $k, l \in \{1, 2, \dots, n\}$, $k \neq l$, platí*

$$a_{1k}A_{1l} + a_{2k}A_{2l} + \cdots + a_{nk}A_{nl} = 0,$$

$$a_{k1}A_{l1} + a_{k2}A_{l2} + \cdots + a_{kn}A_{ln} = 0.$$

Důkaz. Stačí si uvědomit, že máme prvky k-tého sloupce a algebraické doplňky příslušné k l-tému sloupci. Pokud si vytvoříme původní matici řádu n dostaneme matici, která má dva stejné sloupce — na místě l-tého sloupce budou opět prvky a_{ik} sloupce k-tého. Pro řádky je důkaz zcela analogický. □

1.2.3 Hodnost matice

Definice 1.47. Nechť máme matici $A \in \mathbb{R}_{m,n}$, $k \le \min(m, n)$. Vybereme v matici A libovolně k řádků a k sloupců. Elementy stojící na průsečících těchto řádků a sloupců tvoýří matici řádu k. Její determinant nazveme *minorem k-tého řádu* matice A.

Důsledek 1.48. *Minorů k-tého řádu matice $A \in \mathbb{R}_{m,n}$, $k \le \min(m, n)$ můžeme vytvořit celkem* $\binom{m}{k}\binom{n}{k}$.

Poznámka 1.49. Neplést minor prvku a minor matice.

Příklad 1.50. Mějme matici

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 & 2 \\ 2 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 4 & 5 & 1 \end{pmatrix}.$$

Můžeme z ní vytvořit celkem 12 minorů prvního řádu, 18 minorů druhého řádu a 4 minory třetího řádu. Všechny minory třetího řádu jsou přitom nulové. Ověřte!

Definice 1.51. *Hodnost* nulové matice je rovna nule. *Hodnost* nenulové matice A je rovna k, jestliže existuje nenulový minor řádu k a všechny minory vyšších řádů, pokud existují, jsou rovny nule. Libovolný nenulový minor řádu k nazveme *bázovým* a jeho sloupce (řádky) nazveme bázovými sloupci (řádky).

Věta 1.52. *Libovolný sloupec matice A je lineární kombinací bázových sloupců.*

Důkaz. Předpokládejme, že nenulový minor řádu h matice A je umístěn vlevo nahoře, t.j. $\det(a_{ij})_{i,j=1,2,\dots,h} \neq 0$. Tento předpoklad nijak neomezí obecnost důkazu. Pokud totiž tomu tak není, zaměníme pořadí řádků a sloupců tak, aby jsme dostali matici s požadovanou vlastností.

Ukážeme, že prvních h sloupců je lineárně nezávislých. Nechť tomu tak není a h-tý sloupec je lineární kombinací prvních $h - 1$ sloupců. Potom podle věty 1.37 je determinant vytvořený z takových sloupců nulový. To je spor s naším předpokladem, že tento minor k-tého řádu je nenulový. Proto byl náš předpoklad chybný a prvních h sloupců je lineárně nezávislých.

Ukážeme nyní, že každý další sloupec je jejich lineární kombinací. Sestavíme si matici B řádu $h+1$ následovně: k prvním h řádkům a h sloupcům přidáme k-tý řádek a s-tý sloupec, kde $k \in \{1, 2, \ldots, n\}, s \in \{h+1, \ldots, n\}$. Dostaneme

$$B = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1h} & a_{1s} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2h} & a_{2s} \\ . & . & \ldots & . & . \\ a_{h1} & a_{h2} & \ldots & a_{hh} & a_{hs} \\ a_{k1} & a_{k2} & \ldots & a_{kh} & a_{ks} \end{pmatrix}.$$

Je-li $k \leq h$ má matice dva stejné řádky a proto je její determinant nulový. Je-li $k > h$ je $\det B$ minorem řádu $h+1$ a podle znění věty je každý minor řádu $h+1$ nulový. V obou případech tedy máme $\det B = 0$. Rozvineme jej podle posledního řádku

$$0 = a_{k1}B_{k1} + a_{k2}B_{k2} + \cdots + a_{kh}B_{kh} + a_{ks}B_{ks}.$$

Přitom algebraické doplňky B_{ki} nezávisí na k a $B_{ks} = (-1)^{(2h+2)} \det (a_{ij})_{i,j=1,2,\ldots,h}$, který je podle předpokladu nenulový. To znamená, že můžeme z poslední rovnice vypočítat a_{ks} :

$$a_{ks} = c_1 a_{k1} + c_2 a_{k2} + \cdots + c_h a_{kh},$$

kde
$$c_i = \frac{B_{ki}}{B_{ks}}, i = 1, 2, \ldots, h.$$

Nyní necháme k probíhat celou množinu $1, 2, \ldots, n$ a dostaneme

$$a_{is} = c_1 a_{i1} + c_2 a_{i2} + \cdots + c_h a_{ih}, \quad i = 1, 2, \ldots, n,$$

neboli s-tý sloupec je lineární kombinací prvních h sloupců. Vzhledem k libovolnosti volby s-tého sloupce je důkaz hotov. □

Věta 1.53. *Má-li matice A hodnost h, má potom právě h lineárně nezávislých sloupců a naopak, má-li matice A právě h lineárně nezávislých sloupců, potom má hodnost h.*

Důkaz. Plyne z předchozí věty. □

Důsledek 1.54. *Determinant čtvercové matice A je nenulový právě tehdy, když všechny sloupce jsou lineárně nezávislé.*

Definice 1.55. Za *elementární úpravy* matice A prohlásíme

1. Přechod od matice A k matici transponované A^T.
2. Vzájemnou výměnu dvou řádků.
3. Vynásobení všech prvků v jednom řádku nenulovým číslem.
4. Přičtení k řádku lineární kombinace zbývajících řádků.

5. Vynechání nulového řádku.

Věta 1.56. *Elementární úpravy nemění hodnost matice.*

Důkaz. Hodnost matice je podle definice 1.51 rovna nejvyššímu řádu nenulového minoru matice. Elementární úpravy buď nemění hodnotu determinantu (přechod k matici transponované, přičtení k řádku lineární kombinaci zbývajících) a nebo mění velikost determinantu či jeho znaménko (výměna dvou řádků, vynásobení všech prvků v jednom řádku nenulovým číslem). Podstatné je, že pokud byl determinant nenulový i po provedení těchto úprav zůstane nenulovým.

Determinant matice obsahující nulový řádek je roven vždy nule. Proto vynechání nulového řádku nemá vliv na hodnost matice. □

Definice 1.57. Matici $A \in \mathbb{R}_{m,n}$ nazveme *horní trojúhelníkovou* maticí, když $a_{ij} = 0\ \forall i > j > \min(m,n)$. Matici A nazveme *dolní trojúhelníkovou* maticí, když $a_{ij} = 0\ \forall i < < j < \min(m,n)$.

Důsledek 1.58. *Postupným užitím elementárních úprav lze každou matici převést na trojúhelníkovou matici. Tento postup se nazývá Gaussova*[1] *eliminační metoda.*

Důsledek 1.59. *Postupným užitím elementárních úprav lze každou matici převést na diagonální matici. Tento postup se nazývá Jordanova eliminační metoda.*

Důsledek 1.60. *Determinant trojúhelníkové matice řádu n je roven součinu prvků na hlavní diagonále.*

Důkaz. Opakovaným použitím Laplaceovy věty o rozvoji determinantu (věta 1.40) dostaneme pro horní trojúhelníkovou matici opakovaným rozvinutím podle prvního sloupce:

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \dots & a_{1n} & \\ 0 & a_{22} & a_{23} \dots & a_{2n} & \\ 0 & 0 & a_{33} \dots & a_{3n} & \\ . & . & . & \dots & . \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}(-1)^{1+1} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ 0 & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ . & . & \dots & . \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} =$$

$$= a_{11}a_{22}(-1)^{1+1} \begin{vmatrix} a_{33} & \dots & a_{3n} \\ . & \dots & . \\ 0 & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} \Longrightarrow |A| = a_{11}a_{22} \cdots a_{nn}.$$

Matematickou indukcí dostaneme hledané tvrzení. □

[1] **Karl Friedrich Gauss** (1777 — 1855) německý matematik, fyzik, geofyzik, geodet, astronom. Jeden z nejvýznamnějších matematiků všech dob. Všestranný vědec, kterě pracoval ve všech oblastech matematiky. Všude dosáhl prvořadých výsledků a předznamenal mnohdy další rozvoj. Byl též velmi zručný numerickě matematik, který objevil řadu numerických metod. Jako první dospěl k principům neeukleidovské geometrie, ale výsledky v této oblasti nechtěl pro jejich převratnost publikovat, proto patří priorita objevu N.I.Lobačevskému. V algebře jako první dokázal *Základní větu algebry*. Rozvinul teorii kvadratických forem, zavedl přesně komplexní čísla, rozvinul metody řešení soustav algebraických rovnic.

Příklad 1.61. Určit hodnost matice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 & -5 \\ 2 & -1 & 0 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & 6 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Řešení. První řádek vynásobený (-2) přičteme ke druhému, první řádek vynásobený (-3) přičteme ke třetímu a první řádek vynásobený (-4) přičteme k poslednímu řádku.

$$A \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 & -5 \\ 0 & -1 & -4 & -6 & 12 \\ 0 & 1 & 0 & -8 & 15 \\ 0 & 0 & -10 & -11 & 21 \end{pmatrix}.$$

První a poslední řádek opíšeme, třetí přičteme ke druhému a zapíšeme třetí řádek jako druhý

$$A \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 & -5 \\ 0 & 1 & 0 & -8 & 15 \\ 0 & 0 & -4 & -12 & 27 \\ 0 & 0 & -10 & -11 & 21 \end{pmatrix}.$$

První tři řádky necháme beze změny, poslední řádekdek násobíme (-4) a přičteme k němu desetinásobek třetího řádku

$$A \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 & -5 \\ 0 & 1 & 0 & -8 & 15 \\ 0 & 0 & -4 & -12 & 27 \\ 0 & 0 & 0 & -76 & 186 \end{pmatrix}.$$

Matice A je převedena na trojúhelníkový tvar, má čtyři nenulové řádky, první čtyři řádky a první čtyýi sloupce tvoří nenulový minor řádu 4 (jeho hodnota je 304), hodnost matice A je proto rovna čtyřem. $\square$

Příklad 1.62. Určit hodnost matice

$$B = \begin{pmatrix} 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}.$$

Řešení. Zapíšeme si řádky v obráceném pořadí

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}.$$

Násobky prvého řádku odečítáme od zbývajících tak, aby v prvím sloupci byly samé nuly: od druhého řádku odečteme dvojnásobek prvého, od třetího řádku odečteme trojnásobek prvého, od čtvrtého řádku odečteme čtyřnásobek prvého. V dalším kroku druhý řádek násobíme (-1) a jeho násobky odečítáme od třetího a čtvrtého.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & -1 & -2 & -3 & -4 & -5 \\ 0 & -2 & -4 & -6 & -8 & -10 \\ 0 & -3 & -6 & -9 & -12 & -15 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}.$$

Matice má dva nenulové řádky. Podle definice 1.51 je její hodnost rovna dvěma, protože existuje nenulový minor řádu 2. □

Poznámka 1.63. Řádek, jehož násobky přičítáme ke zbývajícím, si zapíšeme jako první a potom dopočítáme zbývající. Vyhneme se tak častým chybám, kdy se od řádku χ odečte řádek ζ a současně se od řádku ζ odečte řádek χ.

Poznámka 1.64. Je třeba rozlišovat mezi úpravami, které nemění hodnost matice a mezi úpravami, které nemění hodnotu determinantu.

Příklad 1.65. Určit hodnost matice P v závislosti na parametru α

$$P = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 & -\alpha \\ 2 & 2 & -\alpha & 2 \\ 2 & -\alpha & 2 & 2 \\ -\alpha & 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

Řešení. První řádek odečteme od zbývajících

$$P = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 & -\alpha \\ 2 & 2 & -\alpha & 2 \\ 2 & -\alpha & 2 & 2 \\ -\alpha & 2 & 2 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 & -\alpha \\ 0 & 0 & -\alpha-2 & \alpha+2 \\ 0 & -\alpha-2 & 0 & \alpha+2 \\ 0 & \alpha+2 & \alpha+2 & 2-\frac{\alpha^2}{2} \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 & -\alpha \\ 0 & -\alpha-2 & 0 & \alpha+2 \\ 0 & 0 & -\alpha-2 & \alpha+2 \\ 0 & 0 & \alpha+2 & -\frac{\alpha^2}{2}+\alpha+4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 & -\alpha \\ 0 & -\alpha-2 & 0 & \alpha+2 \\ 0 & 0 & -\alpha-2 & \alpha+2 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{\alpha^2}{2}+2\alpha+6 \end{pmatrix}$$

Matice je upravena na trojúhelníkový tvar. Řešením rovnice

$$-\frac{\alpha^2}{2} + 2\alpha + 6 = 0$$

jsou čísla $\alpha_1 = -2$ a $\alpha_2 = 6$. Dosazením do trojúhelníkové matice dostaneme výsledek:

$$h(P) = \begin{cases} 1, & \text{když } \alpha = -2, \\ 3, & \text{když } \alpha = 6, \\ 4, & \text{když } \alpha \in \mathbb{R} \setminus \{-2, 6\} \end{cases}$$

□

1.2.4 Maticová algebra

V definici 1.22 byla zavedena rovnost matic a v definici 1.23 byl definován součet matic a číselný násobek matice.

Definice 1.66. *Součinem* matice $A \in \mathbb{R}_{m,n}$ a matice $B \in \mathbb{R}_{n,p}$, v uvedeném pořadí, je matice $C \in \mathbb{R}_{m,p}$ pro kterou platí

$$C = AB, \quad C = (c_{ij}), \quad c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj}, \quad i = 1, \dots, m, j = 1, \dots, p.$$

Poznámka 1.67. Násobení matic není komutativní, t.j. existují takové matice A, B, že platí:

$$AB \neq BA,$$

a nebo některý ze součinů AB či BA není definován.

Příklad 1.68. Nechť $A \in \mathbb{R}_{2,3}$ a $B \in \mathbb{R}_{3,4}$. Potom součin AB existuje, ale součin BA není definován.

Důsledek 1.69. *Součin matic A a B je definován právě tehdy, když počet sloupců matice A je roven počtu řádků matice B.*

Příklad 1.70. Mějme dány matice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Určete jejich součiny, pokud existují.

Řešení. Obě matice jsou čtvercové téhož řádu, proto jsou definovány oba součiny.

$$AB = \begin{pmatrix} 4 & 7 \\ 7 & 6 \end{pmatrix}, \quad BA = \begin{pmatrix} 5 & 5 \\ 10 & 5 \end{pmatrix}, A\ B \neq BA.$$

□

Příklad 1.71.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}, \quad AB = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Máme případ, že $A \neq \mathcal{O}, \mathcal{B} \neq \mathcal{O}$, ale $AB = \mathcal{O}$.

Jedná se o situaci, která nemá obdobu v oboru reálných čísel. Nelze proto přenášet automaticky poznatky z číselných množin do teorie matic.

Definice 1.72. Matice A, B pro které platí $AB = BA$ se nazývají *komutující.*

Důsledek 1.73. *Komutující matice jsou čtvercové matice stejného řádu.*

Důkaz. Součin matic $A \cdot B$ je definován pouze pokud matice $A \in \mathbb{R}_{m,n}$ a matice $B \in \mathbb{R}_{n,p}$. Výsledkem je potom matice typu (m, p). Aby byl definován i součin $B \cdot A$, musí platit $m = p$. Výsledkem bude matice typu (n, n), která se musí rovnat matici typu (m, m). Podle definice 1.22 se matice mohou sobě rovnat, pokud jsou stejnho typu. Proto $m = n$. □

Příklad 1.74.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}, \ B = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}, \quad AB = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} = BA.$$

Příklad 1.75.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \ B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 4 & 0 \\ 9 & -5 & 5 \end{pmatrix}, \quad AB = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 4 & 0 \\ 24 & 0 & 10 \end{pmatrix} = BA.$$

Věta 1.76. *Pro všechny matice $A \in \mathbb{R}_{m,n}, B, C \in \mathbb{R}_{n,p}, D \in \mathbb{R}_{p,q}$ platí*

1. $A(B + C) = AB + AC$,
2. $A(BD) = (AB)D$,
3. $(\alpha A)B = A\ (\alpha B) = \alpha(AB)$,
4. $(AB)^T = B^T A^T$.

Důkaz. Přímým výpočtem podle definice 1.66. □

Věta 1.77. *Pro každou matici A typu (m, n) platí $AI = A$, kde I je jednotková matice řádu n.*

Důkaz. Příměm výpočtem podle definice 1.66. □

Důsledek 1.78. *$IA = A$, kde $I \in \mathbb{R}_{m,m}$.*

Věta 1.79. *Nechť A je matice typu m, n, potom součin AA^T je matice symetrická.*

Důkaz. Přímým výpočtem podle definice 1.66. □

Věta 1.80. *Nechť A, B, C jsou čtvercové matice řádu n a nechť platí*

$$AB = CA = I.$$

Potom $B = C$.

Důkaz.

$$C = CI = C(AB) = CAB = (CA)B = IB = B.$$

□

Poznámka 1.81. **POZOR!** Ke každé matici A nemusí existovat taková matice B, že platí $AB = I$.

Příklad 1.82.

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha + \gamma & \beta + \delta \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

To ovšem znamená, že pro danou matici A neexistuje matice B taková, že po jejich vynásobení dostaneme matici jednotkovou.

Má tedy smysl následující definice.

Definice 1.83. Nechť A, B jsou čtvercové matice řádu n a nechť platí

$$AB = BA = I.$$

Potom matice B je *inverzní* maticí k matici A. Označení $B = A^{-1}$.

Podle věty 1.80 je inverzní matice, pokud existuje, určena jednoznačně.

Definice 1.84. Matice, ke které existuje matice inverzní, se nazývá *regulární*. V opačném případě mluvíme o matici *singulární*.

Věta 1.85. *Nechť A,B jsou dvě regulární matice řádu n. Potom*

1. *Součin AB je regulární a $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.*
2. *Matice A^{-1} je regulární a $(A^{-1})^{-1} = A$.*

Důkaz. A, B jsou regulární a proto existují k nim matice inverzní A^{-1}, B^{-1}. Potom

$$(AB)(B^{-1}A^{-1)} = ABB^{-1}A^{-1} = A(BB^{-1})A^{-1} = AIA^{-1} = AA^{-1} = I.$$

Podle věty 1.80 je inverzní matice určena jednoznačně. Druhá část věty plyne přímo z definice 1.83. □

Věta 1.86. *Nechť A, B jsou čtvercové matice řádu n. Potom $|AB| = |A|\,|B|$.*

Důkaz. Nechť $A = (a_{ij}),\ B = (b_{ij}),\ i, j = 1, 2, \ldots, n$. Potom

$$|AB| = \begin{vmatrix} \sum\limits_{k_1=1}^{n} a_{1k_1}b_{k_1 1} & \sum\limits_{k_1=1}^{n} a_{1k_1}b_{k_1 2} & \sum\limits_{k_1=1}^{n} a_{1k_1}b_{k_1 3} & \ldots & \sum\limits_{k_1=1}^{n} a_{1k_1}b_{k_1 n} \\ \sum\limits_{k_2=1}^{n} a_{2k_2}b_{k_2 1} & \sum\limits_{k_2=1}^{n} a_{2k_2}b_{k_2 2} & \sum\limits_{k_2=1}^{n} a_{2k_2}b_{k_2 3} & \ldots & \sum\limits_{k_2=1}^{n} a_{2k_2}b_{k_2 n} \\ . & . & . & \ldots & . \\ \sum\limits_{k_n=1}^{n} a_{nk_n}b_{k_n 1} & \sum\limits_{k_n=1}^{n} a_{nk_n}b_{k_n 2} & \sum\limits_{k_n=1}^{n} a_{nk_n}b_{k_n 3} & \ldots & \sum\limits_{k_n=1}^{n} a_{nk_n}b_{k_n n} \end{vmatrix}.$$

Podle věty 1.37 můžeme determinant matice, která má prvky sloupce či řádku ve tvaru součtu, zapsat jako součet determinantů a společný násobek prvků sloupce či řádku vytknout před determinant.

$$|AB| = \sum_{k_1=1}^{n} a_{1k_1} \sum_{k_2=1}^{n} a_{2k_2} \sum_{k_3=1}^{n} a_{3k_3} \cdots \sum_{k_n=1}^{n} a_{nk_n} \begin{vmatrix} b_{k_1 1} & b_{k_1 2} & b_{k_1 3} & \ldots & b_{k_1 n} \\ b_{k_2 1} & b_{k_2 2} & b_{k_2 3} & \ldots & b_{k_2 n} \\ . & . & . & \ldots & . \\ b_{k_n 1} & b_{k_n 2} & b_{k_n 3} & \ldots & b_{k_n n} \end{vmatrix}.$$

Pokud budeme sčítat přes všechny hodnoty $k_1, k_2, \ldots, k_n$ budeme mít v determinantu opakované řádky a protože takový determinant je roven nule, má smysl sčítat pouze přes všechny permutace prvků $(k_1, k_2, \ldots, k_n)$.

$$|AB| = \sum_{k=(k_1,k_2,\ldots,k_n)} a_{1k_1}a_{2k_2}a_{3k_3}\ldots a_{nk_n} \begin{vmatrix} b_{k_1 1} & b_{k_1 2} & b_{k_1 3} & \ldots & b_{k_1 n} \\ b_{k_2 1} & b_{k_2 2} & b_{k_2 3} & \ldots & b_{k_2 n} \\ . & . & . & \ldots & . \\ b_{k_n 1} & b_{k_n 2} & b_{k_n 3} & \ldots & b_{k_n n} \end{vmatrix}.$$

Determinant vpravo si přerovnáme do základního tvaru. Musíme provést přesně tolik výměn $t(k)$, kolik inverzí má permutace $(k_1, k_2, \dots, k_n)$. Při každé výměně se změní hodnota determinantu na opačnou. Dostaneme

$$|AB| = \sum_{k=(k_1,k_2,\dots,k_n)} a_{1k_1} a_{2k_2} a_{3k_3} \dots a_{nk_n} (-1)^{t(k)} |B|.$$

Vlevo máme definiční vyjádření determinatu matice A. Věta je dokázána. □

Důsledek 1.87. $\left|A^{-1}\right| = \frac{1}{|A|}$.

Důkaz.

$$AA^{-1} = I \quad \Rightarrow \quad |A||A^{-1}| = 1 \quad \Rightarrow \quad |A^{-1}| = \frac{1}{|A|}.$$

□

Důsledek 1.88. *Matice A je regulární právě tehdy, když její determinant je nenulový.*

Definice 1.89. *Adjungovaná matice* k matici A je matice $adj\ A = (a^*_{ij})$, kde $a^*_{ij} = A_{ji}$.

Důsledek 1.90. *Matici adjungovanou získáme, když každý prvek matice A nahradíme jeho algebraickým doplňkem a výslednou matici transponujeme.*

Věta 1.91. *Buď A regulární matice, potom $A^{-1} = \frac{1}{|A|}(adj\ A)$.*

Důkaz. Mějme dánu regulární matici A řádu n a matici $adj\ A$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ . & . & \dots & . \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}, \quad adj\ A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ . & . & \dots & . \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix}.$$

Jejich součin má tvar

$$A \cdot (adj\ A) = \begin{pmatrix} |A| & 0 & \dots & 0 \\ 0 & |A| & \dots & 0 \\ . & . & \dots & . \\ 0 & 0 & \dots & |A| \end{pmatrix},$$

protože násobíme první řádek matice A se sloupci matice $adj\ A$, kde ale v prvním sloupci stojí algebraické doplňky příslušné k prvnímu řádku matice A, takže podle Laplaceovy věty o rozvoji determinantu (věta 1.40) dostaneme v prvním řádku a prvním sloupci determinant matice A a zbývající prvky prvního řádku součinu jsou nulové, protože jde o součet součnů prvků prvního řádku matice A a algebraických doplňků příslušných k jinžým řádkům, což se podle věty 1.46 rovná nule. Pro ostatní řádky postupujeme obdobně. □

Důsledek 1.92. $|adj\ A| = |A|^{n-1}$.

Důsledek 1.93. *Věta 1.91 je vhodná pro přímý výpočet inverzní matice pouze u matic nižších řádů.*

Příklad 1.94. Odvoďte vzorec pro inverzní matici k matici řádu 2.

Řešení. Mějme matici řádu 2"

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \quad adj\, A = \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}, \quad A^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}.$$

□

Příklad 1.95. Určete inverzní matici k matici A, jestliže

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 7 \\ 1 & -4 & -5 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Řešení. Protože $|A| = -16+7+84+10 = 85$, je matice A regulární a tedy k ní existuje matice inverzní. Určíme si jednotlivé algebraické doplňky.

$$A_{11} = \begin{vmatrix} -4 & -5 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -3,\; A_{12} = -\begin{vmatrix} 1 & -5 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = -17,\; A_{13} = \begin{vmatrix} 1 & -4 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 13,$$

$$A_{21} = -\begin{vmatrix} 0 & 7 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 7,\; A_{22} = \begin{vmatrix} 2 & 7 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = -17,\; A_{23} = -\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = -2,$$

$$A_{31} = \begin{vmatrix} 0 & 7 \\ -4 & -5 \end{vmatrix} = 28,\; A_{32} = -\begin{vmatrix} 2 & 7 \\ 1 & -5 \end{vmatrix} = 17,\; A_{33} = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -4 \end{vmatrix} = -8.$$

Potom

$$adj\, A = \begin{pmatrix} -3 & 7 & 28 \\ -17 & -17 & 17 \\ 13 & -2 & -8 \end{pmatrix} \quad \text{a} \quad A^{-1} = \frac{1}{85} \begin{pmatrix} -3 & 7 & 28 \\ -17 & -17 & 17 \\ 13 & -2 & -8 \end{pmatrix}.$$

□

Poznámka 1.96. Všimněte si, že prvky matice A jsou řádově jednotky a prvky matice inverzní A^{-1} jsou řádově setiny.

Poznámka 1.97. Pro výpočet inverzní matice vyšších řádů používáme metodu doplnění s jednotkovou maticí. Vedle (vpravo) matice A napíšeme jednotkovou matici téhož řádu a pomocí řádkových elementárních úprav převedeme matici $A|I$ na tvar, kdy vlevo bude matice jednotková. Potom vpravo bude matice inverzní

$$(A|I) = \left(\begin{array}{cccc|cccc} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & 1 & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & 0 & 1 & \dots & 0 \\ . & . & \dots & . & . & . & \dots & . \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} & 0 & 0 & \dots & 1 \end{array}\right) \sim (I|A^{-1})$$

Příklad 1.98. Určete inverzní matici k matici A, jestliže

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -4 & 5 \\ 2 & -3 & 1 \\ 3 & -5 & -1 \end{pmatrix}.$$

Řešení. Zapíšeme vedle sebe matici A a matici jednotkovou. Od prvního řádku odečteme druhý.

$$(A|I) = \left(\begin{array}{rrr|rrr} 3 & -4 & 5 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -3 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & -5 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & -1 & 4 & 1 & -1 & 0 \\ 2 & -3 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & -5 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim$$

Násobky prvního řádku odečítáme od zbývajících, poé odečítáme násobek druhého řádku od třetího.

$$\sim \left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & -1 & 4 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -7 & -2 & 3 & 0 \\ 0 & -2 & -13 & -3 & 3 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & -1 & 4 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 7 & 2 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -3 & 1 \end{array}\right) \sim$$

Nyní odečítáme násobky třetího řádku od zbývajících a poté sečteme druhý a první řádek.

$$\sim \left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & -1 & 0 & -3 & 11 & -4 \\ 0 & 1 & 0 & -5 & 18 & -7 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -3 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 0 & 0 & -8 & 29 & -11 \\ 0 & 1 & 0 & -5 & 18 & -7 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -3 & 1 \end{array}\right).$$

Takže jsme získali výsledek

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -8 & 29 & -11 \\ -5 & 18 & -7 \\ 1 & -3 & 1 \end{pmatrix}.$$

□

Poznámka 1.99. Není nutné předem prověřovat regularitu matice A. Pokud matice A není regulární, tak pomocí žádkověch úprav získáme v levé polovině nulový řádek. Provádíme totiž stejné úpravy jako při zjišťování hodnosti matice. Další výpočet poté zastavujeme s tím, že matice je singulární a proto inverzní není definována.

Příklad 1.100. Určete inverzní matici k matici B, jestliže

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Řešení. Zapíšeme vedle sebe matici A a matici jednotkovou. Násobky prvního řádku odečítáme od zbývajících.

$$(B|I) = \left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 1 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 1 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 3 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & -3 & 2 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim$$

Sečteme druhý a třetí řádek.

$$\sim \left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 1 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 3 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

Vlevo jsme dostali nulový řádek. Protože jsme použili pouze úpravy, které nemění hodnost matice, je hodnost matice B rovna 2. Matice je proto singulární a inverzní matice k matici B neexistuje. □

Definice 1.101. Čtvercová matice A je *podobná* matici B, jestliže existuje regulární matice P tak, že
$$A = PBP^{-1}.$$

Věta 1.102. *Platí*

1. *Každá čtvercová matice je podobná sama sobě (reflexivnost).*
2. *Je-li matice A podobná matici B, je matice B podobná matici A (symetrie).*
3. *Je-li matice A podobná matici B a matice B je podobná matici C, potom je matice A podobná i matici C (tranzitivnost).*

Podobnost je tedy relací ekvivalence na množině čtvercových matic téhož řádu. Tato množina se proto rozpadá na disjunktní třídy navzájem ekvivalentních, t.j. podobných, matic.

Důkaz. 1) Protože $I^{-1} = I$, máme $A = IAI^{-1}$.
2) $A = PBP^{-1} \Rightarrow P^{-1}AP = B$, označme $Q = P^{-1}$, potom $Q^{-1} = P$ a důkaz je hotov.
3) Máme $A = PBP^{-1}, B = QCQ^{-1}$, kde P, Q jsou regulární matice, potom $P^{-1}AP = B$ a dosazením dostaneme

$$P^{-1}AP = B = QCQ^{-1} \Rightarrow A = PQCQ^{-1}P^{-1} \Rightarrow A = (PQ)C(PQ)^{-1}.$$

$\square$

Věta 1.103. *Podobné matice téhož řádu mají stejnou hodnost.*

Věta 1.104. *Jestliže je matice A podobná matici B, potom $|A| = |B|$.*

Důkaz. Podle definice 1.101 je matice A podobná matici B, jestliže existuje regulární matice P taková, že platí:
$$A = PBP^{-1}.$$

Pro determinant potom platí podle věty 1.86

$$|A| = |PBP^{-1}| = |P| \cdot |B| \cdot |P^{-1}| = |P| \cdot |P^{-1}| \cdot |B| = |B|.$$

$\square$

1.2.5 Blokové matice

Definice 1.105. Mějme matici $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}_{m,n}$ a zvolme podmnožinu $M_1 = \{i_1, i_2, \ldots, i_r\}$ množiny řádkových indexů $M = \{1, 2, \ldots, m\}$ a podmnožinu $N_1 = \{k_1, k_2, \ldots, k_s\}$ množiny sloupcových indexů $N = \{1, 2, \ldots, n\}$, a nechť $1 \leq i_1 < i_2 < \cdots < i_r \leq m$, $1 \leq k_1 < k_2 < \cdots < k_s \leq n$. Matici

$$A(M_1, N_1) = \begin{pmatrix} a_{i_1,k_1} & a_{i_1,k_2} & \ldots & a_{i_1,k_s} \\ a_{i_2,k_1} & a_{i_2,k_2} & \ldots & a_{i_2,k_s} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{i_r,k_1} & a_{i_r,k_2} & \ldots & a_{i_r,k_s} \end{pmatrix}$$

budeme nazývat *podmaticí* matice A.

Podmatice, jejichž množiny indexů jsou skupiny po sobě jdoucích čísel, t.j. $M_1 = \{i+1, i+ + 2, \dots, i+r\}$, $N_1 = \{k+1, k+2, \dots, k+s\}$, se nazývají *bloky.*

Je-li celá matice rozdělena na bloky, pak mluvíme o *blokové matici.* Např.

$$A = \begin{pmatrix} P_{11} & P_{12} & P_{13} \\ P_{21} & P_{22} & P_{23} \end{pmatrix},$$

kde P_{ik} jsou opět matice. Přitom všechny matice P_{ik} s prvním indexem stejným mají stejný počet řádků a všechny matice s druhým indexem stejným mají stejný počet sloupců. (Přitom, samozřejmě, index a počet mohou být různá čísla.)

Důležitou vlastností blokových matic je, že se s těmito maticemi dá zacházet tak, jako by místo bloků byly pouze čísla. Je třeba pouze dbát na to, aby byly jednotlivé operace definovány.

Věta 1.106. *Nechť*

$$P = \begin{pmatrix} P_{11} & P_{12} & \dots & P_{1s} \\ P_{21} & P_{22} & \dots & P_{2s} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ P_{r1} & P_{r2} & \dots & P_{rs} \end{pmatrix}, \quad Q = \begin{pmatrix} Q_{11} & Q_{12} & \dots & Q_{1t} \\ Q_{21} & Q_{22} & \dots & Q_{2t} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ Q_{s1} & Q_{s2} & \dots & Q_{st} \end{pmatrix}$$

jsou blokové matice takové, že pro každé j, $j = 1, 2, \dots, r$, a pro každé l, $l = 1, 2, \dots, t$, je počet sloupců matice P_{jk} stejný jako počet řádků matice Q_{kl}, $k = 1, 2, \dots, s$.

Potom lze součin matic PQ psát jako blokovou matici $R = (R_{ik})$, $i = 1, 2, \dots, r$, $k = 1, 2, \dots, t$, kde

$$R_{ik} = P_{i1}Q_{1k} + P_{i2}Q_{2k} + \dots + P_{is}Q_{sk}.$$

S výhodou můžeme tento postup využít, pokud mají matice P, Q nulové a jednotkové bloky.

Příklad 1.107. Mějme součin dvou matic

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & a_{11} & a_{12} \\ 0 & 1 & a_{21} & a_{22} \\ 0 & 0 & b_{11} & b_{12} \\ 0 & 0 & b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & -a_{11} & -a_{12} \\ c_{21} & c_{22} & -a_{21} & -a_{22} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} I & A \\ \mathcal{O} & B \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C & -A \\ \mathcal{O} & I \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} IC + A\mathcal{O}, & -IA + AI \\ \mathcal{O}C + B\mathcal{O}, & -\mathcal{O}A + BI \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C & \mathcal{O} \\ \mathcal{O} & B \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & 0 & 0 \\ c_{21} & c_{22} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b_{11} & b_{12} \\ 0 & 0 & b_{21} & b_{22}. \end{pmatrix}$$

Kontrolu lze provést přímým výpočtem.

Věta 1.108. *Nechť $A = (A_{ik})$, $i, k = 1, 2, \dots, r$ je čtvercová bloková matice, která má diagonální bloky opět čtvercové a poddiagonální bloky jsou nulové: $A_{ik} = \mathcal{O}$ pro $i > k$*

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \dots & A_{1r} \\ \mathcal{O} & A_{22} & \dots & A_{2r} \\ \mathcal{O} & \mathcal{O} & \dots & A_{3r} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \mathcal{O} & \mathcal{O} & \dots & A_{rr} \end{pmatrix}.$$

Potom

$$|A| = |A_{11}| \cdot |A_{22}| \cdot \dots \cdot |A_{rr}|.$$

Důkaz. Převedeme si blok A_{11} na trojúhelníkový tvar pomocí řádkových úprav, které nemění hodnotu determinantu. Budeme přitom pracovat pouze s bloky A_{1k} a zbývající zůstanou beze změny. Opakovaným použitím Laplaceovy věty (věta 1.40) pro rozvoj podle prvního sloupce dostaneme

$$|A| = |A_{11}| \cdot \begin{vmatrix} A_{22} & \dots & A_{2r} \\ \mathcal{O} & \dots & A_{3r} \\ \dots & \dots & \dots \\ \mathcal{O} & \dots & A_{rr} \end{vmatrix}.$$

Matematickou indukcí pokračujeme a získáme tvrzení věty. □

Na blokové matice se přirozeným způsobem přenášejí pojmy zavedené pro matice. Takže mluvíme-li o blokově trojúhelníkové matici, znamená to, že všechny bloky pod (nad) diagonálními bloky jsou nulové. Pokud srovnáte tuto definici s definicí 1.57, vidíte, že se jedná o přirozené přenesení pojmů matic na blokové matice. A podobně i v dalších případech.

Věta 1.109. *Blokově trojúhelníková matice (dolní nebo horní) je regulární, právě když všechny diagonální bloky jsou regulární.*

Důkaz. Přímým výpočtem. □

Věta 1.110. *Platí:*

a) Součin dvou dolních trojúhelníkových matic řádu k je opět dolní tojúhelníková matice řádu k.

b) Součin dvou horních trojúhelníkových matic řádu k je opět horní tojúhelníková matice řádu k.

c) Součin dvou diagonálních matic řádu k je opět diagonální matice řádu k.

Důkaz. Přímým výpočtem. □

Definice 1.111. Je-li σ komplexní číslo a m přirozené číslo, nazývá se *Jordanovým*[1] *blokem* $J_m(\sigma)$ čtvercová matice m-tého řádu

$$J_m(\sigma) = \begin{pmatrix} \sigma & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \sigma & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \sigma & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \sigma \end{pmatrix}.$$

Matice je v *Jordanově tvaru*, je-li blokově diagonální a každý její diagonální blok je Jordanův blok:

$$J = \begin{pmatrix} J_{m_1}(\sigma_1) & \mathcal{O} & \dots & \mathcal{O} \\ \mathcal{O} & J_{m_2}(\sigma_2) & \dots & \mathcal{O} \\ \mathcal{O} & \mathcal{O} & \dots & \mathcal{O} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \mathcal{O} & \mathcal{O} & \dots & J_{m_r}(\sigma_r) \end{pmatrix}.$$

Čísla σ_i, které nemusí být navzájem různá, jsou vlastní čísla matice J.

Vlastní číslo λ matice J je kořen rovnice $\det(\lambda I - J) = 0$.

Věta 1.112. Jordanova.
Každá komplexní nebo reálná matice je v komplexním oboru podobná některé matici v Jordanově tvaru.

1.2.6 Strassenův algoritmus

V roce 1969 odvodil V.Strassen následující postup pro násobení matic: Mějme dvě matice

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix},$$

potom

$$C = A \cdot B = \begin{pmatrix} a\alpha + b\gamma, & a\beta + b\delta \\ c\alpha + d\gamma, & c\beta + d\delta \end{pmatrix}.$$

Označme si součty S_i a součiny M_j

$$\begin{aligned} S_1 &= c + d \\ S_2 &= \underbrace{c + d}_{S_1} - a, \\ S_3 &= a - c \\ S_4 &= \underbrace{c + d - a}_{S_2} - b, \end{aligned}$$

[1] **Camille Marie Edmond Jordan** (5.1.1838 – 21.1.1922) francouzský matematik. Do r. 1873 pracoval jako inženýr, pak vyučoval na polytechnice. Zabýval se algebrou, teorií čísel, teorií funkcí, geometrií, topologií, diferenciálními rovnicemi, teorií míry, a j.

$$\begin{aligned}
S_5 &= \beta - \alpha, \\
S_6 &= \underbrace{\beta - \alpha}_{S_5} - \delta, \\
S_7 &= \delta - \beta, \\
S_8 &= \underbrace{\beta - \alpha - \delta}_{S_6} + \gamma,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
M_1 &= (c + d - a) \cdot (\beta - \alpha - \delta) = (S_2 \cdot S_6) \\
&= c\beta + d\beta - a\beta - c\alpha - d\alpha + a\alpha - c\delta - d\delta + a\delta, \\
M_2 &= a\alpha, \\
M_3 &= b\gamma, \\
M_4 &= (a - c)(\delta - \beta) = a\delta - c\delta - a\beta + c\beta (= S_3 \cdot S_7), \\
M_5 &= (c + d) \cdot (\beta - \alpha) = c\beta + d\beta - c\alpha - d\alpha (= S_3 S_7), \\
M_6 &= (c + d - a - b)\delta = c\delta + \delta - a\delta - b\delta (= S_4 \delta) \\
M_7 &= d(\beta - \alpha\delta + \gamma) = d\beta - d\alpha - d\delta + d\gamma (= dS_8),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
S_9 &= M_2 - M_1 = -c\beta - d\beta + a\beta + c\alpha + d\alpha + c\delta + d\delta - a\delta, \\
S_{10} &= S_9 + M_4 = -d\beta + c\alpha + d\alpha + d\delta, \\
S_{11} &= S_9 + M_5 = a\beta + c\delta + d\delta - a\delta,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
c_{1,1} = S_{12} &= M_2 + M_3 = a\alpha + b\gamma, \\
c_{1,2} = S_{13} &= S_{11} - M_6 = a\beta - b\delta, \\
c_{2,1} = S_{14} &= S_{10} + M_7 = c\alpha + d\gamma, \\
c_{2,2} = S_{15} &= S_{10} + M_5 = c\beta + d\delta.
\end{aligned}$$

Získali jsme součin dvou matic řádu 2 pomocí 15 sčítání a odečítání, ale pouze 7 násobení. Podle definice by bylo třeba 4 sčítání a 8 násobení.

Na první pohled se zdá, že vzorec je k ničemu, neboť jednak umožňuje násobit jen matice řádu 2 a ve srovnání s klasickým postupem ušetří provedení jednoho součinu za cenu 11 nových součtů. Navíc je celý postup podstatně složitější.

Při podrobnějším rozboru však zjistíme, že vzorec nikde nevyužívá toho, že a, b, c, d, $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ jsou čísla a navíc ani nepředpokládá komutativnost násobení. Vzorec je tedy možné použít k násobení dvou čtvercových matic řádu N, kde $N = 2P$ je sudé číslo, tak, že násobení matic A, B považujeme za matice řádu 2 s koeficienty představovanými maticemi řádu P. Operace $+$ a $-$ ve vzorcích pro S_i jsou potom sčítání a odečítání matic řádu P a při výpočtu součinů M_i budeme provádět maticové násobení.

Součin matic je časově náročnější než součet nebo rozdíl. Při postupu podle definice vyžaduje totiž součet či rozdíl dvou matic řádu P provedení P^2 operací, zatímco součin těchže matic vyžaduje $P^2(2P - 1)$ operací. Takže pro dostatečně velké P je výhodnější provést navíc 11 maticových součtů, než jedno maticové násobení.

Příklad 1.113. Pro $N = 12$ máme:

Strassenův algoritmus	celkem	3312 operací
	z toho	1512 násobení
		1800sčítání
Klasický postup	celkem	3312 operací
	z toho	1728 násobení
		1584 sčítání

Už zde dosahuje Strassenův algoritmus převahy, protože má méně násobení. Protože při násobení matic se provádějí nejen aritmetické operace, ale i pomocné operace, jako přesuny dat, řízení cyklů, rekurze a pod., je nutno ještě zvýšit hodnoty N. Strassenův algoritmus je výhodnější pro $N \geq 24$ pro sudé N a pro lichá $N \geq 37$. Bližší podrobnosti viz [33], str. 46 — 55.

1.2.7 Maticové rovnice

Definice 1.114. Nechť $A \in \mathbb{R}_{m,n}$, $B \in \mathbb{R}_{m,p}$, $C \in \mathbb{R}_{n,p}$. Potom $AX = B, YC = B$ jsou *maticové rovnice* s neznámými maticemi $X \in \mathbb{R}_{n,p}$, $Y \in \mathbb{R}_{m,n}$.

Věta 1.115. *Nechť A, B jsou čtvercové matice řádu n, přičemž A je regulární. Potom jsou jednoznačně řešitelné maticové rovnice $AX = B$, $YA = B$.*

Důkaz. Matice A je regulární, proto k ní existuje matice inverzní A^{-1}. Vynásobíme celou rovnice zleva maticí inverzní, dostaneme

$$AX = B,$$

$$A^{-1}AX = A^{-1}B,$$

$$X = A^{-1}B.$$

Protože inverzní matice i součin matic je definován jednoznačně, je jednoznačně definován i výsledek. □

Věta 1.116. *Maticové rovnice $AX = B, YA = C$,kde A je regulární matice řádu n, $B \in \mathbb{R}_{(n,p)}$, $C \in \mathbb{R}_{(s,n)}$ jsou jednoznačně řešitelné.*

Důkaz. Analogicky jako u předchozí věty. Pravá strana maticové rovnice nemusí být stejného řádu jako matice A vlevo. □

Věta 1.117. *Maticová rovnice $AX = B$ je řešitelná právě tehdy, když $h(A) = h(A|B)$, kde matice $A|B$ vznikne zapsáním matic A, B vedle sebe.*

Věta 1.118. *Nechť $A \in \mathbb{R}_{m,m}$, $B \in \mathbb{R}_{n,n}$ jsou regulární matice. Potom je jednoznačně řešitelná maticová rovnice*

$$AXB = C,$$

kde $X \in \mathbb{R}_{m,n}$, $C \in \mathbb{R}_{m,n}$.

Důkaz. A, B jsou regulární, proto existují k nim matice inverzní.

$$AXB = C,$$
$$A^{-1}AXBB^{-1} = A^{-1}CB^{-1},$$
$$X = A^{-1}CB^{-1}.$$

Protože inverzní matice i součin matic je definován jednoznačně, je jednoznačně definován i výsledek. □

Příklad 1.119. Řešte

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 5 & -2 \end{pmatrix} X \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14 & 16 \\ 9 & 10 \end{pmatrix}.$$

Řešení.

$$AXB = C,$$
$$X = A^{-1}CB^{-1},$$
$$A^{-1} = \frac{1}{-1}\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -5 & 3 \end{pmatrix}, \quad B^{-1} = \frac{1}{-2}\begin{pmatrix} 8 & -6 \\ -7 & 5 \end{pmatrix},$$
$$X = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -5 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 14 & 16 \\ 9 & 10 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 8 & -6 \\ -7 & 5 \end{pmatrix},$$
$$X = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}.$$

□

1.3 Soustavy lineárních rovnic

1.3.1 Základní pojmy

Definice 1.120. Maticová rovnice $Ax = b$, kde $A \in \mathbb{R}_{m,n}$, $b \in \mathbb{R}_{m,1}$, $x \in \mathbb{R}_{n,1}$ se nazývá *soustava lineárních algebraických rovnic.*
V rozepsaném tvaru máme

$$\begin{array}{ccccccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \dots & + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \dots & + & a_{2n}x_n & = & b_2 \\ . & . & . & . & \dots & . & . & . & . \\ a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & \dots & + & a_{mn}x_n & = & b_m \end{array} \tag{1.1}$$

A je matice koeficientů, b je sloupec pravých stran, x je sloupec neznámých,

matice $(A|b) = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ . & . & \dots & . & . \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{array}\right)$ se nazývá matice rozšířená .

Každý sloupec (sloupcová matice) α pro který platí $A\alpha = b$ se nazývá *řešením* soustavy (1.1).

Definice 1.121. Soustava (1.1) je *řešitelná*, má-li aspoň jedno řešení.
Soustava (1.1) je *jednoznačně řešitelná*, má-li právě jedno řešení.
Soustava (1.1) je *víceznačně řešitelná*, má-li více než jedno řešení.

Definice 1.122. Soustava lineárních algebraických rovnic se nazývá *homogenní*, jestliže je tvaru

$$Ax = \mathcal{O}, \tag{1.2}$$

kde $\mathcal{O}$ je nulový sloupec. V opačném případě mluvíme o *nehomogenní* soustavě.

Definice 1.123. Je-li $Ax = b$ nehomogenní soustava, pak *přidruženou homogenní soustavou* rozumíme soustavu $Ax = \mathcal{O}$ (t.j. homogenní soustavu se stejnou maticí koeficientů jakou má nehomogenní soustava).

Příklad 1.124. Mějme dánu nehomogenní soustavu

$$\begin{aligned} 3x_1 + x_2 - 4x_3 &= 1 \\ x_1 - 2x_2 + x_3 &= 5 \\ 2x_1 - x_2 - 3x_3 &= 4 \end{aligned}$$

Přidružená homogenní soustava má tvar

$$\begin{aligned} 3x_1 + x_2 - 4x_3 &= 0 \\ x_1 - 2x_2 + x_3 &= 0 \\ 2x_1 - x_2 - 3x_3 &= 0 \end{aligned}$$

1.3.2 Řešení soustav

Věta 1.125. *Nechť soustava $Ax = b$ má regulární matici koeficientů. Potom má tato soustava právě jedno řešení. Můžeme je určit použitím "Cramerova[1] pravidla (Cramerových vzorců)" : k-tý člen řešení je zlomek, v jehož jmenovateli je determinant matice koeficientů A a v čitateli je determinant matice, kterou získáme z matice A nahrazením k-tého sloupce sloupcem pravých stran soustavy* (1.1) *a ostatní sloupce ponecháme beze změny.*

Důkaz. Máme $Ax = b$, $|A| \neq 0$, take existuje A^{-1}. Potom

$$x = A^{-1}b = \frac{1}{|A|}(adj\ A)b = \frac{1}{|A|}\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ . & . & \dots & . \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix} b.$$

Nyní si jen stačí uvědomit, že v prvním řádku matice $adj\ A$ jsou algebraické doplňky příslušné k prvnímu sloupci matice A. Potom součin prvního řádku matice $adj\ A$ se sloupcem b můžeme podle Laplaceovy věty 1.40 chápat jako rozvoj determinantu matice podle prvního sloupce, kde matice má jako první sloupec sloupec b a zbývající sloupce jsou z matice A. Obdobně pro další prvky. □

[1] **Gabriel Cramer** (31.7.1704 – 4.1.1752) švýcarský matematik, přírodovědec a technik. V matematice se věnoval hlavně geometrii a teorii pravděpodobnosti. V r. 1750 vydal knihu o algebraických křivkách, kde je v dodatku uveden způsob vyloučení $n-1$ neznámých ze soustavy n rovnic o n neznámých. Přes nevhodnou symboliku tím položil základy teorii determinantů.

Příklad 1.126. Najít řešení soustavy rovnic

$$\begin{aligned} 3x_1 + x_2 - 4x_3 &= 1 \\ x_1 - 2x_2 + x_3 &= 5 \\ 2x_1 - x_2 - 3x_3 &= 4 \end{aligned}$$

Řešení. Určíme si determinant matice koeficientů

$$|A| = \begin{vmatrix} 3 & 1 & -4 \\ 1 & -2 & 1 \\ 2 & -1 & -3 \end{vmatrix} = 14$$

Determinant matice A je nenulový, soustava je tedy jednoznačně řešitelná. Spočít me si determinanty matic D_i, kde matice D_i vznikne z matice A nahrazením i-tého sloupce sloupcem pravých stran naší soustavy.

$$|D_1| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -4 \\ 5 & -2 & 1 \\ 4 & -1 & -3 \end{vmatrix} = 14, \quad |D_2| = \begin{vmatrix} 3 & 1 & -4 \\ 1 & 5 & 1 \\ 2 & 4 & -3 \end{vmatrix} = -28, \quad |D_3| = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 5 \\ 2 & -1 & 4 \end{vmatrix} = 0.$$

Potom $x_i = \frac{|D_i|}{|A|}$, takže máme

$$x_1 = \frac{14}{14} = 1, \quad x_2 = \frac{-28}{14} = -2, \quad x_3 = \frac{0}{14} = 0.$$

□

Vyhodnocení: Cramerovy vzorce nám sice dávají přesné řešení, ale je zapotřebí pro ně vypočítat $(n+1)$ determinantů n-tého řádu. Pro rozsáhlejší soustavy je jejich použití problematické, protože ani s pomocí výpočetní techniky nejsme schopni určit přesně hodnoty determinantů. Cramerovy vzorce předpokládají regularitu matice koeficientů. Nedají se proto použít pro libovolnou soustavu.

Věta 1.127. Frobeniova[1], Kroneckerova[2] — Capelliho[3], existenční.
Soustava (1.1) *je řešitelná právě tehdy, když hodnost matice koeficientů se rovná hodnosti matice rozšířené.*

[1]**Georg Ferdinand Frobenius** (26.10.1849 – 3.8.1917) německý matematik. Zabýval se hlavně algebrou. Vyslovil existenční větu pro řešení soustavy lineárních algebraických rovnic. Patří mu vynikající práce z oblasti kvadratických forem, maticového počtu a teorie konečných grup. Zavedl řadu pojmů moderní algebry.

[2]**Leopold Kronecker** (7.12.1823 — 29.12.1891) německý matematik. Zabýval se teorií čísel, teorií kvadratických forem, teorií grup, teorií eliptických funkcí. Byl odpůrcem Cantorovy teorie množin. Odvodil metodu, kterou lze vždy nalézt všechny racionální kořeny polynomu s racionálními koeficienty (i když mnohdy obtížně a zdlouhavě). Dokázal existenční větu pro řešení soustavy lineárních algebraických rovnic.

[3]**Alfredo Capelli** (5.6.1855 – 28.1.1910) italský matematik, působil v Neapoli. Významně přispěl k rozvoji teorie algebraických rovnic. Dále se zabýval teorií funkcí komplexní proměnné a teorii diferenciálních rovnic.

Důkaz. Nechť je soustava (1.1) řešitelná. Potom existuje sloupec

$$\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)^T$$

takový, že platí $A\lambda = b$. Vezmeme si matici rozšířenou soustavy (1.1) a od posledního sloupce odečteme λ_1 násobek prvního sloupce, λ_2 násobek druhého sloupce, atd. až λ_n násobek n-tého sloupce. Dostaneme

$$(A|b) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 - \lambda_1 a_{11} - \lambda_2 a_{12} - \dots - \lambda_n a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 - \lambda_1 a_{21} - \lambda_2 a_{22} - \dots - \lambda_n a_{2n} \\ . & . & \dots & . & . \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m - \lambda_1 a_{m1} - \lambda_2 a_{m2} - \dots - \lambda_n a_{mn} \end{array}\right).$$

Protože λ je řešením soustavy (1.1), tak platí pro všechna $i = 1, 2, \dots, m$

$$b_i - \lambda_1 a_{i1} - \lambda_2 a_{i2} - \dots - \lambda_n a_{in} = 0.$$

V posledním sloupci budou samé nuly a máme

$$(A|b) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & 0 \\ . & . & \dots & . & . \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & 0 \end{array}\right) \sim A$$

Nulový sloupec jsme vynechali. Použili jsme pouze elementární úpravy, které nemění hodnost matice. Proto platí: Jestliže je soustava (1.1) řešitelná, potom $h(A) = h(A|b)$.

Z druhé strany: Nechť je $h(A) = h(A|b) = k$. Potom existuje bazový minor řádu k, který musí ležet v matici A. Nechť je vlevo nahoře. Potom podle věty 1.52 každý sloupec matice $(A|b)$ je lineární kombinací bázových sloupců. Bude tedy i sloupec b lineární kombinací bázových.

$$\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_m \end{pmatrix} = \lambda_1 \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \dots \\ a_{m1} \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \dots \\ a_{m2} \end{pmatrix} + \dots + \lambda_k \begin{pmatrix} a_{1k} \\ a_{2k} \\ \dots \\ a_{mk} \end{pmatrix} =$$

$$= \lambda_1 \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \dots \\ a_{m1} \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \dots \\ a_{m2} \end{pmatrix} + \dots + \lambda_k \begin{pmatrix} a_{1k} \\ a_{2k} \\ \dots \\ a_{mk} \end{pmatrix} + 0 \begin{pmatrix} a_{1,k+1} \\ a_{2,k+1} \\ \dots \\ a_{m,k+1} \end{pmatrix} + \dots + 0 \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \dots \\ a_{mn} \end{pmatrix}.$$

To ovšem znamená, že sloupec $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k, 0, \dots, 0)^T$ je řešením soustavy (1.1). Neboli platí: Jestliže je $h(A) = h(A|b) = k$, potom je soustava (1.1) řešitelná. □

Důsledek 1.128. *Je-li soustava (1.1) řešitelná, t.j. $h(A) = h(A|b) = h$, pak pro $h = n$ má soustava (1.1) právě jedno řešení a pro $h < n$ má soustava (1.1) nekonečně mnoho řešení, která závisí na $(n - h)$ parametrech.*

Důsledek 1.129. *Je-li soustava (1.1) řešitelná, t.j. $h(A) = h(A|b) = h$, potom* **nikdy** *nemůže nastat případ, že $h > n$.*

Poznámka 1.130. POZOR:
$h(A) < h(A|b)$ — soustava (1.1) nemá řešení,
$h(A) = h(A|b)$ — soustava (1.1) je řešitelná,
$h(A) > h(A|b)$ — **POZOR CHYBA** — nemůže nikdy nastat. Přidáním dalšího sloupce můžeme hodnost matice zvýšit, ale nikdy ne snížit.

Příklad 1.131. Řešte soustavu

$$\begin{aligned} x + y + z &= 1 \\ 2x + y + 2z &= 1 \\ x + y + 3z &= 2 \end{aligned}$$

Řešení. Protože $|A| = -2 \neq 0$, jde o kramerovskou soustavu, která má právě jedno řešení, které si můžeme určit pomocí Cramerových vzorců. Dostaneme

$$x = -\frac{1}{2},\ y = 1,\ z = \frac{1}{2}.$$

□

Příklad 1.132. Řešte soustavu

$$\begin{aligned} x + y + z &= 1 \\ x + y + 2z &= 1 \\ x + y + 3z &= 2 \end{aligned}$$

Řešení. $|A| = 0$, proto nemůžeme použít Cramerových vzorců.

$$h(A) = 2,\ h(A|b) = 3 \Rightarrow h(A) \neq h(A|b).$$

Podle věty 1.127 nemá soustava řešení. □

Příklad 1.133. Řešte soustavu

$$\begin{aligned} x + y + z &= 1 \\ x + y + 2z &= 1 \\ 2x + 2z + 4z &= 2 \end{aligned}$$

Řešení. $|A| = 0$, proto nemůžeme použít Cramerových vzorců. Dále

$$h(A) = 2,\ h(A|b) = 2 \Rightarrow h(A) = h(A|b),$$

řešení závisí na jednom parametru $t \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} x &= 1 - t \\ y &= t \\ z &= 0. \end{aligned}$$

□

Věta 1.134. *Homogenní soustava* (1.2) *je vždy řešitelná.*

Důkaz. Nulový sloupec je vždy řešením, protože $A\mathcal{O} = \mathcal{O}$.
Jiný způsob důkazu: Vynecháním nulového sloupce se hodnost matice nezmění, proto $h(A|\mathcal{O}) = \langle(\mathcal{A})$ a podle Frobeniovy věty (věta 1.127) je soustava řešitelná. □

Definice 1.135. Nulové řešení soustavy (1.2) nazveme *triviálním.*

Věta 1.136. *Homogenní soustava* (1.2) *má netriviální řešení právě tehdy, když hodnost matice koeficientů je menší jak počet neznámých.*

Důkaz. Plyne přímo z důsledků věty 1.127. □

Věta 1.137. *Nechť u, v jsou dvě řešení soustavy* (1.2)*. Potom i jejich libovolná lineární kombinace $\alpha u \ + \beta v$ je řešením soustavy* (1.2).

Důkaz. Nechť u, v jsou řešením soustavy (1.2). To znamená, že platí

$$Au = \mathcal{O}, \quad Av = \mathcal{O}.$$

Potom

$$A(\alpha u \ + \beta v) = A(\alpha u) + A(\beta v) = \alpha Au + \beta Av = \alpha\mathcal{O} + \beta\mathcal{O} = \mathcal{O}.$$

□

Důsledek 1.138. *Každá lineární kombinace libovolného počtu řešení soustavy (1.2) je opět řešením soustavy (1.2).*

Důkaz. Věta 1.137 mluví jen o dvou řešeních, ale jejich počet není omezen. Důkaz se provede matematickou indukcí. □

Definice 1.139. Maximální počet lineárně nezávislých řešení soustavy (1.2) nazveme *fundamentální soustavou řešení* soustavy (1.2).

Věta 1.140. *Každá víceznačně řešitelná soustava* (1.2) *má vždy fundamentální soustavu řešení.*

Důkaz. Nechť $h(A) = h < n$. Potom, podle důsledku věty 1.127, řešení závisí na $(n - h)$ parametrech. Parametry si volíme jako sloupce jednotkové matice řádu $n - h$. Po dosazení do soustavy dopočítáme zbývající neznámé. Celkem budeme mít $n - h$ řešení, která budou lineárně nezávislá, protože jednotlivá řešení jou sloupcové matice a budou obsahovat námi použitou jednotkovou matici. Je tedy možné z nich sestavit nenulový minor řádu $n - h$. □

Příklad 1.141. Řešte homogenní soustavu rovnic

$$\begin{aligned}
3x_1 + 2x_2 + 5x_3 + 2x_4 + 7x_5 &= 0\\
6x_1 + 4x_2 + 7x_3 + 4x_4 + 5x_5 &= 0\\
3x_1 + 2x_2 - x_3 + 2x_4 - 11x_5 &= 0\\
6x_1 + 4x_2 + x_3 + 4x_4 - 13x_5 &= 0
\end{aligned}$$

Řešení. Koeficienty soustavy si zapíšeme do matice a pomocí elementárních řádkových úprav si matici převedeme na stupňovitý tvar.

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 5 & 2 & 7 \\ 6 & 4 & 7 & 4 & 5 \\ 3 & 2 & -1 & 2 & -11 \\ 6 & 4 & 1 & 4 & -13 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 3 & 2 & 5 & 2 & 7 \\ 0 & 0 & -3 & 0 & -9 \\ 0 & 0 & -6 & 0 & -18 \\ 0 & 0 & -9 & 0 & -27 \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 & 2 & -8 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & \frac{2}{3} & 0 & \frac{2}{3} & -\frac{8}{3} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Máme dvě rovnice o pěti neznámých. Volíme si proto tři parametry. Neznámé, které jsou na začátku řádku, jehož předchozí koeficienty jsou nulové, můžeme dopočítat. Zbývající volíme jako parametry. Zvolme $x_2 = 3s$, $x_4 = 3t$, $x_5 = 3u$, kde $s, t, u \in \mathbb{R}$. Potom

$$x = \begin{pmatrix} -2s - 2t + 8u \\ 3s \\ -9u \\ 3t \\ 3u \end{pmatrix} = s \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 0 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + u \begin{pmatrix} 8 \\ 0 \\ -9 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Tři sloupcové matice vpravo pak představují fundamentální soustavu řešení, protože pokud si je zapíšeme jako sloupce do matice, tak druhý, čtvrtý a pátý řádek nám vytvářejí nenulový minor řádu 3. □

Věta 1.142. *Nechť p, q jsou řešení soustavy (1.1). Potom $(p - q)$ je řešením přidružené homogenní soustavy.*

Důkaz. Nechť p, q jsou řešení soustavy (1.1), potom platí

$$Ap = b, \quad Aq = b.$$

A tedy

$$A(p - q) = Ap - Aq = b - b = \mathcal{O}.$$

□

Důsledek 1.143. *Součet řešení soustavy (1.1) a řešení přidružené homogenní soustavy je řešením soustavy (1.1).*

Důkaz. Nechť p je řešením soustavy (1.1) a q je řešením přidružené homogenní soustavy. Neboli platí

$$Ap = b \quad Aq = \mathcal{O}.$$

Potom

$$A(p + q) = Ap + Aq = b + \mathcal{O} = \lfloor.$$

□

Důsledek 1.144. *Všechna řešení soustavy (1.1) získáme jako součet jednoho (parciálního) řešení soustavy (1.1) a fundamentální soustavy řešení přidružené homogenní soustavy.*

1.3.3 Gaussova eliminační metoda

Definice 1.145. Dvě řešitelné soustavy lineárních rovnic se nazývají *ekvivalentní*, jestliže mají stejnou množinu řešení.

Poznámka 1.146. Dvě ekvivalentní soustavy mohou mít různý počet rovnic, ale musí mít stejný počet neznámých.

Mějme dvě takové soustavy

$$Ax = b, \qquad A'x = b'.$$

Potom z podmínek řešitelnosti plyne, že

$$h(A) = h(A|b) = h(A') = h(A'|b').$$

Protože mají stejnou množinu řešení, tak platí:

$$A\alpha = b \Leftrightarrow A'\alpha = b'.$$

Potom konečným počtem řádkových elementárních úprav lze matici $(A|b)$ převést na matici $(A'|b')$.
Pozor, zde už nelze kombinovat řádkové a sloupcové úpravy. Můžeme používat pouze řádkové úpravy a ze sloupcovch pouze výměnu sloupců v matici A, což je vlastně přeznačení proměnných.
Pomocí povolených elementárních úprav si upravíme soustavu $Ax = b$ na tvar

$$\begin{array}{rcl}
c_{1,1}y_1 + c_{1,2}y_2 + \cdots + c_{1,h}y_h + c_{1,h+1}y_{h+1} + \cdots + c_{1,n}y_n & = & d_1 \\
c_{2,2}y_2 + \cdots + c_{2,h}y_h + c_{2,h+1}y_{h+1} + \cdots + c_{2,n}y_n & = & d_2 \\
\cdots\cdots & & \cdots \\
c_{h,h}y_h + c_{h,h+1}y_{h+1} + \cdots + c_{h,n}y_n & = & d_h
\end{array}$$

kde $(y_1, y_2, \ldots, y_n)$ je vhodná permutace proměnných $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$.
Je-li $h = n$ má soustava právě jedno řešení — jde o kramerovskou soustavu.
Je-li $h < n$, potom proměnné $y_{h+1}, \ldots, y_n$ prohlásíme za parametry a soustavu upravíme na tvar

$$\begin{array}{rcl}
c_{1,1}y_1 + c_{1,2}y_2 + \cdots + c_{1,h}y_h & = & d_1 - c_{1,h+1}y_{h+1} - \cdots - c_{1,n}y_n \\
c_{2,2}y_2 + \cdots + c_{2,h}y_h & = & d_2 - c_{2,h+1}y_{h+1} - \cdots - c_{2,n}y_n \\
\cdots\cdots & & \cdots \\
c_{h,h}y_h & = & d_h - c_{h,h+1}y_{h+1} - \cdots - c_{h,n}y_n
\end{array} \tag{1.3}$$

Tato soustava je ekvivalentní s původní soustavou $Ax = b$ a každé volbě parametrů $y_{h+1}, \ldots, y_n$ odpovídá právě jedno řešení. Parametrů je celkem $(n-h)$. Jestliže za prvky $y_{h+1}, \ldots, y_n$ bereme sloupce regulární matice řádu $(n-h)$, potom bereme za parametry lineárně nezávislé prvky a obdržíme obecné řešení soustavy (1.1).
Tento postup se nazývá Gaussova eliminační metoda.

Jestliže budeme dále pokračovat v řádkových úpravách, můžeme soustavu (1.3) upravit na tvar

$$\begin{array}{rcl}
y_1 + 0y_2 + \cdots + 0y_h & = & g_1 - f_{1,h+1}y_{h+1} - \cdots - f_{1,n}y_n \\
y_2 + \cdots + 0y_h & = & g_2 - f_{2,h+1}y_{h+1} - \cdots - f_{2,n}y_n \\
\cdots\cdots & & \cdots
\end{array}$$

$$y_h = g_h - f_{h,h+1}y_{h+1} - \cdots - f_{h,n}y_n$$

zde máme na hlavní diagonále vlevo jednotky a zbývající prvky nalevo jsou nulové. Tento postup se nazývá Jordanova eliminace.

Příklad 1.147. Řešte soustavu

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 + 5x_5 &= 1 \\ -2x_1 + 3x_2 + 4x_3 + 5x_4 + 6x_5 &= 2 \\ -3x_1 + 4x_2 + 5x_3 + 6x_4 + 7x_5 &= 3 \\ -4x_1 + 5x_2 + 6x_3 + 7x_4 + 8x_5 &= 4 \end{aligned}$$

Řešení. Zapíšeme si rozšířenou matici soustavy a pomocí elementárních řádkových úprav ji převedeme na trojúhelníkový tvar.

$$\left(\begin{array}{rrrrr|r} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 1 \\ -2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 2 \\ -3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 3 \\ -4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 4 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrrrr|r} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 1 \\ 0 & 7 & 10 & 13 & 16 & 4 \\ 0 & 10 & 14 & 18 & 22 & 6 \\ 0 & 13 & 18 & 23 & 28 & 8 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrrrr|r} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 1 \\ 0 & 7 & 10 & 13 & 16 & 4 \\ 0 & 3 & 4 & 5 & 6 & 2 \\ 0 & 6 & 8 & 10 & 12 & 4 \end{array}\right) \sim$$

$$\left(\begin{array}{rrrrr|r} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 0 \\ 0 & 3 & 4 & 5 & 6 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrrrr|r} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & -4 & -6 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrrrr|r} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Získali jsme soustavu tří rovnic o pěti neznámých

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 + 5x_5 &= 1 \\ x_2 + 2x_3 + 3x_4 + 4x_5 &= 0 \\ x_3 + 2x_4 + 3x_5 &= -1 \end{aligned}$$

Zvolíme si dva parametry $x_4 = s, x_5 = t$, kde $s, t \in \mathbb{R}$. Potom

$$\begin{aligned} x_3 &= -1 - 2x_4 - 3x_5 = -1 - 2s - 3t \\ x_2 &= -2x_3 - 3x_4 - 4x_5 = 2 + s + 2t \\ x_1 &= 1 - 2x_2 - 3x_3 - 4x_4 - 5x_5 = 0 \end{aligned}$$

Řešením naší soustavy je $x = (0, 2 + s + 2t, -1 - 2s - 3t, s, t)^T$.

Často bývá vhodnější pokračovat dále v maticových úpravách a převést si matici na diagonální tvar. V našem případě budeme mít

$$\left(\begin{array}{rrrrr|r} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrrrr|r} 1 & 2 & 0 & -2 & -4 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 3 & -1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrrrr|r} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 3 & -1 \end{array}\right).$$

Potom

$$x_1 = 0, x_2 = 2 + x_4 + 2x_5, x_3 = -1 - 2x_4 - 3x_5$$

a analogicky jako v předchozím případě si volíme dva parametry x_4 a x_5 a dostaneme stejný výsledek. $(0, 2, -1, 0, 0)^T$ tvoří partikulární řešení a $(0, 1, -2, 1, 0)^T, (0, 2, -3, 0, 1)^T$ je fundamentální soustava řešení přidružené homogenní soustavy. □

Gaussova eliminační metoda (a také Jordanova) má rozsáhlé praktické uplatnění, zejména v numerické matematice a technických aplikacích.

Definice 1.148. Úloha je stabilní, jestliže drobná změna vstupních hodnot vyvolá jen drobnou změnu ve výsledku.

Jakákoliv numerická úloha obsahující soustavy lineárních algebraických rovnic je obecně vzato nestabilní.

Příklad 1.149. Mějme dánu soustavu

$$\begin{aligned} 2x + 6y &= 8, \\ 2x + 6.00001y &= 8.00001, \end{aligned}$$

která má řešení $x = 1,\ y = 1$.
Drobnou změnou zadání získáme soustavu

$$\begin{aligned} 2x + 6y &= 8, \\ 2x + 5.99999y &= 8.00002 \end{aligned}$$

která ale má výrazně odlišné řešení $x = 10,\ y = -2$.
Změna vstupních hodnot byla řádově 10^{-5} a u výstupních hodnot jde o přechod od jednotek k desítkám.

U rozsáhlejších soustav mohou být změny ještě výraznější. Záleží na tvaru matice koeficientů soustavy. Platí: jestliže má matice A a matice A^{-1} srovnatelné prvky, potom je úloha $Ax = b$ stabilní. V opačném případě jde o nestabilní úlohu.

Příklad 1.150. V předchozím příkladu máme

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 6 \\ 2 & 6.00001 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} adj\ A = \frac{1}{2 \cdot 10^{-5}} \begin{pmatrix} 6.000012 & -6 \\ -2 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 300000.5 & -300000 \\ -100000 & 100000 \end{pmatrix}.$$

Prvky matice A jsou řádově jednotky, prvky matice inverzní jsou řádově statisíce, máme tady výrazně nestabilní matici.

Aplikace v úlohách numerické matematiky.

1. Aproximace funkcí spline funkcí.
2. Aproximace funkcí metodou nejmenších čtverců.
3. Řešení obyčejných diferenciálních rovnic.
4. Řešení parciálních diferenciálních rovnic.

1.3.4 Numerické řešení soustav

Soustavu $Ax = b$ si upravíme na tvar $x = Cx + d$, kde $c_{ii} = 0, c_{ij} = a_{ij}/a_{ii}$ pro $i \neq j$ a $d_i = b_i/a_{ii}$. Potom **Jacobiho metoda** je určeny vztahy

$$x_i^{k+1} = \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_j^k + d_1,$$

a **Gaussova-Seidelova metoda** je určena vztahy

$$x_i^{k+1} = \sum_{j=1}^{i-1} c_{ij} x_j^{k+1} + \sum_{j=i+1}^{n} c_{ij} x_j^k + d_1,$$

přitom horní index určuje krok. Tyto metody se nedají použít pro libovolnou matici.

Definice 1.151. Matice A je diagonálně dominantní, jestliže $|a_{ii}| > \sum\limits_{j=1, j\neq i}^{n} |a_{ij}|$.
Matice A je pozitivně definitní, jestliže $x^T Ax > 0$ pro každý sloupcový nenulový vektor x.

Věta 1.152.

1. *Je-li matice A diagonálně dominantní, potom Jacobiho metoda konverguje pro libovolný počátek.*
2. *Je-li matice A diagonálně dominantní, potom Gaussova-Seidelova metoda konverguje pro libovolný počátek.*
3. *Je-li matice A symetrická a pozitivně definitní, potom Gaussova-Seidelova metoda konverguje pro libovolný počátek.*

Pro řešení soustav rovnic můžete použít i maplety, které byly umístěny na síti:

Pojmy k zapamatování

– Zopakovali jsme si práci s polynomy a rozklad na parciální zlomky.
– Osvěžili jsme si v paměti matice, determinanty, výpočet matice inverzní.
– Zopakovali jsme si řešitelnost soustav lineárních algebraických rovnic.

Kontrolní otázky

1. Co rozumíme pojmem kořen polynomu?
2. Kolik kořenů má polynom?
3. K čemu slouží Hornerovo schéma?
4. Existuje vzorec pro výpočet inverzní matice?
5. Kdy je matice pozitivně definitní?
6. Je každá soustava lineárních algebraických rovnic řešitelná?

Cvičení

1. Jsou matice lineárně závislé a nebo nezávislé?

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad A_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

2. Určete hodnotu deterninantu matice A,

$$A = \begin{pmatrix} -10 & 5 & -7 & 4 \\ -7 & 3 & -9 & 3 \\ -2 & 1 & -1 & 1 \\ -5 & 5 & -3 & 5 \end{pmatrix}.$$

3. Určit hodnotu deterninantu matice A,

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 2 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

4. Určit hodnost matice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 & -5 \\ 2 & -1 & 0 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & 6 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

5. Určete inverzní matici k matici A, jestliže

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 7 \\ 1 & -4 & -5 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

6. V závislosti na parametru řešte soustavu

$$\begin{array}{rcrcrcl} x_1 & + & x_2 & + & \alpha x_3 & = & 1 \\ x_1 & + & \alpha x_2 & + & x_3 & = & 1 \\ \alpha x_1 & + & x_2 & + & x_3 & = & 1 \end{array}$$

7. V závislosti na parametru řešte soustavu

$$\begin{array}{rcrcrcl} 4x_1 & + & 4x_2 & + & 4x_3 & = & 1+\alpha \\ 8x_1 & + & 6x_2 & + & 4x_3 & = & 1 \\ -3x_1 & - & 2x_2 & - & x_3 & = & 1 \end{array}$$

Výsledky

1. Matice jsou lineárně závislé, protože platí $A_1 + 2A_2 - A_3 = \mathcal{O}$.

2. Dvojnásobek druhého sloupce přičteme k prvnímu sloupci, Ke třetímu sloupci přičteme druhý a od čtvrtého sloupce odečteme druhý sloupec.

$$|A| = \begin{vmatrix} -10 & 5 & -7 & 4 \\ -7 & 3 & -9 & 3 \\ -2 & 1 & -1 & 1 \\ -5 & 5 & -3 & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 5 & -2 & -1 \\ -1 & 3 & -6 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 5 & 5 & 2 & 0 \end{vmatrix} =$$

Rozvineme determinant podle třetího řádku a potom podle posledního sloupce:

$$= (-1)^{(3+2)}1 \begin{vmatrix} 0 & -2 & -1 \\ -1 & -6 & 0 \\ 5 & 2 & 0 \end{vmatrix} = (-1)(-1)(-1)^{(1+3)} \begin{vmatrix} -1 & -6 \\ 5 & 2 \end{vmatrix} = 28$$

3. Rozvineme determinant podle prvního sloupce

$$|A| = 1 \cdot (-1)^{(1+1)} \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -2 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & -1 & 0 & -1 \end{vmatrix}.$$

Rozvineme determinant podle čtvrtého řádku

$$|A| = 2 \cdot (-1)^{(4+3)} \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & -2 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & -1 \end{vmatrix}.$$

První řádek vynásobemý (-1) přičítáme ke druhému řádku

$$|A| = -2 \cdot \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ -1 & 2 & -2 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & -1 \end{vmatrix}.$$

Rozvineme podle druhého řádku

$$|A| = -2 \cdot 2 \cdot (-1)^{(2+4)} \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -2 \\ -1 & 1 & 0 \end{vmatrix}.$$

Třetí řádek přičteme k prvnímu

$$|A| = -4 \cdot \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & -2 \\ -1 & 1 & 0 \end{vmatrix}.$$

A rozvineme podle prvního řádku

$$|A| = -4 \cdot (-1)^{(1+3)} \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = -4 \cdot ((-1) \cdot 1 - (-1) \cdot 2) = -4 \cdot 1 = -4.$$

Hodnota determinantu matice A je rovna -4.

4. První řádek vynásobený (-2) přičteme ke druhému, první řádek vynásobený (-3) přičteme ke třetímu a první řádek vynásobený (-4) přičteme k poslednímu řádku.

$$A \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 & -5 \\ 0 & -1 & -4 & -6 & 12 \\ 0 & 1 & 0 & -8 & 15 \\ 0 & 0 & -10 & -11 & 21 \end{pmatrix}.$$

První a poslední řádek opíšeme, třetí přičteme ke druhému a zapíšeme třetí řádek jako druhý

$$A \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 & -5 \\ 0 & 1 & 0 & -8 & 15 \\ 0 & 0 & -4 & -12 & 27 \\ 0 & 0 & -10 & -11 & 21 \end{pmatrix}.$$

První tři řádky necháme beze změny, poslední řádek násobíme (-4) a přičteme k němu desetinásobek třetího řádku

$$A \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 & -5 \\ 0 & 1 & 0 & -8 & 15 \\ 0 & 0 & -4 & -12 & 27 \\ 0 & 0 & 0 & -76 & 186 \end{pmatrix}.$$

Matice A je převedena na trojúhelníkový tvar, má čtyři nenulové rádky, první čtyři řádky a první čtyři sloupce tvoří nenulový minor řádu 4 (jeho hodnota je 304), hodnost matice A je proto rovna čtyřem.

5. Protože $|A| = -16 + 7 + 84 + 10 = 85$, je matice A regulární a tedy k ní existuje m atice inverzní. Určíme si jednotlivé algebraické doplňky.

$$A_{11} = \begin{vmatrix} -4 & -5 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -3,\ A_{12} = -\begin{vmatrix} 1 & -5 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = -17,\ A_{13} = \begin{vmatrix} 1 & -4 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 13,$$

$$A_{21} = -\begin{vmatrix} 0 & 7 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 7,\ A_{22} = \begin{vmatrix} 2 & 7 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = -17,\ A_{23} = -\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = -2,$$

$$A_{31} = \begin{vmatrix} 0 & 7 \\ -4 & -5 \end{vmatrix} = 28,\ A_{32} = -\begin{vmatrix} 2 & 7 \\ 1 & -5 \end{vmatrix} = 17,\ A_{33} = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -4 \end{vmatrix} = -8.$$

Potom

$$adj\, A = \begin{pmatrix} -3 & 7 & 28 \\ -17 & -17 & 17 \\ 13 & -2 & -8 \end{pmatrix} \quad \text{a} \quad A^{-1} = \frac{1}{85} \begin{pmatrix} -3 & 7 & 28 \\ -17 & -17 & 17 \\ 13 & -2 & -8 \end{pmatrix}.$$

6. $\alpha \neq 1, -2 \ldots \frac{1}{\alpha+2}(1,1,1)$, $\alpha = 1 \ldots (1-s-t, s, t)$, $\alpha = -2 \ldots$ nemá řešení

7. $\alpha \neq 5 \ldots$ nemá řešení, $\alpha = 5 \ldots (-4+s, \frac{11}{2} - 2s, s)$

Maplety

V následujících mapletech si můžete některé studované pojmy přiblížit, případně si sestavit vlastní zadání příkladů.

1. Výpočet determinantu
2. Násobení matic
3. Inverzní matice
4. Rozklad na parciální zlomky
5. Řešení soustav lineárních rovnic přímými metodami
6. Hornerovo schéma
7. Výpočty funkčních hodnot

2 Pravděpodobnost

Průvodce studiem

Se základy teorie pravděpodobností jste se seznámili v předmětu Matematika 3. Protože budeme potřebovat pravděpodobnost v průběhu celeho kurzu, zařadili jsme zde důkladné opakování.

Nejdříve si řekneme co jsou to jevy, ketré budeme studovat, zavedeme si klasickou i axiomatickou pravděpodobnost, ukážeme si použití při výpočtech pravděpodobností.

Potom si nadefinujeme náhodnou veličinu a budeme dále studovat její vlastnosti.

Uvedeme si nejčastěji používaná rozdělění a to jak diskrétní, tak i spojitá. V závěru se seznámíme s limitními větami, které nám mohou dobře posloužit při nahrazení jednoho rozdělení jiným, se ketrým se bude lépe počítat.

Cíle

Po prostudování této kapitoly budete schopni:

- Řešit základní úlohy z pravděpodobnosti.
- Pracovat s náhodnou veličinou a jejími charakteristikami.
- Zvládát základní rozdělení a práci s nimi.
- Pracovat s tabulkami hodnot vybraných náhodných veličin.

2.1 Jevy a jejich vlastnosti

Definice 2.1. Na neprázdné množině B definujme operace $\cap$ (průnik) a $\cup$ (sjednocení), které splňují podmínky:

1.

$$\begin{array}{rll}
\text{a)} & a \cap b = b \cap a, & a \cup b = b \cup a \\
\text{b)} & a \cap a = a, & a \cup a = a \\
\text{c)} & (a \cap b) \cap c = a \cap (b \cap c), & (a \cup b) \cup c = a \cup (b \cup c) \\
\text{d)} & a \cup (a \cap b) = a, & a \cap (a \cup b) = a \\
\text{e)} & a \cup (b \cap c) = (a \cup b) \cap (a \cup c), & a \cap (b \cup c) = (a \cap b) \cup (a \cap c)
\end{array}$$

2. V množině B existuje největší prvek I a nejmenší prvek $\emptyset$, pro které platí:

   a) $a \cap \emptyset = \emptyset, \quad a \cup \emptyset = a$

   b) $a \cap I = a, \quad a \cup I = I$

3. Ke každému prvku $a \in B$ existuje *komplement* $\bar{a}$, pro který platí:

   $a \cap \bar{a} = \emptyset, \quad a \cup \bar{a} = I$

Potom $\mathcal{B} = (B, \cap, \cup, \emptyset, I, \bar{\ })$ nazveme *Booleovou algebrou*

Definice 2.2. *Jevem* nazveme výsledek provedeného pokusu.

Jevy mohou být jisté, náhodné, nemožné. Je to dělení relativní, vždy vztažené na daný soubor podmínek.

Příklad 2.3. Při hodu hrací kostkou bude:

jev jistý	-	padne kladný počet bodů,
jev náhodný	-	počet bodů,
jev nemožný	-	padne záporný počet bodů.

2.2 Definice, základní vlastnosti, příklady

Definice 2.4. Jev B je *následkem* jevu A (jev A je částí jevu B), jestliže při nastoupení jevu A nastupuje vždy i jev B.

Označení: $A \subset B$.

Věta 2.5. *Pro libovolné jevy A, B, C platí:*

1. *$A \subset A$.*

2. *Jestliže $A \subset B, B \subset C$, potom $A \subset C$.*

Příklad 2.6. A - při hodu kostkou padne čtyřka.
B - při hodu kostkou padne sudé číslo,
potom je jev $A \subset B$.

Definice 2.7. Jestliže současně platí $A \subset B$ a $B \subset A$, pak jsou jevy A, B *ekvivalentní* a píšeme $A = B$.

Věta 2.8. *Pro libovolné jevy A, B, C platí:*

1. *$A = A$.*

2. *$A = B$ tehdy a jen tehdy, když $B = A$.*

3. *Jestliže $A = B, B = C$, potom $A = C$.*

Definice 2.9. *Průnik* C jevů A, B se nazývá jev ekvivalentní se současným nastoupením jevů A, B. Značíme $C = A \cap B$.

Věta 2.10. *Pro libovolné jevy A, B, C platí:*

1. $A \cap A = A$.
2. $A \cap B = B \cap A$.
3. $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$.
4. $A \subset B \Rightarrow A \cap B = A$.
5. $(A \cap B) \subset A$.
6. $(A \cap B) \subset B$.
7. *Jestliže* $C \subset A, C \subset B \Rightarrow C \subset (A \cap B)$.

Definice 2.11. *Sjednocením* jevů A, B se nazývá jev C, ekvivalentní s nastoupením alespoň jednoho z jevů A, B. Označení $C = A \cup B$.

Věta 2.12. *Pro libovolné jevy A, B, C platí:*

1. $A \cup A = A$.
2. $A \cup B = B \cup A$.
3. $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$.
4. $A \subset B \Rightarrow A \cup B = B$.
5. $A \subset A \cup B$.
6. $B \subset A \cup B$.
7. $A \subset C, B \subset C \Rightarrow (A \cup B) \subset C$.

Definice 2.13. *Jistým jevem* nazveme jev, kterě za daného systému podmínek musí vždy nastat. Značíme jej I. *Nemožným jevem* nazveme jev, který za daného systému podmínek nastat nemůže. Značíme jej $\emptyset$.

Věta 2.14. *Pro libovolný jev A platí:*

1. $\emptyset \subset A, A \subset I$.
2. $\emptyset \cap A = \emptyset, I \cap A = A$.
3. $\emptyset \cup A = A, I \cup A = I$.

Definice 2.15. *Jevem opačným* k jevu A rozumíme jev ekvivalentn ˇ s tím, že jev A nenastoupí. Označujeme jej $\bar{A}$.

Věta 2.16. *Pro libovolný jev A platí:*

1. $\overline{(\bar{A})} = A.$
2. $A \cup \bar{A} = I, A \cap \bar{A} = \emptyset.$

Věta 2.17. *Pro libovolné jevy A, B platí de Morganovy vzorce:*

1. $\overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B}.$
2. $\overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B}.$

2.3 Elementární jevy

Definice 2.18. *Elementární jevy* jsou takové jevy, různé od jevu $\emptyset$, které se nedají rozložit na další jevy různé od jevu $\emptyset$.
Jev E je elementární, když ze vztahu $E = A \cup B$ plyne $E = A$ nebo $E = B$.
Jestliže máme množinu elementárních jevů $\{E_i, i \in J\}$, pro kterou platí $\bigcup_{i \in J} E_i = I$, pak mluvíme o *úplném systému elementárních jevů.*

Definice 2.19. Jevy A, B se nazývají *disjunktní* (navzájem neslučitelné), nemohou-li nastat současně, tzn. $A \cap B = \emptyset$.

Věta 2.20. *Dva různé elementární jevy jsou navzájem disjunktní.*

Důkaz. Mějme dva různé elementární jevy E_1, E_2. Označme

$$X = E_1 \cap E_2,$$

$$Y = E_1 \cap \bar{E}_2,$$

$$Z = \bar{E}_1 \cap E_2.$$

Potom

$$X \cup Z = E_2,$$

$$X \cup Y = E_1$$

a podle definice 2.18 proto platí, že buď $X = E_1$ a nebo $Y = E_1$.
a) Nechť $Y = E_1$, potom

$$E_1 = E_1 \cap \bar{E}_2,$$

$$X = E_1 \cap E_2,$$

dosazením dostaneme

$$X = (E_1 \cap \bar{E}_2) \cap E_2 = E_1 \cap \emptyset = \emptyset.$$

b) Nechť $X = E_1$, potom

$$E_1 = E_1 \cap E_2 \Rightarrow E_1 \subset E_2.$$

A současně

$$X \cap Z = \emptyset \Rightarrow X = \emptyset.$$

□

2.4 Axiomatická definice pravděpodobnosti

Autorem axiomatické teorie pravděpodobnosti, přijaté dnes na cekém světě, byl sovětský matematik A. N. Kolmogorov. Jeho teorie byla poprvé publikována v roce 1933 a je budována na základě teorie množin a teorie míry.

Věta 2.21. *Nechť M je množina jevů, pro kterou platí:*

1. $A, B \in M \Rightarrow A \cup B \in M, A \cap B \in M,$
2. $\emptyset \in M, I \in M,$
3. $A \in M \Rightarrow \bar{A} \in M.$

Potom $(M, \cup, \cap, \emptyset, I, ^{-})$ *je Booleova algebra.*

Definice 2.22. *σ-algebrou* nazýváme Booleovu algebru jevů v případě, že jevů může být nekonečně mnoho a platí, že ke kažgdé posloupnosti jevů $\{A_1, A_2, \dots\}$ existuje jejich sjednocení $\bigcup_i A_i$ a průnik $\bigcap_i A_i$.

Definice 2.23. Označme M nějakou σ-algebru jevů. *Pravděpodobnost*, že za určité situace nastane jev $A \in M$ vyjadřuje hodnota funkce $p(A)$, která splňuje podmínky:

1. $p(A) \geq 0 \ \forall A \in M,$
2. $p(I) = 1,$
3. pro množinu $\{A_i\}, i \in J$ navzájem disjunktních jevů platí
$$p\left(\bigcup_{i \in J} A_i\right) = \sum_{i \in J} p(A_i).$$

Dvojici (M, p) budeme nazývat *pravděpodobnostním prostorem.*

Věta 2.24. *Nechť (M, p) je pravděpodobnostní prostor. Potom platí:*

1. *Jestliže* $A, B \in M, A \cap B = \emptyset \Rightarrow p(A \cup B) = p(A) + p(B).$
2. $p(\emptyset) = 0.$
3. $p(A) \leq 1.$
4. $p(A) = 1 - p(\bar{A}).$
5. $p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B),$
6. *Jestliže je* $A \subset B$*, potom* $p(A) \leq p(B).$

2.5 Klasická pravděpodobnost

Věta 2.25. *Nechť (M, p) je pravděpodobnostní prostor, M je konečná σ-algebra, která obsahuje n elementárních jevů, tvořících úplný systém elementárních jevů*

$$\{E_i, i = 1, \ldots, n\} \textit{ takově, §e } p(E_1) = p(E_2) = \cdots = p(E_n) = \frac{1}{n}.$$

Nechť jev $A \in M$ lze rozložit na m navzájem různých elementárních jevů. Potom platí

$$p(A) = \frac{m}{n}.$$

Věta 2.26. *Věta o geometrické pravděpodobnosti.*
Nechť (M, p) je pravděpodobnostní prostor. Nechť σ-algebra jevů je systém podmnožin A množiny I, které mají míru $\|A\|$. Potom

$$p(A) = \frac{\|A\|}{\|I\|}.$$

2.6 Podmíněná pravděpodobnost

Definice 2.27. Nechť (M, p) je pravděpodobnostní prostor. Nechť nastoupil jev $B \in M, p(B) \neq$ $= 0$. *Podmíněnou pravděpodobností* jevu $A \in M$ za předpokladu, že jev B nastal nazveme výraz

$$p_B(A) = \frac{p(A \cap B)}{p(B)}.$$

Věta 2.28. *Vlastnosti podmíněné pravděpodobnosti.*

1. $p_B(\emptyset) = 0$.
2. $p_B(B) = 1$.
3. $A \in M, A \cap B = \emptyset \Rightarrow p_B(A) = 0$.
4. $A \in M, B \subset A \Rightarrow p_B(A) = 1$.
5. $A \in M, B \subset A \Rightarrow p_A(B) = \frac{p(B)}{p(A)}$, *kde* $p_A(B) = \frac{p(A \cap B)}{p(A)}$.
6. $p_I(A) = p(A)$.

Věta 2.29. *Nechť (M, p) je pravděpodobnostní prostor, $A, B \in M$. Potom pro pravděpodobnost průniku jevů A, B platí*

$$p(A \cap B) = p_B(A) \cdot p(B).$$

Věta 2.30. *Nechť (M, p) je pravděpodobnostní prostor, $A, B \in M, p(A) \neq 0, p(B) \neq 0$. Potom platí*

$$p_B(A) \cdot p(B) = p_A(B) \cdot p(A).$$

Věta 2.31. *Nechť $M, p)$ je pravděpodobnostní prostor, $A_i \in M, i = 1, \ldots, n$. Pro výpočet pravděpodobnosti současného nastoupení n jevů platí*

$$p(A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n) = p(A_1) \cdot p_{A_1}(A_2) \cdot p_{A_1 \cap A_2}(A_3) \ldots p_{A_1 \cap \ldots \cap A_{n-1}}(A_n).$$

2.7 Nezávislé jevy

Definice 2.32. Nechť (M, p) je pravděpodobnostní prostor. Jevy $A, B \in M$ jsou *nezávislé*, jestliže platí aspoň jedna z podmínek:

1. $p(B) = 0$ nebo $p_B(A) = p(A)$,
2. $p(A) = 0$ nebo $p_A(B) = p(B)$,

Podmínky 1. a 2. definice 2.32 jsou ekvivalentní. Při důkazech stačí proto prověřit platnost jen jedné z nich.

Věta 2.33. *Jevy $A, B \in M$ jsou nezávislé, právě tehdy, když platí*

$$p(A \cap B) = p(A)p(B). \tag{2.1}$$

Důkaz.
a) Nechť platí vztah (2.1).
Potom je-li $p(B) = 0$, jsou podle definice 2.32 jevy A, B nezávislé.
Je-li $p(B) \neq 0$, potom

$$p_B(A) = \frac{p(A \cap B)}{p(B)} = \frac{p(A)p(B)}{p(B)} = p(A).$$

a podle definice 2.32 jsou jevy A, B nezávislé.
b) Nechť jsou jevy A, B nezávislé, potom je-li $p(B) = 0$ vztah (2.1) platí. Je-li $p(B) \neq 0$, potom

$$p(A) = p_B(A) = \frac{p(A \cap B)}{p(B)} \Rightarrow p(A \cap B) = p(A)p(B).$$

I v tomto případě vztah (2.1) platí. □

Definice 2.34. Nechť (M, p) je pravděpodobnostní prostor, $M_1 \subset M$. Jevy množiny M_1 jsou *navzájem nezávislé*, jestliže pro každý jev $A \in M_1$ platí, že je nezávislý na libovolném jevu podmnožiny $M_2 \subset \{M_1 \setminus \{A\}\} = M_1 \cap \bar{A}_1$.

Věta 2.35. *Nechť (M, p) je pravděpodobnostní prostor, $A_i \in M, i = 1, \ldots, n$. Jestliže jevy množiny $\{A_1, \ldots, A_n\}$ jsou navzájem nezávislé, potom*

$$p(A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n) = p(A_1)p(A_2) \ldots p(A_n).$$

Příklad 2.36. Házíme dvěma kostkami. Jev A_1 - padne liché číslo na první kostce, jev A_2 - padne liché číslo na druhé kostce, jev A_3 - součet na obou kostkách je sudé. Určete pravděpodobnosti jevů A_1, A_2, A_3 a jejich nezávislost.

Řešení.

$$p(A_1) = \frac{1}{2}, \quad p(A_2) = \frac{1}{2}, \quad p(A_3) = \frac{1}{2}.$$

$$p_{A_2}A_1 = \frac{p(A_1 \cap A_2)}{p(A_2)} = \frac{\frac{9}{36}}{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} = p(A_1).$$

Jevy A_1, A_2 jsou nezávislé.

$$p_{A_3}A_1 = \frac{p(A_1 \cap A_3)}{p(A_3)} = \frac{\frac{9}{36}}{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} = p(A_1).$$

Jevy A_1, A_3 jsou nezávislé.

$$p_{A_1 \cap A_2}A_3 = 1 \neq p(A_3).$$

Jevy A_1, A_2, A_3 jsou závislé. □

Věta 2.37. *Nechť (M, p) je pravděpodobnostní prostor. Pro každý jev $A \in M$ platí*

1. *$\emptyset, A$ jsou nezávislé jevy,*
2. *I, A jsou nezávislé jevy.*

Věta 2.38. *Jevy $A, B \in M$ jsou nezávislé, jsou-li nezávislé jevy $A, \bar{B}$ či $\bar{A}, B$ či $\bar{A}, \bar{B}$.*

2.8 Úplná pravděpodobnost

Věta 2.39. *O úplné pravděpodobnosti.*
Nechť (M, p) je pravděpodobnostní prostor a $\{B_1, \ldots, B_n\}$ je úplný systém navzájem disjunktních jevů ze σ-algebry M, pro které platí $p(B_j) \neq 0, j = 1, \ldots, n$. Potom pro libovolný jev $A \in M$ platí

$$p(A) = \sum_{j=1}^{n} p_{B_j}(A) \cdot p(B_j).$$

Příklad 2.40. Máme n klobouků a v každém je a bílých a b černých kuliček. Z prvního klobouku náhodně vyjmeme jednu kuličku a přendáme ji do druhého, poté z druhého klobouku přendáme jednu kuličku do třetího, atd., z $n-1$ klobouku přendáme jednu kuličku do posledního klobouku. Z posledního klobouku vyjmeme jednu kuličku. Určete pravděpodobnost, že bude bílá.

Řešení. Pravděpodobnost vytažení bílé kuličky z prvního klobouku je

$$p(B1) = \frac{a}{a+b}.$$

Pravděpodobnost vytažení bílé kuličky z druhého klobouku je podle věty 2.39 o úplné pravděpodobnosti

$$p(B2) = \left(\frac{a+1}{a+b+1}\right)\left(\frac{a}{a+b}\right) + \left(\frac{a}{a+b+1}\right)\left(\frac{b}{a+b}\right) =$$

$$\left(\frac{a}{a+b}\right)\left(\frac{a+1}{a+b+1}+\frac{b}{a+b+1}\right)=\frac{a}{a+b}.$$

Máme tedy $p(B1) = p(B2)$. Pokračujeme dále po indukci a dostaneme

$$p(B1) = p(B2) = \cdots = p(Bn).$$

□

2.9 Bayesova věta

Věta 2.41. *Bayesova věta.*
Nechť (M, p) je pravděpodobnostní prostor a $\{B_1, \ldots, B_n\}$ je úplný systém navzájem disjunktních jevů ze σ-algebry M, pro které platí $p(B_j) \neq 0, j = 1, \ldots, n$. Potom pro libovolný jev $A \in M$, pro kterě platí $p(A) \neq 0$, platí Bayesův vzorec pro $k = 1, \ldots, n$

$$p_A(B_k) = \frac{p_{B_k}(A) \cdot p(B_k)}{\sum\limits_{j=1}^{n} p_{B_j}(A) \cdot p(B_j)}.$$

Příklad 2.42. Ve skupině 10 studentů, kteří se dostavili ke zkoušce, jsou 3 připraveni výborně, 4 dobře , 2 průměrně a 1 špatně. Materiál ke zkoušce obsahuje 20 otázek. Výborně připravený student odpoví na všechny otázky, dobře připravený na 16, průměrně připravený na 10 a špatně připravený na 5. Náhodně vybraný student odpověděl správně na všechny tři náhodn zadané otázky. Určete pravděpodobnost, že šlo o špatně připraveného studenta.

Řešení. Použijeme Bayesův vzorec. Jev A – student odpověděl na všechny tři zadané otázky. Úplný systém disjunktních jevů je
H_1 – výborně připravený student,
H_2 – dobře připravený student,
H_3 – průměrně připravený student,
H_4 – špatně připravený student.

$$p_{H_1}(A) = 1,$$

$$p_{H_2}(A) = \frac{16}{20}\frac{15}{19}\frac{14}{18} \doteq 0.491,$$

$$p_{H_3}(A) = \frac{10}{20}\frac{9}{19}\frac{8}{18} \doteq 0.105,$$

$$p_{H_4}(A) = \frac{5}{20}\frac{4}{19}\frac{3}{18} \doteq 0.009.$$

$$p_A(H_4) = \frac{p_{H_4}(A)p(H_4)}{\sum_{j=1}^{4} p_{H_j}(A)p(H_j)} \doteq 0.002.$$

□

2.10 Opakované pokusy

Věta 2.43. *Bernoulliova posloupnost nezávislých pokusů.*
Provedeme n po sobě jdoucích pokusů, přičemž při každém pokusu může nebo nemusí nastat jev A. Nechť jsou výsledky pokusů na sobě nazávislé a nechť dále v každém z pokusů platí, že $p(A) = p, p(\bar{A}) = q = 1 - p$, neboli pravděpodobnost nastoupení jevu A je v kkaždém pokusu stále stejná. Potom pravděpodobnost, že jev A nastane během n pokusů právě k-krát, $k \leq n$ je rovna

$$b(n, p, k) = \binom{n}{k} p^k q^{n-k}.$$

Věta 2.44. *Věta o závislých pokusech*
Nechť je dán soubor N prvků, z nichž M vykazuje sledovaný znak a $N - M$ prvků tento znak nemá. Vybereme postupně náhodně n prvků, z nichž žádný nevracíme zpět. Pravděpodobnost toho, že vybereme právě k prvků majících sledovaný znak a $n - k$ prvků, které tento znak nemají (jev A) je rovna

$$p(A) = \frac{\binom{M}{k}\binom{N-M}{n-k}}{\binom{N}{n}}.$$

2.11 Náhodná veličina

Věta 2.45. *Nechť U je σ-algebra číselných množin, generovan intervaly $(-\infty, a), a \in \mathbb{R}$. Potom platí:*

1. $\langle a, +\infty) \in U \ \forall a \in \mathbb{R}$,
2. $(a, +\infty) \in U, \ (-\infty, a\rangle \in U$,
3. $\langle a, b\rangle \in U, \ (a, b) \in U$,
4. $\{x\} \in U \ \forall x \in \mathbb{R}$.

Definice 2.46. *Náhodná veličina* $\mathbb{X}$ je reálná funkce $\mathbb{X}(\omega)$ definovaná na pravděpodobnostním prostoru $(M, p), \omega \in M$, taková, že pro každé $x \in \mathbb{R}$ je množina

$$\{\omega \in M | \mathbb{X}(\omega) < x\}$$

náhodněm jevem. T.j. hodnota náhodné veličiny je jednoznačně určena pokusem a $\forall x \in \mathbb{R}$ můžeme určit pravděpodobnost $p = p(\mathbb{X} < x)$.

2.12 Distribuční funkce

Definice 2.47. Nechť $\mathbb{X}$ je náhodná veličina definovaná na (U, p). Funkci $F(x)$ definovanou vztahem

$$F(x) = p(\mathbb{X} \in (-\infty, x)) = p(\mathbb{X} < x)$$

nazveme *distribuční funkcí* náhodné veličiny $\mathbb{X}$.

Věta 2.48. *Vlastnosti distribuční funkce:*
Nechť $F(x)$ je distribuční funkce. Potom pro všechna $x \in \mathbb{R}$ platí:

1. $0 \leq F(x) \leq 1$.
2. *$F(x)$ je neklesající funkce.*
3. *$F(x)$ je spojitá zleva* $(\lim_{h \to 0^-} F(x+h) = F(x)$.
4. $\lim_{x \to -\infty} F(x) = 0$. $\lim_{x \to +\infty} F(x) = 1$.
5. $p(\mathbb{X} = x) = \lim_{h \to 0^+} F(x+h) - F(x)$.
6. $p(x_1 \leq \mathbb{X} < x_2) = F(x_2) - F(x_1)$.

2.13 Diskrétní a spojitá náhodná veličina

Definice 2.49. Nechť $F(x)$ je stupňovitá funkce, tzn. že existuje posloupnost $\{x_n\}, n = 1, 2, \ldots$ taková, že na intervalech $(x_i, x_{i+1}]$ je $F(x)$ konstantní. Potom se $\mathbb{X}$ nazývá *diskrétní* náhodnou veličinou.
Nechť $F(x)$ je spojitá a po částech hladká na množině $\mathbb{R}$. Potom se $\mathbb{X}$ nazývá *spojitou* náhodnou veličinou.

Důsledek 2.50. *V bodě x, kde je $F(x)$ spojitá platí $p(\mathbb{X} = x) = 0$.*

Věta 2.51. *Nechť je dána funkce $F(x)$ definovaná na $\mathbb{R}$. Splňuje-li $F(x)$ podmínky $1-4$ věty 2.48, pak existuje náhodná veličina $\mathbb{X}$, definovaná na (U, p) s distribuční funkcí $F(x)$.*

2.14 Vlastnosti náhodné veličiny

Definice 2.52. Nechť $\mathbb{X}$ je diskrétní náhodná veličina nabývající hodnot z konečné a nebo spočetné číselné množiny S (množina S je množina bodů nespojitosti distribuční funkce $F(x)$). Na množině S definujeme funkci $f(x_i)$ vztahem

$$f(x_i) = p(\mathbb{X} = x_i), \ \forall x_i \in S.$$

Potom funkci $f(x)$ nazveme *frekvenční funkcí* náhodné veličiny $\mathbb{X}$.

Věta 2.53. *Pro distribuční funkci $F(x)$ diskrétní náhodné veličiny $\mathbb{X}$ nabývající hodnot z množiny S a frekvenční funkci $f(x_i)$ platí*

$$F(x) = \sum_{x_i \in S,\, x_i < x} f(x_i).$$

Věta 2.54. *Pro frekvenční funkci $f(x)$ diskrétní náhodné veličiny $\mathbb{X}$ nabývající hodnot z množiny S platí*

$$\sum_{x_i \in S} f(x_i) = 1.$$

Příklad 2.55. Sestavte frekvenční funkci pro Bernoulliovu posloupnost nezávislých jevů pro $n = 5$ a $p = 0.2$.

Řešení. Podle věty 2.43 máme

$$b(n,p,k) = \binom{n}{k} p^k q^{n-k}.$$

Po dosazení dostaneme

k	0	1	2	3	4	5
$f(k)$	0.32768	0.40960	0.20480	0.05120	0.00640	0.00032

Tím máme určenou hledanou frekvenční funkci. □

Definice 2.56. Nechť $\mathbb{X}$ je spojitá náhodná veličina s distribuční funkcí $F(x)$. *Funkcí hustoty pravděpodobnosti* náhodné veličiny $\mathbb{X}$ nazveme reálnou funkci $f(x)$ pro kterou platí:

1. $f(x) \geq 0 \ \forall x \in \mathbb{R}$,
2. $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$,
3. $F(x) = \int\limits_{-\infty}^{x} f(t)dt$.

Důsledek 2.57. *1. V bodě x, kde je $F(x)$ spojitá, platí $f(x) = F'(x)$.*

2. Funkce hustoty $f(x)$ je buď spojitá a nebo po částech spojitá.

3. Platí $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = 0$.

Příklad 2.58. Máme zadanou funkci

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a}, & x \in <a,b>, \\ 0, & \text{jinak.} \end{cases}$$

Ověřte, že se jedná o funkci hustoty některé náhodné veličiny a určete její distribuční funkci.

Řešení.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int_a^b \frac{1}{b-a}dx = \frac{1}{b-a}x\Big|_a^b = \frac{1}{b-a}(b-a) = 1.$$

Protože funkce $f(x)$ je nezáporná, jedná se o funkci hustoty.

Pro distribuční funkci platí

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt.$$

Po integraci dostaneme

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < a, \\ \dfrac{x-a}{b-a}, & a \leq x \leq b, \\ 1, & x > b. \end{cases}$$

□

Věta 2.59. *Pro spojitou náhodnou veličinu $\mathbb{X}$ s distribuční funkcí $F(x)$ a pro libovolná reálná čísla $x_1, x_2, x_1 < x_2$ platí*

$$p(x_1 < \mathbb{X} < x_2) = p(x_1 \leq \mathbb{X} \leq x_2) = p(x_1 < \mathbb{X} \leq x_2) = p(x_1 \leq \mathbb{X} < x_2) = F(x_2) - F(x_1).$$

Věta 2.60. *Pro spojitou náhodnou veličinu $\mathbb{X}$ s funkcí hustoty $f(x)$ a pro libovolná reálná čísla $x_1, x_2, x_1 < x_2$ platí*

$$p(x_1 \leq \mathbb{X} \leq x_2) = \int_{x_1}^{x_2} f(t)dt.$$

Důsledek 2.61. *Funkce hustoty $f(x)$ je buď spojitá a nebo po částech spojitá funkce. Dále platí* $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 0$, $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$.

2.15 Vícerozměrná náhodná veličina

Definice 2.62. Nechť $\mathbb{X}_1, \mathbb{X}_2, \ldots, \mathbb{X}_n$ jsou náhodné veličiny definované na pravděpodobnostních prostorech $(U_1, p_1), (U_2, p_2), \ldots, (U_n, p_n)$. Nechť všechny veličiny jsou stejného typu (buď diskrétní a nebo spojité). Potom n-tici $(\mathbb{X}_1, \mathbb{X}_2, \ldots, \mathbb{X}_n)$ nazveme *n-rozměrnou náhodnou veličinou.*

V případě $n = 2$ dostaneme dvourozměrnou náhodnou veličinu, kterou budeme označovat jako dvojici $(\mathbb{X}, \mathbb{Y})$.

Definice 2.63. Nechť $(\mathbb{X}, \mathbb{Y})$ je dvourozměrná náhodná veličina. *Simultání distribuční funkcí* $F(x, y)$ budeme nazývat funkci definovanou vztahem

$$F(x, y) = p(\mathbb{X} < x \wedge \mathbb{Y} < y).$$

Věta 2.64. *Simultání distribuční funkce $F(x, y)$ dvourozměrné náhodné veličiny $(\mathbb{X}, \mathbb{Y})$ má následující vlastnosti:*

1. $0 \leq F(x, y) \leq 1$,
2. *jestliže* $x_1 \leq x_2, y_1 \leq y_2$, *potom* $F(x_1, y_1) \leq F(x_2, y_2)$,
3. $\lim\limits_{x \to x_0^-, y \to y_0^-} F(x, y) = F(x_0, y_0)$,
4. $\lim\limits_{x \to -\infty} F(x, y) = \lim\limits_{y \to -\infty} F(x, y) = \lim\limits_{x \to -\infty, y \to -\infty} F(x, y) = 0$,
5. $\lim\limits_{x \to +\infty, y \to +\infty} F(x, y) = 1$.

Definice 2.65. Jsou-li u dvourozměrné náhodné veličiny $(\mathbb{X}, \mathbb{Y})$ obě veličiny $\mathbb{X}$ i $\mathbb{Y}$ diskrétní, pak hovoříme o diskrétní dvourozměrné náhodné veličině, která nabývá nejvýše spočetně mnoha hodnot tvořících množinu T. Na T definujeme *simultání frekvenční funkci*

$$f(x_i, y_j) = p(\mathbb{X} = x_i, \mathbb{Y} = y_j).$$

Věta 2.66. *Pro dvourozměrnou diskrétní náhodnou veličinu platí*

$$F(x, y) = \sum_{x_i < x, y_j < y} f(x_i, y_j),$$

$$\sum_{(x_i, y_j) \in T} f(x_i, y_j) = 1.$$

Definice 2.67. Jsou-li u dvourozměrné náhodné veličiny $(\mathbb{X}, \mathbb{Y})$ obě veličiny $\mathbb{X}$ i $\mathbb{Y}$ spojité, pak hovoříme o spojité dvourozměrné náhodné veličině. *Simultání funkce hustoty* $f(x, y)$ je funkce pro kterou platí

1. $f(x, y) \geq 0 \; \forall x, y \in \mathbb{R}$,
2. $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dx dy = 1$,
3. $F(x, y) = \int\limits_{-\infty}^{y} \left(\int\limits_{-\infty}^{x} f(u, v) du \right) dv$.

Věta 2.68. *Pro dvourozměrnou spojitou náhodnou veličinu platí*

1. $p(\mathbb{X} = x, \mathbb{Y} = y) = 0 \; \forall x, y \in \mathbb{R}$,
2. *V bodech spojitosti funkce hustoty je* $f(x, y) = \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} F(x, y)$.

2.16 Marginální rozložení

Věta 2.69. *Mějme dvourozměrnou náhodnou veličinu* $(\mathbb{X}, \mathbb{Y})$*. Každá z veličin* $\mathbb{X}, \mathbb{Y}$ *má svoje rozdělení. Nechť* $\mathbb{X}$ *má distribuční funkci* $F_1(x)$*,* $\mathbb{Y}$ *má distribuční funkci* $F_2(y)$ *a* $(\mathbb{X}, \mathbb{Y})$ *má simultání distribuční funkci* $F(x, y)$*.Pak platí*

1. $p(\mathbb{X} < x) = p(\mathbb{X} < x, \mathbb{Y} \in (-\infty, +\infty))$,
2. $p(\mathbb{Y} < y) = p(\mathbb{X} \in (-\infty, +\infty), \mathbb{Y} < y)$,
3. $F_1(x) = \lim\limits_{y \to +\infty} F(x, y)$,
4. $F_2(y) = \lim\limits_{x \to +\infty} F(x, y)$.

Definice 2.70. Distribuční funkce $F_1(x), F_2(y)$ se nazývají *marginální* (okrajové) distribuční funkce.

Definice 2.71. Pro diskrétní dvourozměrnou náhodnou veličinu $(\mathbb{X}, \mathbb{Y})$ se simultání frekvenční funkcí $f(x_i, y_j)$ definujeme *marginální* (okrajové) frekvenční funkce $f_1(x_i)$, $f_2(y_j)$ následovně: Nechť $\mathbb{X}$ nabývá hodnot z množiny T_1, $\mathbb{Y}$ nabývá hodnot z množiny T_2, potom

$$f_1(x_i) = \sum_{y_j \in T_2} f(x_i, y_j), \;\; f_2(y_j) = \sum_{x_i \in T_1} f(x_i, y_j).$$

Pro spojitou dvourozměrnou náhodnou veličinu $(\mathbb{X}, \mathbb{Y})$ se simultání funkcí hustoty $f(x, y)$ definujeme *marginální* (okrajové) funkce hustoty $f_1(x), f_2(y)$ následovně:

$$f_1(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dy,$$

$$f_2(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dx.$$

2.17 Nezávislé náhodné veličiny

Definice 2.72. Nechť $\mathbb{X}$ je náhodná veličina definovaná na pravděpodobnostním prostoru (U, p_1), $\mathbb{Y}$ je náhodná veličina definovaná na pravděpodobnostním prostoru (U, p_2). Jestliže pro všechny množiny $A, B \in U$ jsou jevy $\mathbb{X} \in A, \mathbb{Y} \in B$ navzájem nezávislé (t.j. platí $p(\mathbb{X} \in A, \mathbb{Y} \in B) = p_1(\mathbb{X} \in A) \cdot p_2(\mathbb{Y} \in B)$), pak nazýváme $\mathbb{X}, \mathbb{Y}$ *nezávislými náhodnými veličinami.*

Věta 2.73. *Nechť $(\mathbb{X}, \mathbb{Y})$ je dvourozměrná náhodná veličina se simultání distribuční funkcč $F(x, y)$. Nechť $F_1(x), F_2(y)$ jsou marginální distribuční funkce. Potom $\mathbb{X}, \mathbb{Y}$ jsou nezávislé náhodné veličiny právě tehdy, když*

$$F(x, y) = F_1(x) \cdot F_2(y).$$

Věta 2.74. *Nechť $(\mathbb{X}, \mathbb{Y})$ je diskrétní dvourozměrná náhodná veličina se simultání frekvenční funkcí $f(x_i, y_j)$. Nechť $f_1(x_i), f_2(y_j)$ jsou marginální frekvenční funkce. Potom $\mathbb{X}, \mathbb{Y}$ jsou nezávislé náhodné veličiny právě tehdy, když*

$$f(x_i, y_j) = f_1(x_i) \cdot f_2(y_j).$$

Věta 2.75. *Nechť $(\mathbb{X}, \mathbb{Y})$ je spojitá dvourozměrná náhodná veličina se simultání funkcí hustoty $f(x, y)$. Nechť $f_1(x), f_2(y)$ jsou marginální funkce hustoty. Potom $\mathbb{X}, \mathbb{Y}$ jsou nezávislé náhodné veličiny právě tehdy, když*

$$f(x, y) = f_1(x) \cdot f_2(y).$$

Důkaz.
a) Nechť $\mathbb{X}, \mathbb{Y}$ jsou nezávislé náhodné veličiny, potom platí $F(x, y) = F_1(x) F_2(y)$.

$$f(x, y) = \frac{\partial^2 F(x, y)}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 (F_1(x) F_2(y))}{\partial x \partial y} = \frac{\partial F_1(x)}{\partial x} \frac{\partial F_2(y)}{\partial y} = f_1(x) f_2(y).$$

b) Platí-li $f(x,y) = f_1(x)f_2(y)$, potom

$$F(x,y) = \int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y} f(x,y)dxdy = \int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y} f_1(x)f_2(y)dxdy =$$

$$\int_{-\infty}^{x} f_1(x)dx \int_{-\infty}^{y} f_2(y)dy = F_1(x)F_2(y).$$

Veličiny $\mathbb{X}, \mathbb{Y}$ jsou nezávislé. □

Příklad 2.76. Nechť $(\mathbb{X}, \mathbb{Y})$ je spojitá náhodná veličina se simultání funkcí hustoty

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{4}, & x \in< -1, 1 >, y \in< -1, 1 >, \\ 0, & \text{jinak.} \end{cases}$$

Rozhodněte, zda jsou $(\mathbb{X}, \mathbb{Y})$ nezávislé.

Řešení. Pro marginální funkce hustoty platí

$$f_1(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dy, f_2(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dx.$$

Po integraci dostaneme

$$f_1(x) = \begin{cases} 0, & x < -1, \\ \frac{1}{2}, & x \in< -1, 1 >, \\ 0, & x > 1. \end{cases}$$

Analogicky pro druhou proměnnou dostaneme

$$f_2(y) = \begin{cases} 0, & y < -1, \\ \frac{1}{2}, & y \in< -1, 1 >, \\ 0, & y > 1. \end{cases}$$

Takže platí $f(x,y) = f_1(x)f_2(y)$ a podle věty 2.75 jsou $\mathbb{X}, \mathbb{Y}$ nezávislé. □

2.18 Transformace náhodných veličin

Definice 2.77. Mějme pravděpodobnostní prostor (U, p). Nechť $y = y(x)$ je funkce definovan na $(-\infty, +\infty)$ přiřazující každé množině $A \in U$ množinu $B = \{x | y(x) \in A\}$, pro kterou platí $B \in U$. Nechť $\mathbb{X}$ je náhodná veličina. Funkcí náhodné veličiny $\mathbb{X}$ rozumíme náhodnou veličinu $\mathbb{Y} = y(\mathbb{X})$, která nabývá hodnoty y právě když náhodná veličina $\mathbb{X}$ nabude takové hodnoty x, že platí $y = y(x)$. Pro libovolnou množinu $A \in U$ a $B = \{x | y(x) \in A\}$ platí

$$p(\mathbb{Y} \in A) = p(\mathbb{X} \in B).$$

Věta 2.78. *Nechť $\mathbb{Y} = y(\mathbb{X})$ je fukce náhodné veličiny $\mathbb{X}$. Nechť náhodná veličina $\mathbb{Y}$ má distribuční funkci $G(y)$. Potom platí*

$$G(y_0) = p(\mathbb{Y} < y_0) = p(\mathbb{X} \in \{x | y(x) < y_0\}).$$

Příklad 2.79. Nechť náhodná veličina $\mathbb{X}$ má distribuční funkci $F(x)$. Určete distribuční funkci náhodné veličiny $\mathbb{Y} = \mathbb{X}^2$.

Řešení. Postupujeme přesně podle předchozí věty.
1) Nechť $y_0 \leq 0$. Potom $\{x|x^2 < y_0\} = \emptyset$, a proto

$$G(y_0) = p(\mathbb{Y} < y_0) = p(\mathbb{X} \in \{x|x^2 < y_0 \leq 0\}) = 0.$$

2) Nechť $y_0 > 0$. Potom $\{x|x^2 < y_0\} = (-\sqrt{y_0}, \sqrt{y_0})$ a tedy

$$G(y_0) = p(\mathbb{Y} < y_0) = p(-\sqrt{y_0} < \mathbb{X} < \sqrt{y_0}) = F(\sqrt{y_0}) - F(-\sqrt{y_0}).$$

Proto

$$G(y) = \begin{cases} 0, & y \leq 0, \\ F(\sqrt{y}) - F(-\sqrt{y}), & y > 0. \end{cases}$$

□

Věta 2.80. *Nechť $g(x)$ je monotonně rostoucí funkce. Jestliže $\mathbb{X}$ je náhodná veličina s distribuční funkcí $F(x)$. Potom $\mathbb{Y} = g(\mathbb{X})$ je náhodná veličina s distribuční funkcí*

$$G(y) = F(g^{-1}(y)).$$

Věta 2.81. *Nechť $g(x)$ je monotonně klesající funkce. Jestliže $\mathbb{X}$ je náhodná veličina s distribuční funkcí $F(x)$. Potom $\mathbb{Y} = g(\mathbb{X})$ je náhodná veličina s distribuční funkcí*

$$G(y) = 1 - F(g^{-1}(y)).$$

Věta 2.82. *Nechť $g(x)$ je ryze monotonní funkce. Jestliže $\mathbb{X}$ je náhodná veličina s distribuční funkcí $F(x)$ a funkcí hustoty $f(x)$. Potom $\mathbb{Y} = g(\mathbb{X})$ je náhodná veličina s funkcí hustoty*

$$h(y) = f\left(g^{-1}(y)\right) \left| \frac{d}{dy}(g^{-1}(y)) \right|.$$

Důsledek 2.83.

$$y = ax + b, a \neq 0 \Rightarrow g(y) = \frac{1}{|a|} f\left(\frac{y-b}{a}\right).$$

2.19 Charakteristiky náhodných veličin

Definice 2.84. Nechť $\mathbb{X}$ je diskrétní náhodná veličina s frekvenční funkcí $f(x_i)$ definovaná na množině S. *Obecným momentem k-tého řádu* $m_k(\mathbb{X})$ náhodné veličiny $\mathbb{X}$ nazveme

$$m_k(\mathbb{X}) = \sum_{x_i \in S} x_i^k f(x_i), \quad k = 1, 2, \ldots.$$

Definice 2.85. Nechť $\mathbb{X}$ je spojitá náhodná veličina s funkcí hustoty $f(x)$. *Obecným momentem k-tého řádu* $m_k(\mathbb{X})$ náhodné veličiny $\mathbb{X}$ nazveme

$$m_k(\mathbb{X}) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^k f(x) dx, \quad k = 1, 2, \ldots,$$

pokud integrál vpravo existuje.

Definice 2.86. *Střední hodnotou* náhodné veličiny $\mathbb{X}$ nazveme číslo $E(\mathbb{X}) = m_1(\mathbb{X})$.

Důsledek 2.87. *Aritmetický průměr je speciálním případem střední hodnoty v případě, že* $f(x_i) = c > 0, \forall i$.

Důkaz. Mějme diskrétní náhodnou veličinu $\mathbb{X}$ s frekvenční funkcí $f(x_i) = \frac{1}{n}, i = 1, 2, \ldots, n$ Potom střední hodnota $E(\mathbb{X})$ je

$$E(\mathbb{X}) = \sum_{i=1}^{n} x_i \frac{1}{n} = \frac{1}{n}(x_1 + x_2 + \cdots + x_n) = \bar{x}.$$

□

Definice 2.88. Nechť $\mathbb{X}$ je diskrétní náhodná veličina s frekvenční funkcí $f(x_i)$ definovaná na množině S. *Centrálním momentem k-tého řádu* $M_k(\mathbb{X})$ náhodné veličiny $\mathbb{X}$ nazveme

$$M_k(\mathbb{X}) = \sum_{x_i \in S} (x_i - E(\mathbb{X}))^k f(x_i), \;\; k = 1, 2, \ldots.$$

Definice 2.89. Nechť $\mathbb{X}$ je spojitá náhodná veličina s funkcí hustoty $f(x)$. *Centrálním momentem k-tého řádu* $M_k(\mathbb{X})$ náhodné veličiny $\mathbb{X}$ nazveme

$$M_k(\mathbb{X}) = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - E(\mathbb{X}))^k f(x) dx, \;\; k = 1, 2, \ldots,$$

pokud integrál vpravo existuje.

Důsledek 2.90. *Pro libovolnou náhodnou veličinu $\mathbb{X}$ platí* $M_1(\mathbb{X}) = 0$

Důkaz.

$$M_1(\mathbb{X}) = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - E(\mathbb{X})) f(x) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} (x f(x) - E(\mathbb{X}) f(x)) \, dx =$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx - E(\mathbb{X}) \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = E(\mathbb{X}) - E(\mathbb{X}) = 0.$$

□

Definice 2.91. *Rozptylem* (disperzí) náhodné veličiny $\mathbb{X}$ nazveme číslo $D(\mathbb{X}) = M_2(\mathbb{X})$.

Věta 2.92. *Nechť $\mathbb{X}$ je náhodná veličina. Potom pro náhodnou veličinu $\mathbb{Y} = a\mathbb{X} + b, a \neq 0$ platí*

$$E(\mathbb{Y}) = aE(\mathbb{X}) + b,$$

$$D(\mathbb{Y}) = a^2 D(\mathbb{X}).$$

Důkaz. Podle důsledku 2.83 věty 2.82 platí

$$y = ax + b, a \neq 0 \Rightarrow g(y) = \frac{1}{|a|} f\left(\frac{y - b}{a}\right).$$

Dále
$$E(\mathbb{Y}) = \int_{-\infty}^{+\infty} yg(y)dy = \int_{-\infty}^{+\infty} y\frac{1}{|a|}f\left(\frac{y-b}{a}\right)dy = (*).$$
Zavedeme si substituci
$$y = ax + b,$$
$$dy = adx.$$
Pro $a > 0$ zůstavají hranice beze změny, pro $a < 0$ se změní na opačné.
$$(*) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{ax+b}{|a|} f(x)|a|dx = \int_{-\infty}^{+\infty} (axf(x) + bf(x))\, dx = aE(\mathbb{X}) + b.$$
Pro rozptyl máme analogicky
$$D(\mathbb{Y}) = \int_{-\infty}^{+\infty} (\mathbb{Y} - E(\mathbb{Y}))^2 g(y)dy = \int_{-\infty}^{+\infty} (ax + b - aE(\mathbb{X}) - b)^2 \frac{1}{|a|} f(x)|a|dx =$$
$$\int_{-\infty}^{+\infty} a^2 (x - E(\mathbb{X}))^2 f(x)dx = a^2 D(\mathbb{X}).$$
□

Věta 2.93. *Nechť $\mathbb{X}$ je náhodná veličina. Potom pro náhodnou veličinu $\mathbb{Y} = (\mathbb{X} - E(\mathbb{X}))^2$ platí*
$$D(\mathbb{X}) = E(\mathbb{Y}).$$

Věta 2.94. *Nechť $\mathbb{X}$ je náhodná veličina. Potom platí*
$$D(\mathbb{X}) = E(\mathbb{X}^2) - (E(\mathbb{X}))^2 .$$

Důkaz.
$$D(\mathbb{X}) = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - E(\mathbb{X}))^2 f(x)dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \left(x^2 - 2E(\mathbb{X})x + (E(\mathbb{X}))^2\right) f(x)dx =$$
$$\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)dx - 2E(\mathbb{X}) \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx + (E(\mathbb{X}))^2 \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx =$$
$$E(\mathbb{X}^2) - 2E(\mathbb{X})E(\mathbb{X}) + (E(\mathbb{X}))^2 = E(\mathbb{X}^2) - (E(\mathbb{X}))^2.$$
□

Definice 2.95. Nechť $\mathbb{X}$ je náhodná veličina. Číslo $\sigma(\mathbb{X}) = \sqrt{D(\mathbb{X})}$ nazveme *směrodatnou odchylkou* náhodné veličiny $\mathbb{X}$.

Definice 2.96. *Normovaná náhodná veličina* k náhodné veličině $\mathbb{X}$ je
$$\mathbb{U} = \frac{\mathbb{X} - E(\mathbb{X})}{\sigma(\mathbb{X})}.$$

Věta 2.97. *Pro normovanou náhodnou veličinu $\mathbb{U}$ platí*
$$E(\mathbb{U}) = 0, \ \ D(\mathbb{U}) = 1.$$

Důkaz.
$$\mathbb{U} = \frac{\mathbb{X} - E(\mathbb{X})}{\sigma(\mathbb{X})} = \frac{1}{\sigma(\mathbb{X})}\mathbb{X} - \frac{E(\mathbb{X})}{\sigma(\mathbb{X})}.$$

Podle věty 2.92
$$E(\mathbb{U}) = \frac{1}{\sigma(\mathbb{X})}E(\mathbb{X}) - \frac{E(\mathbb{X})}{\sigma(\mathbb{X})} = 0.$$

Dále podle téže věty
$$D(\mathbb{U}) = \frac{1}{(\sigma(\mathbb{X}))^2}D(\mathbb{X}) = \frac{1}{D(\mathbb{X})}D(\mathbb{X}) = 1.$$

□

Definice 2.98. Nechť $\mathbb{X}$ je náhodná veličina. Číslo
$$k_1 = \frac{M_3(\mathbb{X})}{(\sigma(\mathbb{X}))^3}$$
nazveme *koeficientem šikmosti* náhodné veličiny $\mathbb{X}$.

Definice 2.99. Číslo
$$k_2 = \frac{M_4(\mathbb{X})}{(\sigma(\mathbb{X}))^4} - 3$$
nazveme *koeficientem špičatosti* náhodné veličiny $\mathbb{X}$.

Věta 2.100. *Nechť $\mathbb{X}$ je náhodná veličina. Koeficient šikmosti i koeficient špičatosti se nemění při lineární transformaci. T.j. $\forall a, b \in \mathbb{R}, a \neq 0$:*
$$k_1(a\mathbb{X} + b) = k_1(\mathbb{X}),$$
$$k_2(a\mathbb{X} + b) = k_2(\mathbb{X}),$$

Věta 2.101. *Platí:*

1. *Pro symetrickou náhodnou veličinu $\mathbb{X}$ je $k_1(\mathbb{X}) = 0$.*
2. *Pro náhodnou veličinu s rozdělením protáhlejším vpravo je $k_1 > 0$ a pro náhodnou veličinu s rozdělením protáhlejším vlevo je $k_1 < 0$.*
3. *Pro normální rozdělení je $k_2 = 0$.*
4. *Má-li náhodná veličina symetrické rozdělení a je-li $k_2 > 0$, potom je funkce hustoty pro $x \to \pm\infty$ větší než funkce hustoty normálního rozdělení se stejnou střední hodnotou.*
5. *Má-li náhodná veličina symetrické rozdělení a je-li $k_2 < 0$, potom je funkce hustoty pro $x \to \pm\infty$ menší než funkce hustoty normálního rozdělení se stejnou střední hodnotou.*

Definice 2.102. Nechť $0 < p < 1$. p-*kvantil* náhodné veličiny $\mathbb{X}$ je číslo x_p takové, že $F(x_p) \leq$ $\leq p$, $F(x_p + 0) > p$.

Poznámka 2.103. p-kvantil není určen jednoznačně. Je-li $\mathbb{X}$ spojitá náhodná veličina je $F(x_p) = p$.

Definice 2.104. 0.5-kvantil ve nazývá *medián*.

Definice 2.105. *Modus* $\tilde{x}$ spojité náhodné veličiny $\mathbb{X}$ je bod pro který platí $f(\tilde{x}) \geq f(x) \forall x \in \mathbb{R}$.

Příklad 2.106. Náhodná veličina má funkci hustoty

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{pro } x < 0, \\ a(3x - x^2), & \text{pro } 0 \leq x \leq 3, \\ 0, & \text{pro } x > 3. \end{cases}$$

Určete parametr a, střední hodnotu a rozptyl.

Řešení. Musí platit

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1.$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int_0^3 a(3x - x^2)dx = a\left[\frac{3}{2}x^2 - \frac{1}{3}x^3\right]_0^3 = a\left[\frac{27}{2} - 9\right] = 1 \to a = \frac{2}{9}.$$

$$E(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx = \int_0^3 \left(\frac{2}{3}x^2 - \frac{2}{9}x^3\right) dx = \left[\frac{2}{9}x^3 - \frac{1}{18}x^4\right]_0^3 = 6 - \frac{9}{2} = 1.5.$$

$$D(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - E(x))^2 f(x)dx = E(x^2) - (E(x))^2 = \int_0^3 \left(\frac{2}{3}x^3 - \frac{2}{9}x^4\right) dx - 1.5^2 =$$

$$\left[\frac{1}{6}x^4 - \frac{2}{45}x^5\right]_0^3 - 1.5^2 = 2.7 - 2.25 = 0.45.$$

□

Příklad 2.107. Graf funkce hustoty náhodné veličiny X tvoří na intervalu $[0, a]$ přímka spojující body $(0, 2/a)$ a $(a, 0)$. Mimo interval $[0, a]$ je funkce hustoty nulová. Urźete: hodnotu parametru a, střední hodnotu a rozptyl.

Řešení.

$$f(x) = \begin{cases} 0 & x < 0, \\ -\frac{2}{a^2}x + \frac{2}{a} & x \in [0, a], \\ 0 & , x > a. \end{cases}$$

Musí platit

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1 \Rightarrow \int_0^a \left(-\frac{2}{a^2}x + \frac{2}{a}\right) dx = -\frac{2}{a^2}\frac{x^2}{2} + \frac{2}{a}x\bigg|_0^a = -\frac{2}{a^2}\frac{a^2}{2} + \frac{2}{a}a = 1.$$

Každá hodnota $a > 0$ vyhovuje.

$$E(x) = \int_0^a \left(-\frac{2}{a^2}x^2 + \frac{2}{a}x\right) dx = -\frac{2}{3}a + a = \frac{a}{3}.$$

$$D(x) = \frac{a^2}{18}.$$

□

2.20 Číselné charakteristiky dvourozměrných náhodných veličin

Definice 2.108. *Centrálním bodem* dvourozměrné náhodné veličiny $(\mathbb{X}, \mathbb{Y})$ nazveme bod $(E(\mathbb{X}), E(\mathbb{Y}))$.

Definice 2.109. Nechť $\mathbb{X}, \mathbb{Y}$ jsou náhodné veličiny. Hodnotu

$$K(\mathbb{X}, \mathbb{Y}) = E(\mathbb{X}\mathbb{Y}) - E(\mathbb{X})E(\mathbb{Y})$$

nazýváme *kovariací* náhodných veličin $\mathbb{X}, \mathbb{Y}$.

Věta 2.110. *Platí:*

1. $K(\mathbb{X}, \mathbb{Y}) = K(\mathbb{Y}, \mathbb{X})$.
2. $K(\mathbb{X}, \mathbb{Y}) = 0$ *pro nezávislé náhodné veličiny* $\mathbb{X}, \mathbb{Y}$.
3. $K(\mathbb{X}, \mathbb{X}) = D(\mathbb{X})$.
4. $K(\mathbb{X}, \mathbb{X}) = E(\mathbb{X}^2) - [E(\mathbb{X})]^2$.

Definice 2.111. Nechť $(\mathbb{X}, \mathbb{Y})$ jsou náhodné veličiny. Hodnotu

$$R(\mathbb{X}, \mathbb{Y}) = \frac{K(\mathbb{X}, \mathbb{Y})}{\sigma(\mathbb{X})\sigma(\mathbb{Y})}$$

nazýváme *korelačním koeficientem* náhodných veličin $\mathbb{X}, \mathbb{Y}$.

Věta 2.112. *Platí:*

1. $-1 \leq R(\mathbb{X}, \mathbb{Y}) \leq 1$.
2. $R(\mathbb{X}, \mathbb{Y}) = R(\mathbb{Y}, \mathbb{X})$.
3. $R(\mathbb{X}, \mathbb{Y}) = 0$ *pro nezávislé* $\mathbb{X}, \mathbb{Y}$.
4. *Je-li* $\mathbb{Y} = a\mathbb{X} + b, a \neq 0$, *potom* $R(\mathbb{X}, \mathbb{Y}) =$ *sign* a.

Příklad 2.113. Dvourozměrná náhodná veličina $(\mathbb{X}, \mathbb{Y})$ má funkci hustoty

$$f(x, y) = \begin{cases} a(x^2 + y^2), & \text{pro } x^2 + y^2 \leq r^2, \\ 0, & \text{pro } x^2 + y^2 > r^2. \end{cases}$$

Určete koeficient a.

Řešení. Koeficient a určíme z rovnice

$$a \int\int (x^2 + y^2) dx dy = 1,$$

kde integrujeme přes kružnici $x^2 + y^2 = r^2$. Přejdeme k polárním souřadnicím a dostaneme

$$a \int_0^{2\pi} \int_0^r \varrho^3 d\varrho d\varphi = 1,$$

$$\frac{r^4}{4} 2\pi a = 1,$$

$$a = \frac{2}{\pi r^4}.$$

□

Příklad 2.114. Dvourozměrná náhodná veličina $(\mathbb{X}, \mathbb{Y})$ má funkci hustoty

$$f(x, y) = \begin{cases} a \sin(x + y), & \text{v oblasti } D, \\ 0, & \text{mimo oblast } D, \end{cases}$$

kde oblast D je urźena nerovnostmi $0 \leq x \leq \pi/2, 0 \leq y \leq \pi/2$.
Určete

1. Koeficient a,
2. Střední hodnoty $E(x), E(y)$,
3. Směrodatné odchylky $\sigma(x), \sigma(y)$,
4. Koeficient korelace.

Řešení. 1. Musí platit

$$a \int_0^{\pi/2} \int_0^{\pi/2} \sin(x + y) dy dx = 1.$$

Odtud

$$a \int_0^{\pi/2} \int_0^{\pi/2} \sin(x + y) dy dx = -a \int_0^{\pi/2} cos(x + y)|_0^{\pi/2} dx =$$

$$= -a \int_0^{\pi/2} (\sin x + \cos x) dx = a \, (\sin x - \cos x)|_0^{\pi/2} = 2a.$$

$$a = \frac{1}{2}.$$

2.

$$E(x) = \frac{1}{2} \int_0^{\pi/2} \int_0^{\pi/2} x \sin(x + y) dy dx = \frac{1}{2} \int_0^{\pi/2} x dx \int_0^{\pi/2} \sin(x + y) dy =$$

$$= -\frac{1}{2} \int_0^{\pi/2} \cos(x + y)|_0^{\pi/2} x dx = -\frac{1}{2} \int_0^{\pi/2} \Big[\cos(x + \frac{\pi}{2}) - \cos x\Big] x dx =$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{\pi/2} x\,[\sin x + \cos x]\,dx = \frac{1}{2}x\,[\sin x - \cos x]\Big|_0^{\pi/2} - \frac{1}{2}\int_0^{\pi/2} [\sin x - \cos x]\,dx =$$

$$= \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}\,(\cos x + \sin x)\Big|_0^{\pi/2} = \frac{\pi}{4}.$$

Stejným způsobem dostaneme

$$E(y) = \frac{\pi}{4}.$$

3.

$$D(x) = E(x^2) - (E(x))^2 = \frac{1}{2}\int_0^{\pi/2}\int_0^{\pi/2} x^2\sin(x+y)dydx - \frac{\pi^2}{16} =$$

$$-\frac{1}{2}\int_0^{\pi/2} x^2\cos(x+y)\Big|_0^{\pi/2}dx - \frac{\pi^2}{16} = \frac{1}{2}\int_0^{\pi/2} x^2(\sin x + \cos x)dx - \frac{\pi^2}{16} =$$

$$\frac{1}{2}\,x^2(\sin x - \cos x)\Big|_0^{\pi/2} - \int_0^{\pi/2} x(\sin x - \cos x)dx - \frac{\pi^2}{16} =$$

$$\frac{\pi^2}{8} + x(\sin x + \cos x)\Big|_0^{\pi/2} - \int_0^{\pi/2}(\sin x + \cos x)dx - \frac{\pi^2}{16} =$$

$$= \frac{\pi^2}{8} + \frac{\pi}{2} + (\sin x - \cos x)\Big|_0^{\pi/2} - \frac{\pi^2}{16} = \frac{\pi^2}{16} + \frac{\pi}{2} - 2.$$

Stejným způsobem dostaneme $D(y) = D(x)$.

$$\sigma(x) = \sigma(y) = \sqrt{\frac{\pi^2}{16} + \frac{\pi}{2} - 2}.$$

4.

$$K(x,y) = E(xy) - E(x)E(y) = \frac{1}{2}\int_0^{\pi/2}\int_0^{\pi/2} xy\sin(x+y)dydx - \frac{\pi}{4}\frac{\pi}{4} =$$

$$\frac{1}{2}\int_0^{\pi/2} x\left(\int_0^{\pi/2} y\sin(x+y)dy\right)dx - \frac{\pi^2}{16} =$$

$$= \frac{8\pi - 16 - \pi^2}{16}.$$

$$R(x,y) = \frac{K(x,y)}{\sigma(x)\sigma(y)} = \frac{8\pi - 16 - \pi^2}{\pi^2 + 8\pi - 32} \approx -0.2454$$

$\square$

2.21 Regresní koeficient a regresní přímka

Nechť $\mathbb{X}, \mathbb{Y}$ jsou náhodné veličiny. Nechť náhodná veličina $\mathbb{Z}$ je lineární funkcí náhodných veličin $\mathbb{Y}, \mathbb{X}$, tj. $\mathbb{Z} = \mathbb{Y} - k\mathbb{X}$. Hledáme takové k, aby $D(\mathbb{Z})$ bylo minimální.

$$D(\mathbb{Z}) = D(\mathbb{Y} - k\mathbb{X}) = E((\mathbb{Y} - k\mathbb{X})^2) - (E(\mathbb{Y} - k\mathbb{X}))^2 =$$

$$= E(\mathbb{Y}^2) - 2kE(\mathbb{Y}\mathbb{X}) + k^2E(\mathbb{X}^2) - (E(\mathbb{Y}))^2 + 2kE(\mathbb{X})E(\mathbb{Y}) - k^2(E(\mathbb{X}))^2 =$$
$$= D(\mathbb{Y}) + k^2D(\mathbb{X}) - 2kK(\mathbb{X},\mathbb{Y})$$
$$\frac{d}{dk}D(\mathbb{Z}) = 2kD(\mathbb{X}) - 2K(\mathbb{X},\mathbb{Y}) = 0$$
$$k = \frac{K(\mathbb{X},\mathbb{Y})}{D(\mathbb{X})} = R(\mathbb{X},\mathbb{Y})\frac{\sigma(\mathbb{Y})}{\sigma(\mathbb{X})}.$$

Definice 2.115. *Koeficientem regrese* náhodné veličiny nazýváme číslo

$$k = \frac{K(\mathbb{X},\mathbb{Y})}{D(\mathbb{X})} = R(\mathbb{X},\mathbb{Y})\frac{\sigma(\mathbb{Y})}{\sigma(\mathbb{X})}.$$

Důsledek 2.116. *Hodnota k nám dává minimum $D(\mathbb{Z})$.*

Důkaz. Protože

$$\frac{d}{dk}D(\mathbb{Z}) = 0$$

a

$$\frac{d^2}{dk^2}D(\mathbb{Z}) = 2D(\mathbb{X}) > 0$$

dává nám hodnota k minimum $D(\mathbb{Z})$. □

Definice 2.117. Přímku

$$y - E(\mathbb{Y}) = k(x - E(\mathbb{X}))$$

nazýváme *regresní přímkou* náhodné veličiny $\mathbb{Y}$ vzhledem k náhodné veličině $\mathbb{X}$.

Příklad 2.118. Nechť $(\mathbb{X},\mathbb{Y})$ je diskrétní náhodná veličina se simultání frekvenční funkcí

$x_i \backslash y_i$	0	1	2	$f(x_i)$
0	0.2	0.1	0.05	0.35
1	0	0.3	0	0.3
2	0	0.2	0.15	0.35
$f(y_j)$	0.2	0.6	0.2	1

Určete regresní přímku.

Řešení. Určíme postupně $E(\mathbb{X}), E(\mathbb{Y}), D(\mathbb{X}), D(\mathbb{Y})$.

$$E(\mathbb{X}) = 0 \cdot 0.35 + 1 \cdot 0.3 + 2 \cdot 0.35 = 1.$$

$$E(\mathbb{Y}) = 0 \cdot 0.2 + 1 \cdot 0.6 + 2 \cdot 0.2 = 1.$$
$$D(\mathbb{X}) = (0-1)^2 0.35 + (1-1)^2 0.3 + (2-1)^2 0.35 = 0.7.$$
$$D(\mathbb{Y}) = (0-1)^2 0.2 + (1-1)^2 0.6 + (2-1)^2 0.2 = 0.4.$$

Dále

$$E(\mathbb{X} \cdot \mathbb{Y}) = 0 \cdot (0.2 + 0.1 + 0.05) + 1 \cdot 03 + 2 \cdot 0.2 + 4 \cdot 0.15 = 1.3.$$

Kovariace

$$K(\mathbb{X},\mathbb{Y}) = 1.3 - 1 \cdot 1 = 0.3.$$

Koeficient korelace

$$R(\mathbb{X},\mathbb{Y}) = \frac{0.3}{\sqrt{0.4}\sqrt{0.7}} = 0.567.$$

Regresní koeficient

$$k = 0.567\frac{\sqrt{0.4}}{\sqrt{0.7}} = 0.429.$$

Regresní přímka má potom tvar

$$y - 1 = 0.429(x-1),$$

$$y = 0.429x + 0.571.$$

□

2.22 Nejužívanější rozložení diskrétních náhodných veličin

1. **Klasické rozložení**. Náhodná veličina $\mathbb{X}$ má klasické rozložení s parametrem $n \in \mathbb{N}$, jestliže

$$f(x) = p(\mathbb{X} = x) = \begin{cases} \frac{1}{n} & \text{pro } x = 1, 2, \dots, n, \\ 0 & \text{pro zbývající případy.} \end{cases}$$

Věta 2.119. *Má-li náhodná veličina $\mathbb{X}$ klasické rozložení s parametrem $n \in \mathbb{N}$, potom platí:*

$$E(\mathbb{X}) = \frac{n+1}{2},$$

$$D(\mathbb{X}) = \frac{n^2-1}{12}.$$

2. **Binomické rozložení** $Bi(n,p)$. Náhodná veličina $\mathbb{X}$ má binomické rozložení s parametry $n \in \mathbb{N}$ a $p \in (0,1)$, jestliže

$$f(i) = p(\mathbb{X} = i) = \begin{cases} \binom{n}{i} p^i (1-p)^{n-i} & \text{pro } i = 0, 1, 2, \dots, n, \\ 0 & \text{pro zbývající případy.} \end{cases}$$

Věta 2.120. *Má-li náhodná veličina $\mathbb{X}$ binomické rozložení $Bi(n,p)$, potom platí:*

$$E(\mathbb{X}) = np,$$

$$D(\mathbb{X}) = np(1-p),$$

$$k_1 = \frac{1-2p}{\sqrt{np(1-p)}},$$

$$k_2 = \frac{1-6p(1-p)}{np(1-p)}.$$

Modus $\tilde{x}$ je určen nerovnicí $(n+1)p - 1 \le \tilde{x} \le (n+1)p$.

Důsledek 2.121. *V případě, že $(n+1)p$ je celé číslo, budeme mít pro modus dvě hodnoty.*

Důsledek 2.122. *$Bi(n, \frac{1}{2})$ má symetrickou frekvenční funkci.*

3. **Alternativní rozložení** $A(p)$. Náhodná veličina $\mathbb{X}$ má alternativní rozložení s parametrem $p \in (0,1)$, jestliže

$$f(1) = p, \quad f(0) = 1 - p.$$

Věta 2.123. *Má-li náhodná veličina $\mathbb{X}$ alternativní rozložení $A(p)$, potom platí:*

$$\begin{aligned} E(\mathbb{X}) &= p, \\ D(\mathbb{X}) &= p(1-p), \\ k_1 &= \frac{1-2p}{\sqrt{p(1-p)}}, \\ k_2 &= \frac{1-6p(1-p)}{p(1-p)}, \\ A(p) &\equiv Bi(1,p). \end{aligned}$$

4. **Poissonovo rozložení** $Po(\lambda)$. Náhodná veličina $\mathbb{X}$ má Poissonovo rozložení s parametrem $\lambda \in \mathbb{R}^+$, jestliže

$$f(i) = p(\mathbb{X} = i) = \begin{cases} \frac{\lambda^i}{i!}\mathrm{e}^{-\lambda} & \text{pro } i = 0, 1, 2, \dots, \\ 0 & \text{pro zbývající případy.} \end{cases}$$

Věta 2.124. *Má-li náhodná veličina $\mathbb{X}$ Poissonovo rozložení $Po(\lambda)$, potom platí:*

$$\begin{aligned} E(\mathbb{X}) &= \lambda, \\ D(\mathbb{X}) &= \lambda, \\ k_1 &= \lambda^{-\frac{1}{2}}, \\ k_2 &= \lambda^{-1}. \end{aligned}$$

Důsledek 2.125. *$E(\mathbb{X}) = D(\mathbb{X}) = \lambda$ je charakteristickou vlastností Poissonova rozložení.*

Příklad 2.126. Určete střední hodnotu diskrétní náhodné veličinz s frekvenční funkci

$$p(\mathbb{X} = m) = \frac{\lambda^m e^{-\lambda}}{m!}, \quad m = 0, 1, 2, \dots.$$

Řešení. Jde o náhodnou veličinu s Poissonověm rozložením.

$$E(\mathbb{X}) = \sum_{m=0}^{\infty} m \frac{\lambda^m e^{-\lambda}}{m!} = \sum_{m=1}^{\infty} m \frac{\lambda^m e^{-\lambda}}{m!} = \lambda e^{-\lambda} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\lambda^{m-1}}{(m-1)!}.$$

Protože

$$\sum_{m=1}^{\infty} \frac{\lambda^{m-1}}{(m-1)!} = e^{\lambda},$$

po dosazení dostaneme

$$E(\mathbb{X}) = \lambda.$$

□

5. **Negativní binomické rozložení** $Nbi(n,p)$. Kolik pokusů při Bernoulliovské posloupnosti nezávislých pokusů je třeba udělat, aby nastal jev A po n-té? Jestliže náhodná veličina $\mathbb{X}$ nabývá hodnoty počtu pokusů, při nichž jev A nenastal předtím než nastal po n-té a $\mathbb{X} = x_i$, pak jev A nastal po n-té v $(x_i + n)$-tém pokusu.

   Náhodná veličina $\mathbb{X}$ má negativní binomické rozložení s parametry $n \in \mathbb{N}$ a $p \in (0,1)$, jestliže

$$f(x_i) = p(\mathbb{X} = x_i) = \begin{cases} \binom{x_i+n-1}{n-1} p^n (1-p)^{x_i} & \text{pro } x_i = 0,1,2,\ldots, n = 1,2,\ldots, \\ 0 & \text{pro zbývající případy.} \end{cases}$$

Věta 2.127. *Má-li náhodná veličina $\mathbb{X}$ negativní binomické rozložení $Nbi(n,p)$, potom platí:*

$$E(\mathbb{X}) = n\frac{1-p}{p},$$
$$D(\mathbb{X}) = n\frac{1-p}{p^2}.$$

6. **Geometrické rozložení** $Ge(p)$. Jde o rozložení $Nbi(1,p)$. Počet nezávislých pokusů, které končí při prvním úspěšném pokusu. Náhodná veličina $\mathbb{X}$ má geometrické rozložení s parametrem $p \in (0,1)$, jestliže

$$f(x_i) = p(\mathbb{X} = x_i) = \begin{cases} p(1-p)^{x_i} & \text{pro } x_i = 0,1,2,\ldots, \\ 0 & \text{pro zbývající případy.} \end{cases}$$

Věta 2.128. *Má-li náhodná veličina $\mathbb{X}$ geometrické rozložení $Ge(p)$, potom platí:*

$$E(\mathbb{X}) = \frac{1-p}{p},$$
$$D(\mathbb{X}) = \frac{1-p}{p^2}.$$

7. **Hypergeometrické rozložení** $H(N,M,n)$. Počet prvků vykazujících sledovanou vlastnost v souboru n prvků, vybraných bez vracení ze souboru N prvků, z nichž celkem M má dannou vlatnost.

   Náhodná veličina $\mathbb{X}$ má hypergeometrické rozložení s parametry $N, M, n \in \mathbb{N}, N > M$, jestliže

$$f(x) = \frac{\binom{M}{x}\binom{N-M}{n-x}}{\binom{N}{n}},$$

Věta 2.129. *Má-li náhodná veličina $\mathbb{X}$ hypergeometrické rozložení $H(N,M,n)$, potom platí:*

$$E(\mathbb{X}) = n\frac{M}{N},$$
$$D(\mathbb{X}) = n\frac{M}{N}\left(1 - \frac{M}{n}\right)\frac{N-n}{N-1}.$$

2.23 Nejužívanější rozložení spojitých náhodných veličin

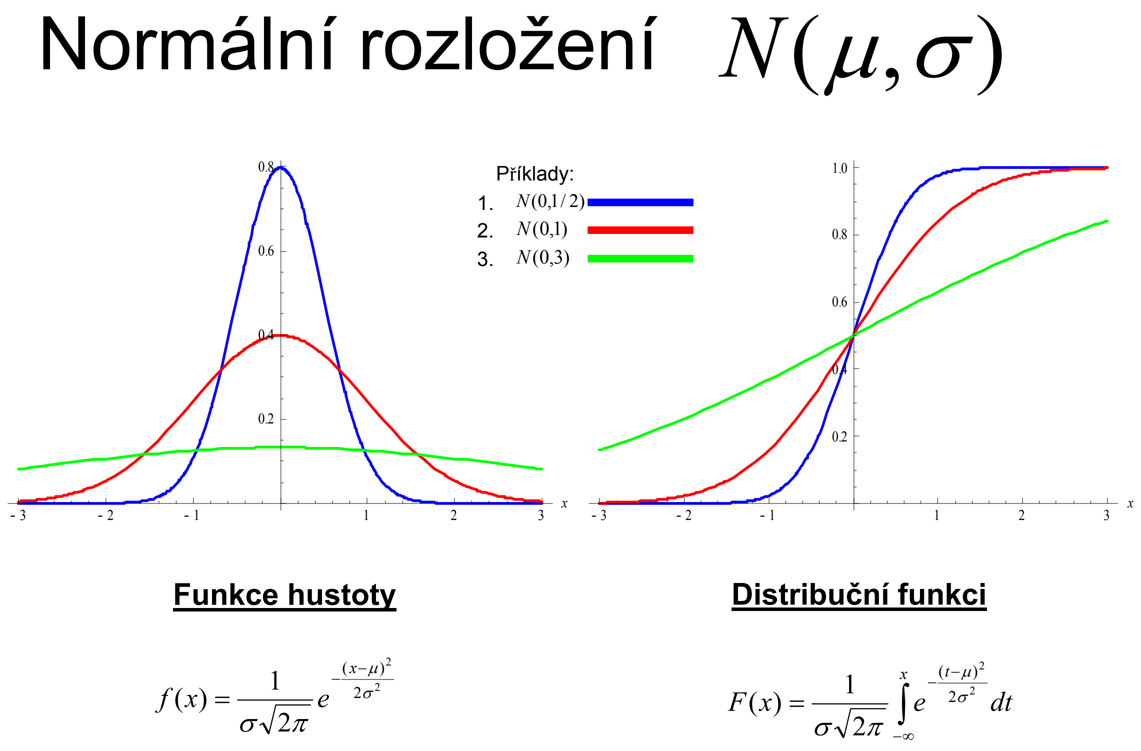
1. **Rovnoměrné rozložemní**. Náhodná veličina $\mathbb{X}$ má rovnoměrné rozložení, jestliže má konstantní hustotu pravděpodobnosti na celém intervalu hodnot, kterých může nabýt. Funkce hustoty je
$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & \text{pro } x \in [a,b], \\ 0 & \text{pro } x \notin [a,b]. \end{cases}$$
Distribuční funkce je
$$F(x) = \begin{cases} 0 & x < a, \\ \frac{x-a}{b-a} & \text{pro } x \in [a,b], \\ 1 & \text{pro } x > b. \end{cases}$$

Věta 2.130. *Má-li náhodná veličina $\mathbb{X}$ rovnoměrné rozložení, potom platí:*
$$E(\mathbb{X}) = \frac{1}{2}(a+b),$$
$$D(\mathbb{X}) = \frac{1}{12}(b-a)^2,$$
$$k_1 = 0,$$
$$k_2 = \frac{(b-a)^4}{80} - 3.$$

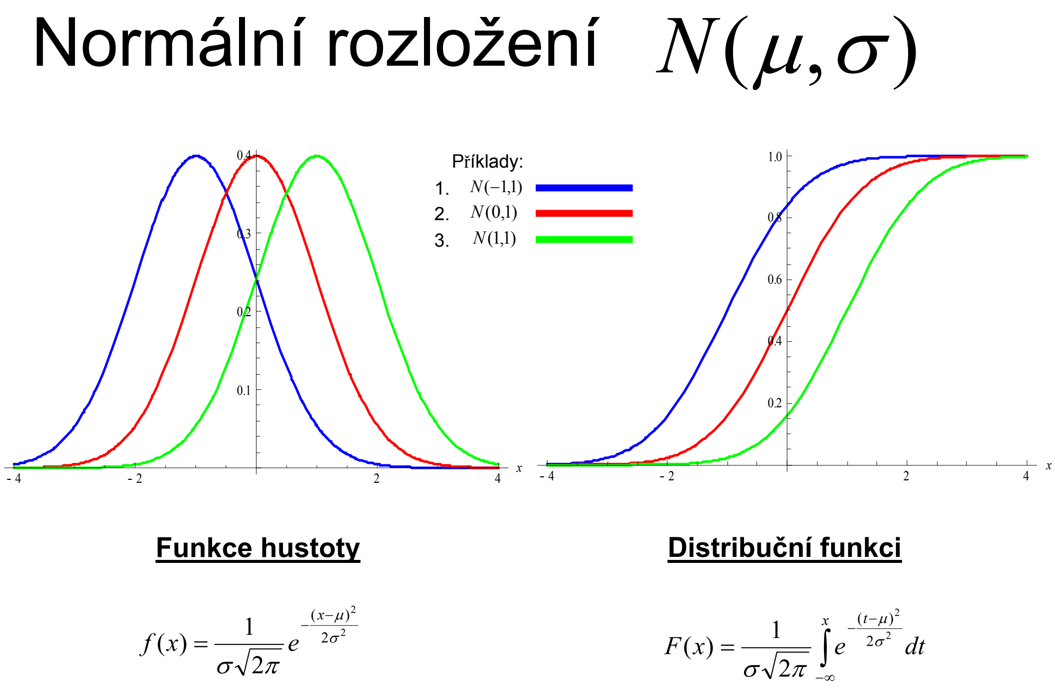
2. **Normální rozložení** $No(\mu,\sigma)$. Náhodná veličina $\mathbb{X}$ má normální rozložení s parametry $\mu \in \mathbb{R}, \sigma > 0$, jestliže má funkci hustoty
$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \mathrm{e}^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$
a distribuční funkci
$$F(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} \mathrm{e}^{-\frac{(t-\mu)^2}{2\sigma^2}}\, dt.$$

Věta 2.131. *Má-li náhodná veličina $\mathbb{X}$ normální rozložení $No(\mu,\sigma)$, potom platí:*
$$E(\mathbb{X}) = \mu,$$
$$D(\mathbb{X}) = \sigma^2.$$

Důkaz:
$$E(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} x\mathrm{e}^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}\, dx.$$
Zavedeme si substituci
$$\frac{x-\mu}{\sigma} = t \Rightarrow x = \sigma t + \mu \Rightarrow dx = \sigma dt.$$
Po dosazení máme
$$E(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} (\sigma t + \mu)\mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}}\, dt = \frac{\sigma}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} t\mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}}\, dt + \frac{\mu}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}}\, dt = \mu.$$
Protože první integrál je integrálem z liché funkce, který je roven nule, a druhý integrál je roven $\sqrt{2\pi}$.



Obr. 2.1: Normální rozložení 1



Obr. 2.2: Normální rozložení 2

3. **Exponenciální rozložení** $E(A,d)$. Náhodná veličina $\mathbb{X}$ má exponenciální rozložení s parametry $A \in \mathbb{R}, d > 0$, jestliže má funkci hustoty

$$f(x) = \begin{cases} 0 & x \le A, \\ \frac{1}{d}\mathrm{e}^{-\frac{x-A}{d}} & x > A, \end{cases}$$

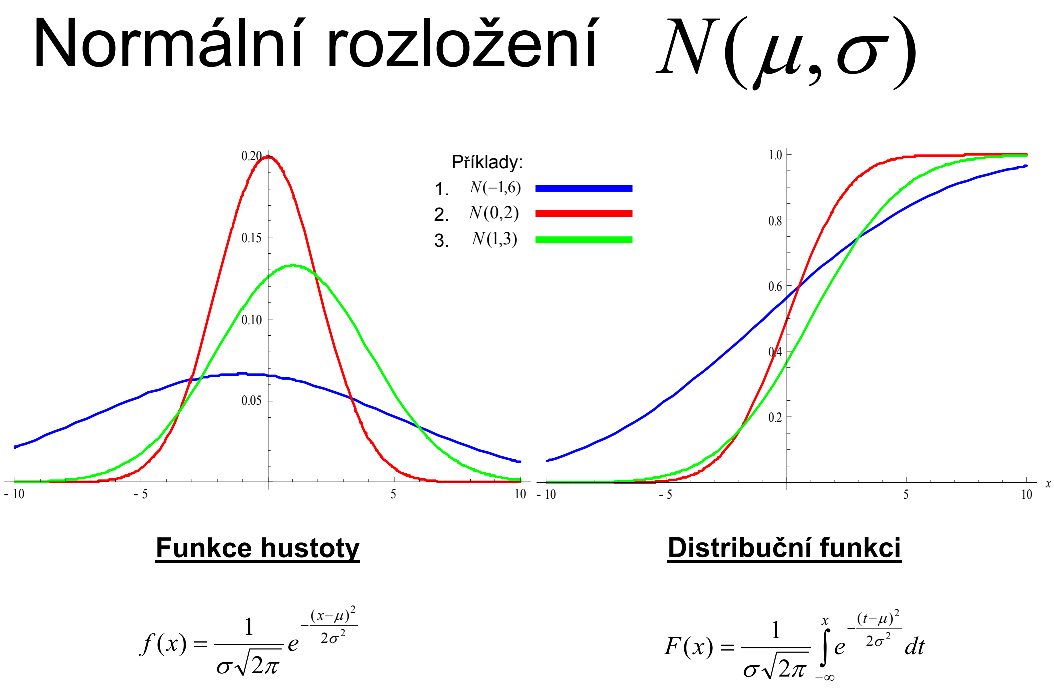
a distribuční funkci

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x \le A, \\ 1 - \mathrm{e}^{-\frac{x-A}{d}} & x > A. \end{cases}$$

Věta 2.132. *Má-li náhodná veličina $\mathbb{X}$ exponenciální rozložení $E(A,d)$, potom platí:*

$$E(\mathbb{X}) = A + d,$$

$$D(\mathbb{X}) = d^2.$$



Obr. 2.3: Normální rozložení 3

4. **Gama rozložení** $\Gamma(m,d)$. Náhodná veličina $\mathbb{X}$ má gama rozložení s parametry $m>0, d>$ >0, jestliže má funkci hustoty

$$f(x)=\begin{cases} 0 & x\le 0,\\ \frac{1}{\Gamma(m)d^m}\mathrm{e}^{-\frac{x}{d}}x^{m-1} & x>0,\end{cases}$$

kde

$$\Gamma(m)=\int_0^m \mathrm{e}^{-t}t^{m-1}dt.$$

Věta 2.133. *Má-li náhodná veličina* $\mathbb{X}$ *gama rozložení* $\Gamma(m,d)$*, potom platí:*

$$E(\mathbb{X})=md,$$

$$D(\mathbb{X})=md^2.$$

Důsledek 2.134. *Pro* $m=1$ *je* $\Gamma(1,d)\equiv E(0,d)$*.*

5. **Beta rozložení** $Be(p,q)$. Náhodná veličina $\mathbb{X}$ má beta rozložení s parametry $p>0, q>0$, jestliže má funkci hustoty

$$f(x)=\begin{cases} 0 & x\notin(0,1),\\ \frac{1}{B(p,q)}x^{p-1}(1-x)^{q-1} & x\in(0,1),\end{cases}$$

kde

$$B(p,q)=\int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}dx.$$

Věta 2.135. *Má-li náhodná veličina* $\mathbb{X}$ *beta rozložení* $Be(p,q)$*, potom platí:*

$$E(\mathbb{X})=\frac{p}{p+q},$$

$$D(\mathbb{X})=\frac{pq}{(p+q)^2(p+q+1)},$$

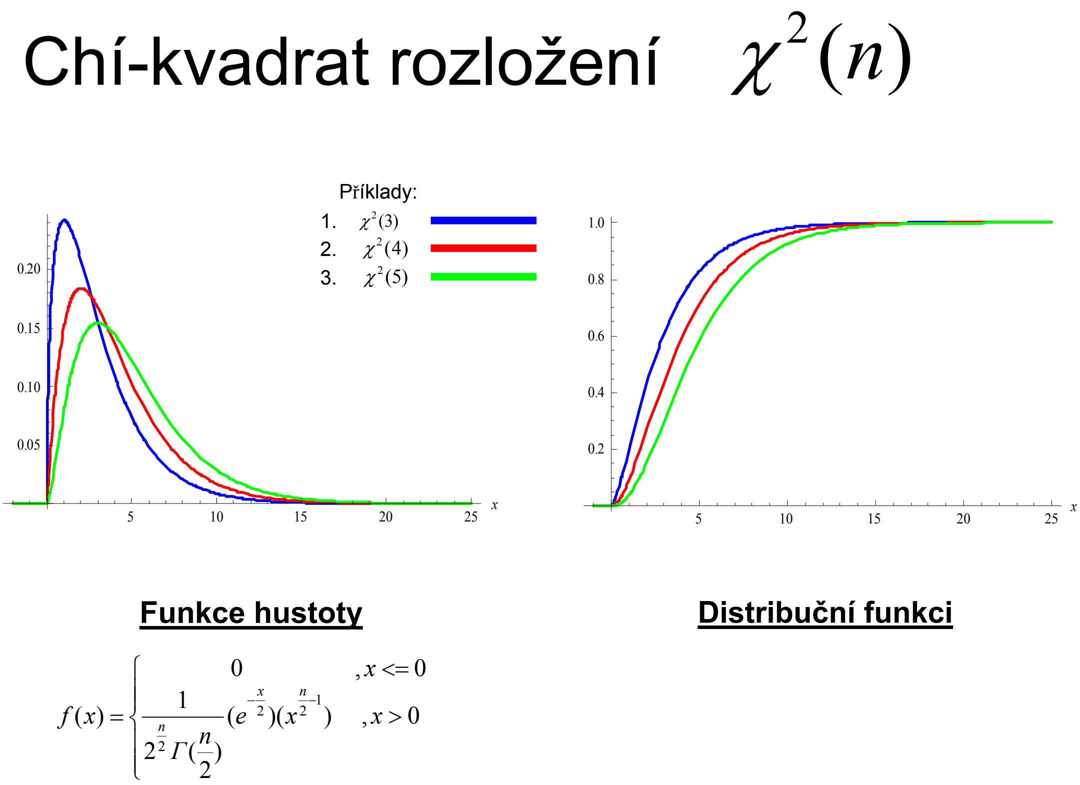
$$B(p,q)=\frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}.$$

6. **Pearsonovo rozložení** χ^2.(čti chí-kvadrát) Náhodná veličina $\mathbb{X}$ má rozložení χ^2 s k stupni volnosti, jestliže má funkci hustoty

$$f(x)=\begin{cases} 0 & x\le 0,\\ \frac{1}{2^{k/2}\Gamma(\frac{k}{2})}\left(\mathrm{e}^{-\frac{x}{2}}\right)\left(x^{\frac{k}{2}-1}\right) & x>0.\end{cases}$$

Věta 2.136. *Má-li náhodná veličina* $\mathbb{X}$ *rozložení* χ^2 *s* k*-stupni volnosti, potom platí:*

$$E(\mathbb{X})=k,$$



Obr. 2.4: Pearsonovo rozložení

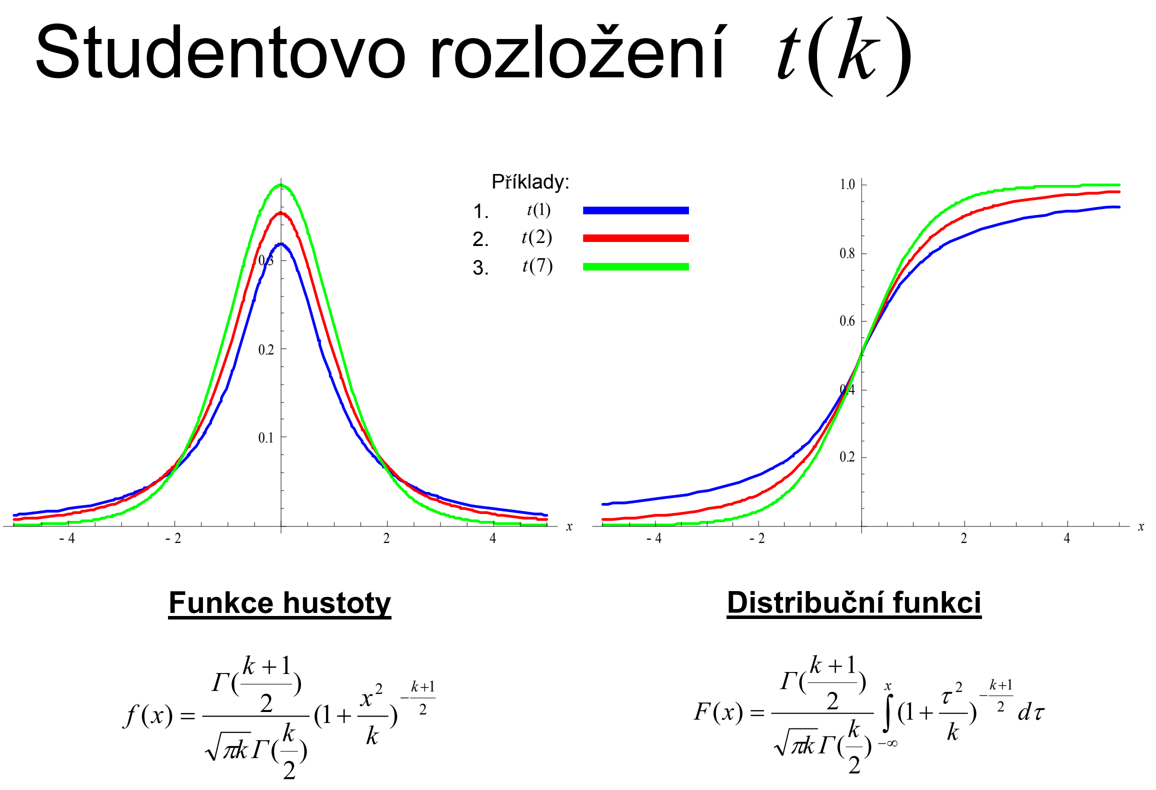
$$D(\mathbb{X}) = 2k,$$
$$k_1 = \frac{4}{\sqrt{2k}},$$
$$k_2 = \frac{12}{k},$$
$$\Gamma(\frac{k}{2}, 2) \equiv \chi^2(k).$$

7. **Studentovo rozložení** t. Mějme dvě nezávislé náhodné veličiny $\mathbb{U}, \mathbb{Y}$. Nechť má $\mathbb{U}$ rozložení $No(0,1)$ a $\mathbb{Y}$ má rozložení χ^2. Utvořme náhodnou veličinu

$$\mathbb{T} = \frac{\mathbb{U}}{\sqrt{\frac{\mathbb{Y}}{k}}}.$$

Náhodná veličina $\mathbb{T}$ má rozložení t o k stupních volnosti s funkcí hustoty pro $k \in \mathbb{N}, x \in \mathbb{R}$

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{k}B(\frac{1}{2}, \frac{k}{2})}\left(1 + \frac{x^2}{k}\right)^{-\frac{k+1}{2}} =$$



Obr. 2.5: Studentovo rozložení

$$= \frac{\Gamma(\frac{k+1}{2})}{\sqrt{\pi k}\Gamma(\frac{k}{2})}\left(1+\frac{x^2}{k}\right)^{-\frac{k+1}{2}}.$$

Pro $k \to +\infty$ konverguje t-rozložení k rozložení $No(0,1)$.

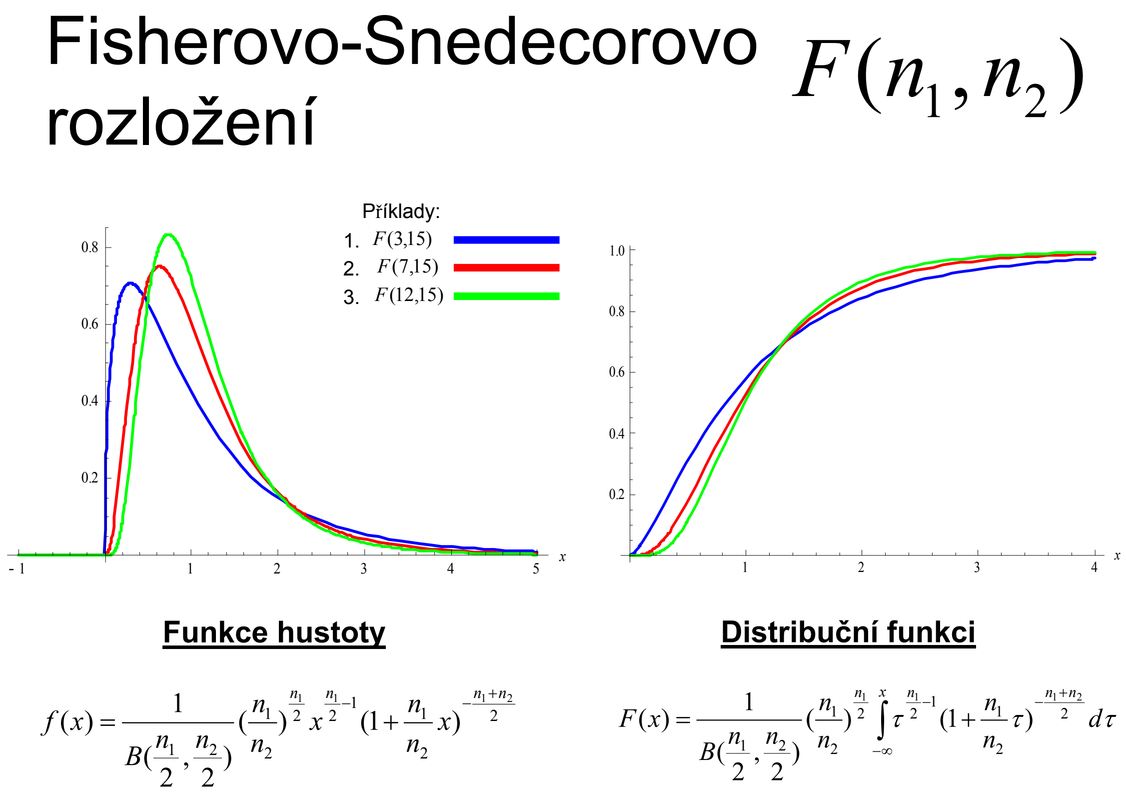
Věta 2.137.

$$k_1 = 0,$$

$$k_2 = \frac{6}{k-4}.$$

8. **Fisherovo - Snedecorovo rozložení** F. Mějme dvě nezávislé náhodné veličiny $\mathbb{X}, \mathbb{Y}$. Nechť má $\mathbb{X}$ rozložení $\chi^2(n_1)$ a $\mathbb{Y}$ má rozložení $\chi^2(n_2)$. Utvořme náhodnou veličinu

$$\mathbb{F} = \frac{\frac{\mathbb{X}}{n_1}}{\frac{\mathbb{Y}}{n_2}}.$$



Obr. 2.6: Fisherovo - Snedecorovo rozložení 1

Náhodná veličina $\mathbb{F}$ má rozložení $F(n_1, n_2)$ o n_1 a n_2 stupních volnosti s funkcí hustoty pro $n_1, n_2 \in \mathbb{N}, x > 0$

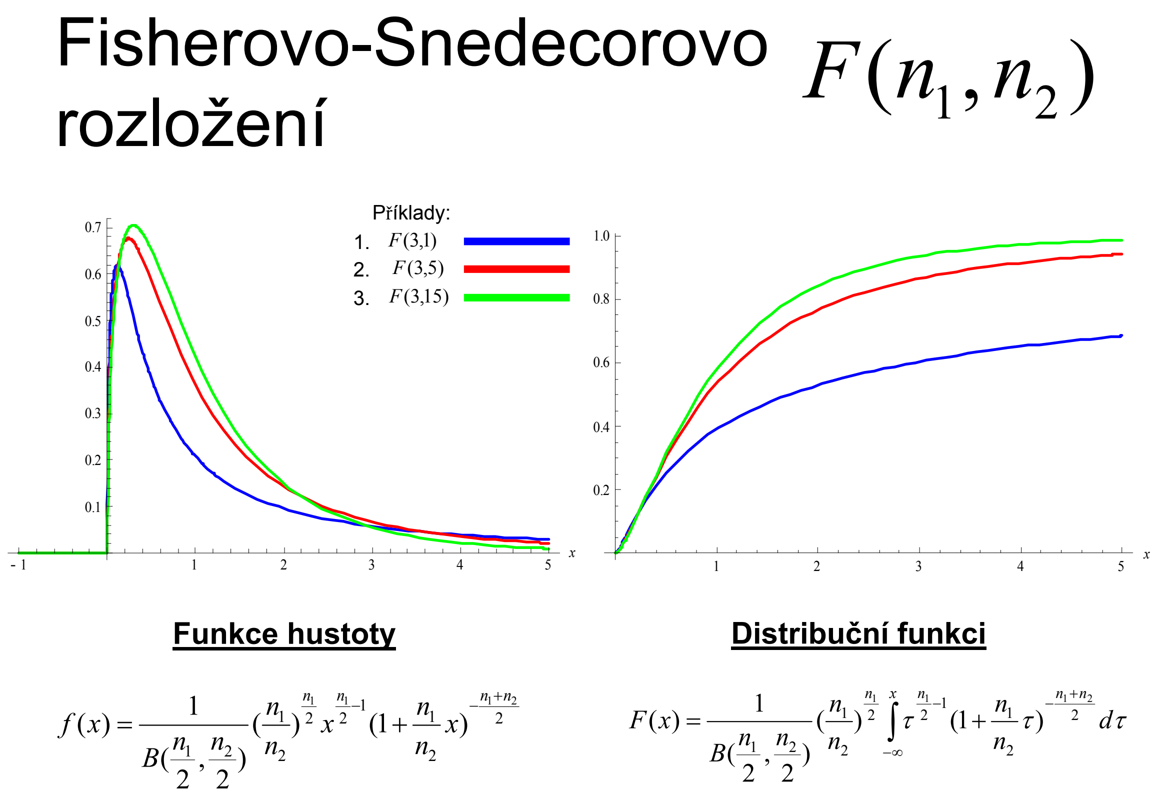
$$f(x) = \frac{1}{B(\frac{n_1}{2}, \frac{n_2}{2})} \left(\frac{n_1}{n_2}\right)^{\frac{n_1}{2}} x^{\frac{n_1}{2}-1} (1 + \frac{n_1}{n_2} x)^{-\frac{n_1+n_2}{2}},$$

$$f(x) = 0, \quad \text{pro} \quad x < 0.$$

9. **Weibullovo rozložení** $W(\delta, b, k)$. Náhodná veličina $\mathbb{X}$ má rozložení $W(\delta, b, k)$ o $\delta > 0, k > 0, b \in \mathbb{R}$, jestliže má funkci hustoty

$$f(x) = \begin{cases} \frac{k}{\delta}(x-b)^{k-1} \exp\left(-\frac{(x-b)^k}{\delta}\right) & \text{pro } x \geq b \\ 0 & \text{pro } x < b. \end{cases}$$

Důsledek 2.138. $W(\delta, b, 1) \equiv E(b, \delta)$.



Obr. 2.7: Fisherovo - Snedecorovo rozložení 2

Weibulovo rozložení pro $k > 1$ modeluje životnost zařízení podléhajícího opotřebení a nebo únavě materiálu.

Weibulovo rozložení pro $k < 1$ modeluje životnost zařízení, kde dochází k poruchám v důsledku skrytých vad, nikoliv opotřebením.

2.24 Vlastnosti normálního rozložení

Náhodná veličina $\mathbb{X}$ má normální rozložení s parametry $\mu \in \mathbb{R}, \sigma > 0$, jestliže má funkci hustoty

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \mathrm{e}^{-\dfrac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

a distribuční funkci

$$F(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} \mathrm{e}^{-\dfrac{(t-\mu)^2}{2\sigma^2}} dt.$$

Je to nejdůležitější rozdělení spojité náhodné veličiny. Je použitelné všude tam, kde kolísání náhodné veličiny je způsobeno součtem velkho počtu nepatrných a vzájemně nezávislých jevů a vlivů.

Modus $\tilde{x} = \mu$, $f(\mu) = (\sigma\sqrt{2\pi})^{-1}$.

Inflexní body $x = \mu \pm \sigma$.

Věta 2.139. *Pro náhodnou veličinu $\mathbb{X}$ s normálním rozložením $No(\mu, \sigma)$ platí*

$$E(\mathbb{X}) = \mu, \quad D(\mathbb{X}) = \sigma^2.$$

Věta 2.140. *Je-li $\mathbb{X}$ náhodná veličina s normálním rozložením $No(\mu, \sigma)$, potom normovaná náhodná veličina $\mathbb{U}$ k náhodné veličině $\mathbb{X}$ má normální rozložení $No(0, 1)$.*

Distribuční funkce náhodné veličiny $\mathbb{X}$ s normálním rozložením $No(\mu, \sigma)$ je tvaru

$$F(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} \mathrm{e}^{-\frac{(t-\mu)^2}{2\sigma^2}} dt.$$

Tento integrál nelze vyjádřit pomocí elementárních funkcí.

Definice 2.141. *Laplaceovou funkcí* nazveme

$$\Phi(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{u} \mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}} dt.$$

Laplaceova funkce je distibuční funkce normálního normovaného rozložení.

Hodnoty funkce $\Phi(u)$ jsou uvedeny v tabulce 2.1 a 2.2.

Věta 2.142. *Nechť $F(x)$ a $\Phi(u)$ jsou distribuční funkce normálního rozložení a normovaného normálního rozložení. Potom*

$$F(x) \equiv \Phi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right).$$

Důsledek 2.143. *Buď $\mathbb{X}$ náhodná veličina s normálním rozložením $No(\mu, \sigma)$. Potom pro libovolné $x_1, x_2 \in \mathbb{R}, x_1 < x_2$ platí*

$$p(x_1 \leq \mathbb{X} \leq x_2) = \Phi\left(\frac{x_2 - \mu}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{x_1 - \mu}{\sigma}\right).$$

Věta 2.144. *Pro Laplaceovu funkci platí*

$$\Phi(0) = 0.5,$$

$$\Phi(-t) = 1 - \Phi(t), \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

Věta 2.145. Zákon tří sigma
Pro náhodnou veličinu s rozložením $No(\mu, \sigma)$ platí,

$$P(\mu - 3\sigma < \mathbb{X} < \mu + 3\sigma) > 99.7\%.$$

Důkaz. Náhodná veličina má rozložení $No(\mu, \sigma)$, potom

$$P(\mu - 3\sigma < \mathbb{X} < \mu + 3\sigma) = \Phi\left(\frac{\mu + 3\sigma - \mu}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{\mu - 3\sigma - \mu}{\sigma}\right) =$$

$$= \Phi\left(\frac{3\sigma}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{-3\sigma}{\sigma}\right) = \Phi(3) - \Phi(-3) = 2\Phi(3) - 1 = 0.997...$$

□

Tab. 2.1: **Hodnoty Laplaceovy funkce $\Phi(u)$ I.**

u	$\Phi(u)$	u	$\Phi(u)$	u	$\Phi(u)$	u	$\Phi(u)$	u	$\Phi(u)$
0,00	0,5000000	0,30	0,6179114	0,60	0,7257469	0,90	0,8159399	1,20	0,8849303
0,01	0,5039894	0,31	0,6217195	0,61	0,7290691	0,91	0,8185887	1,21	0,8868606
0,02	0,5079783	0,32	0,6255158	0,62	0,7323711	0,92	0,8212136	1,22	0,8887676
0,03	0,5119665	0,33	0,6293000	0,63	0,7356527	0,93	0,8238145	1,23	0,8906514
0,04	0,5159534	0,34	0,6330717	0,64	0,7389137	0,94	0,8263912	1,24	0,8925123
0,05	0,5199388	0,35	0,6368307	0,65	0,7421539	0,95	0,8289439	1,25	0,8943502
0,06	0,5239222	0,36	0,6405764	0,66	0,7453731	0,96	0,8314724	1,26	0,8961653
0,07	0,5279032	0,37	0,6443088	0,67	0,7485711	0,97	0,8339768	1,27	0,8979577
0,08	0,5318814	0,38	0,6480273	0,68	0,7517478	0,98	0,8364569	1,28	0,8997274
0,09	0,5358564	0,39	0,6517317	0,69	0,7549029	0,99	0,8389129	1,29	0,9014747
0,10	0,5398278	0,40	0,6554217	0,70	0,7580363	1,00	0,8413447	1,30	0,9031995
0,11	0,5437953	0,41	0,6590970	0,71	0,7611479	1,01	0,8437524	1,31	0,9049021
0,12	0,5477584	0,42	0,6627573	0,72	0,7642375	1,02	0,8461358	1,32	0,9065825
0,13	0,5517168	0,43	0,6664022	0,73	0,7673049	1,03	0,8484950	1,33	0,9082409
0,14	0,5556700	0,44	0,6700314	0,74	0,7703500	1,04	0,8508300	1,34	0,9098773
0,15	0,5596177	0,45	0,6736448	0,75	0,7733726	1,05	0,8531409	1,35	0,9114920
0,16	0,5635595	0,46	0,6772419	0,76	0,7763727	1,06	0,8554277	1,36	0,9130850
0,17	0,5674949	0,47	0,6808225	0,77	0,7793501	1,07	0,8576903	1,37	0,9146565
0,18	0,5714237	0,48	0,6843863	0,78	0,7823046	1,08	0,8599289	1,38	0,9162067
0,19	0,5753454	0,49	0,6879331	0,79	0,7852361	1,09	0,8621434	1,39	0,9177356
0,20	0,5792597	0,50	0,6914625	0,80	0,7881446	1,10	0,8643339	1,40	0,9192433
0,21	0,5831662	0,51	0,6949743	0,81	0,7910299	1,11	0,8665005	1,41	0,9207302
0,22	0,5870604	0,52	0,6984682	0,82	0,7938919	1,12	0,8686431	1,42	0,9221962
0,23	0,5909541	0,53	0,7019440	0,83	0,7967306	1,13	0,8707619	1,43	0,9236415
0,24	0,5948349	0,54	0,7054015	0,84	0,7995458	1,14	0,8728568	1,44	0,9250663
0,25	0,5987063	0,55	0,7088403	0,85	0,8023375	1,15	0,8749281	1,45	0,9264707
0,26	0,6025681	0,56	0,7122603	0,86	0,8051055	1,16	0,8769756	1,46	0,9278550
0,27	0,6064199	0,57	0,7156612	0,87	0,8078498	1,17	0,8789995	1,47	0,9292191
0,28	0,6102612	0,58	0,7190427	0,88	0,8105703	1,18	0,8809999	1,48	0,9305634
0,29	0,6140919	0,59	0,7224047	0,89	0,8132671	1,19	0,8829768	1,49	0,9318879

Tab. 2.2: **Hodnoty Laplaceovy funkce $\Phi(u)$ II.**

u	$\Phi(u)$	u	$\Phi(u)$	u	$\Phi(u)$	u	$\Phi(u)$	u	$\Phi(u)$
1,50	0,9331928	1,80	0,9640697	2,10	0,9821356	2,40	0,9918025	4,50	0,9999966
1,51	0,9344783	1,81	0,9648521	2,11	0,9825708	2,41	0,9920237	5,00	0,9999997
1,52	0,9357445	1,82	0,9656205	2,12	0,9829970	2,42	0,9922397	5,50	0,9999999
1,53	0,9369916	1,83	0,9663750	2,13	0,9834142	2,43	0,9924506		
1,54	0,9382198	1,84	0,9671159	2,14	0,9838226	2,44	0,9926564		
1,55	0,9394392	1,85	0,9678432	2,15	0,9842224	2,45	0,9928572		
1,56	0,9406201	1,86	0,9685572	2,16	0,9846137	2,46	0,9930531		
1,57	0,9417924	1,87	0,9692581	2,17	0,9849966	2,47	0,9932443		
1,58	0,9429466	1,88	0,9699460	2,18	0,9853713	2,48	0,9934309		
1,59	0,9440826	1,89	0,9706210	2,19	0,9857379	2,49	0,9936128		
1,60	0,9452007	1,90	0,9712834	2,20	0,9860966	2,50	0,9937903		
1,61	0,9463011	1,91	0,9719334	2,21	0,9864474	2,51	0,9939634		
1,62	0,9473839	1,92	0,9725711	2,22	0,9867906	2,52	0,9941323		
1,63	0,9484493	1,93	0,9731966	2,23	0,9871263	2,53	0,9942969		
1,64	0,9494974	1,94	0,9738102	2,24	0,9874545	2,54	0,9944574		
1,65	0,9505285	1,95	0,9744119	2,25	0,9877755	2,55	0,9946139		
1,66	0,9515428	1,96	0,9750021	2,26	0,9880894	2,56	0,9947664		
1,67	0,9525403	1,97	0,9755808	2,27	0,9883962	2,57	0,9949151		
1,68	0,9535213	1,98	0,9761482	2,28	0,9886962	2,58	0,9950600		
1,69	0,9544860	1,99	0,9767045	2,29	0,9889893	2,59	0,9952012		
1,70	0,9554345	2,00	0,9772499	2,30	0,9892759	2,60	0,9953388		
1,71	0,9563671	2,01	0,9777844	2,31	0,9895559	2,70	0,9965330		
1,72	0,9572838	2,02	0,9783083	2,32	0,9898296	2,80	0,9974449		
1,73	0,9581849	2,03	0,9788217	2,33	0,9900969	2,90	0,9981342		
1,74	0,9590705	2,04	0,9793248	2,34	0,9903581	3,00	0,9986501		
1,75	0,9599408	2,05	0,9798178	2,35	0,9906133	3,20	0,9993129		
1,76	0,9607961	2,06	0,9803007	2,36	0,9908625	3,40	0,9996631		
1,77	0,9616364	2,07	0,9807738	2,37	0,9911060	3,60	0,9998409		
1,78	0,9624620	2,08	0,9812372	2,38	0,9913437	3,80	0,9999277		
1,79	0,9632730	2,09	0,9816911	2,39	0,9915758	4,00	0,9999683		

2.25 Limitní věty

Věta 2.146. První Čebyševova nerovnost
Nechť $\mathbb{X}$ je náhodná veličina, která nabývá pouze nezáporných hodnot. Potom

$$p(\mathbb{X} \geq 1) \leq E(\mathbb{X}).$$

Důkaz. Nechť $\mathbb{X}$ je diskrétní náhodná veličina s frekvenční funkcí $f(x)$. Potom pro nezáporné x_i platí

$$p(\mathbb{X} > 1) = \sum_{x_i \geq 1} f(x_i) \leq \sum_{x_i \geq 1} x_i f(x_i) \leq \sum_{x_i \geq 0} x_i f(x_i) = E(\mathbb{X}).$$

□

Věta 2.147. Druhá Čebyševova nerovnost
Pro každou náhodnou veličinu $\mathbb{X}$ a pro každé $\varepsilon > 0$ platí

$$p\left(|\mathbb{X} - E(\mathbb{X})| < \varepsilon\right) \geq 1 - \frac{D(\mathbb{X})}{\varepsilon^2}$$

Důkaz.

$$p(|\mathbb{X} - E(\mathbb{X})| \geq \varepsilon) = 1 - p(|\mathbb{X} - E(\mathbb{X})| < \varepsilon)$$

$$p(|\mathbb{X} - E(\mathbb{X})| \geq \varepsilon) = p\left(\frac{|\mathbb{X} - E(\mathbb{X})|}{\varepsilon} \geq 1\right) = p\left(\frac{|\mathbb{X} - E(\mathbb{X})|^2}{\varepsilon^2} \geq 1\right).$$

Podle první Čebyševovy nerovnosti pro náhodnou veličinu s nezápornými hodnotami platí

$$p\left(\frac{|\mathbb{X} - E(\mathbb{X})|^2}{\varepsilon^2} \geq 1\right) \leq E\left(\frac{|\mathbb{X} - E(\mathbb{X})|^2}{\varepsilon^2}\right) = \frac{D(\mathbb{X})}{\varepsilon^2}.$$

Je tedy

$$1 - p(|\mathbb{X} - E(\mathbb{X})| < \varepsilon) \leq \frac{D(\mathbb{X})}{\varepsilon^2}.$$

Po úpravě dostaneme tvrzení věty. □

Příklad 2.148. Pomocí druhé Čebyševovy nerovnosti odhadněte pravděpodobnost

$$p(|\mathbb{X} - E(\mathbb{X})| < 0.1)$$

pro náhodnou veličinu $\mathbb{X}$ s rozložením $E(3, \frac{1}{20})$.

Řešení. Pro náhodnou veličinu s exponenciálním rozložením $E(A, d)$ platí

$$E(\mathbb{X}) = A + d \Rightarrow E(\mathbb{X}) = 3 + \frac{1}{20} = 3.05,$$

$$D(\mathbb{X}) = d^2 \Rightarrow D(\mathbb{X}) = 0.0025.$$

Dosadíme

$$p(|\mathbb{X} - E(\mathbb{X})| < \varepsilon) = p(|\mathbb{X} - 3.05| < 0.1) \geq 1 - \frac{0.0025}{0.01} = 1 - 0.25 = 0.75.$$

□

Věta 2.149. Bernouliova věta, Zákon velkých čísel
Nechť náhodná veličina $\mathbb{X}$ má rozložení $Bi(n,p)$, potom pro libovolné $\varepsilon > 0$ platí

$$p\left(\left|\frac{\mathbb{X}}{n} - p\right| < \varepsilon\right) \geq 1 - \frac{p(1-p)}{n\varepsilon^2}.$$

Důkaz. Podle druhé Čebyševovy nerovnosti platí

$$p\left(\left|\frac{\mathbb{X}}{n} - E\left(\frac{\mathbb{X}}{n}\right)\right| < \varepsilon\right) \geq 1 - \frac{D\left(\frac{\mathbb{X}}{n}\right)}{\varepsilon^2}.$$

Náhodná veličina $\mathbb{X}$ má binomické rozložení $Bi(n,p)$ a proto

$$E(\mathbb{X}) = np, \quad D(\mathbb{X}) = np(1-p).$$

Podle věty 2.92 máme

$$E\left(\frac{\mathbb{X}}{n}\right) = E\left(\frac{1}{n}\mathbb{X}\right) = \frac{1}{n}E(\mathbb{X}) = \frac{1}{n}np = p,$$

$$D\left(\frac{\mathbb{X}}{n}\right) = \frac{1}{n^2}D(\mathbb{X}) = \frac{1}{n^2}np(1-p) = \frac{p(1-p)}{n}.$$

Po dosazení dostaneme

$$p\left(\left|\frac{\mathbb{X}}{n} - E\left(\frac{\mathbb{X}}{n}\right)\right| < \varepsilon\right) = \left(\left|\frac{\mathbb{X}}{n} - p\right| < \varepsilon\right) \geq 1 - \frac{D\left(\frac{\mathbb{X}}{n}\right)}{\varepsilon^2} = 1 - \frac{p(1-p)}{n\varepsilon^2}.$$

□

Důsledek 2.150. *Nechť náhodná veličina $\mathbb{X}$ má rozložení $Bi(n,p)$, potom pro libovolné $\varepsilon > 0$ platí*

$$\lim_{n\to+\infty} p\left(\left|\frac{\mathbb{X}}{n} - p\right| < \varepsilon\right) = 1.$$

Příklad 2.151. Mějme náhodnou veličinu s binomickým rozložením $Bi(1000; 0.514)$. Určete:
a) Pravděpodobnost, že relativní četnost se bude od pravděpodobnosti lišit o méně než 0.02.
b) Kolik musíme udělat pokusů, aby jsme s pravděpodobností alespoň 0.95 mohli očekávat, že se relativní četnost bude lišit od pravděpodobnosti o méně než 0.02?

Řešení. Náhodná veličina $\mathbb{X}$ má binomické rozložení $Bi(n,p)$ a proto

$$E(\mathbb{X}) = np, \quad D(\mathbb{X}) = np(1-p).$$

Relativní četnost je veličina $\frac{\mathbb{X}}{n}$.
a) Podle Bernoulliovy věty máme

$$p\left(\left|\frac{\mathbb{X}}{n} - p\right| < \varepsilon\right) \geq 1 - \frac{p(1-p)}{n\varepsilon^2}.$$

Dosazením dostaneme

$$p\left(\left|\frac{\mathbb{X}}{1000} - 0.514\right| < 0.02\right) \geq 1 - \frac{0.514(1-0.514)}{1000 \cdot 0.02^2} = 0.3755.$$

b) Opět podle Bernouliovy věty máme

$$p\left(\left|\frac{\mathbb{X}}{n} - 0.514\right| < 0.02\right) \geq 1 - \frac{0.514(1-0.514)}{n \cdot 0.02^2} \geq 0.95.$$

Vyřešíme poslední nerovnost

$$1 - \frac{0.514(1-0.514)}{n \cdot 0.02^2} \geq 0.95$$

a dostaneme

$$n \geq 12490.$$

□

Věta 2.152. Lindebergova - Levyho věta, Centrální limitní věta
Nechť $\mathbb{X}_1, \mathbb{X}_2, \ldots, \mathbb{X}_n$ jsou navzájem nezávislé náhodné veličiny, které mají všechny stejnou střední hodnotu μ a stejný rozptyl σ^2. Potom pro dostatečně velké n má náhodná veličina

$$\mathbb{Y} = \frac{\mathbb{X}_1 + \mathbb{X}_2 + \cdots + \mathbb{X}_n - n\mu}{\sigma\sqrt{n}}$$

přibližně normální rozložení $No(0,1)$.

Důsledek 2.153. *Nechť $\mathbb{X}_1, \mathbb{X}_2, \ldots, \mathbb{X}_n$ jsou navzájem nezávislé náhodné veličiny, které mají všechny stejnou střední hodnotu μ a stejný rozptyl σ^2. Potom pro dostatečně velké n pro náhodnou veličinu $\mathbb{Y} = \mathbb{X}_1 + \mathbb{X}_2 + \cdots + \mathbb{X}_n$ a pro libovolné $x_1, x_2 \in \mathbb{R}, x_1 < x_2$ platí*

$$p(x_1 \leq \mathbb{Y} \leq x_2) \doteq \Phi\left(\frac{x_2 - n\mu}{\sigma\sqrt{n}}\right) - \Phi\left(\frac{x_1 - n\mu}{\sigma\sqrt{n}}\right).$$

$$E(\mathbb{Y}) = n\mu, \quad D(\mathbb{Y}) = n\sigma^2.$$

Věta 2.154. Moivreova - Laplaceova věta
Nechť náhodná veličina $\mathbb{X}$ má binomické rozložení $Bi(n,p)$. Jestliže je n dostatečně velké a p není blízké ani k nule ani k jedné, potom lze toto binomické rozložení aproximovat normálním rozložením $No(\mu, \sigma)$, kde $\mu = np, \sigma = \sqrt{np(1-p)}$.

Důsledek 2.155. *Nechť $\mathbb{X}$ má binomické rozložení $Bi(n,p)$. Potom pro dostatečně velké n, v praxi $n > 30$, p které není blízké ani k nule ani k jedné a pro libovoln $x_1, x_2 \in \mathbb{R}, x_1 < x_2$ platí*

$$p(x_1 \leq \mathbb{X} \leq x_2) \doteq \Phi\left(\frac{x_2 - np}{\sqrt{np(1-p)}}\right) - \Phi\left(\frac{x_1 - np}{\sqrt{np(1-p)}}\right).$$

$$E(\mathbb{X}) = n\mu, \quad D(\mathbb{X}) = n\sigma^2.$$

Aproximace se považuje za vyhovující pro

$$np(1-p) > 9 \quad a \quad \frac{1}{n+1} < p < \frac{n}{n+1}.$$

Příklad 2.156. Pravděpodobnost nastoupení jevu A v každém pokuse je rovna 0.7. Pomocí Moivre-Laplaceovy věty odhadněte, kolikrát musíme opakovat pokus, abychom s pravděpodobností 0.9 mohli očekávat, že se relativní četnost bude odlišovat od pravděpodobnosti o méně než 0.05?

Řešení. Máme náhodnou veličinu s binomickým rozložením, které můžeme aproximovat normálním rozložením.

$$\left|\frac{X}{n} - 0.7\right| < 0.05,$$

$$0.65n < X < 0.75n.$$

$$p(0.65n < X < 0.75n) = \Phi\left(\frac{0.75n - 0.7n}{\sqrt{n \cdot 0.7 \cdot 0.3}}\right) - \Phi\left(\frac{0.65n - 0.7n}{\sqrt{n \cdot 0.7 \cdot 0.3}}\right) =$$

$$\Phi\left(\frac{0.05n}{\sqrt{n \cdot 0.7 \cdot 0.3}}\right) - \Phi\left(-\frac{0.05n}{\sqrt{n \cdot 0.7 \cdot 0.3}}\right) = 2\Phi\left(\frac{0.05n}{\sqrt{n \cdot 0.7 \cdot 0.3}}\right) - 1 = 0.9$$

$$\Phi\left(\frac{0.05n}{\sqrt{n \cdot 0.7 \cdot 0.3}}\right) = 0.95$$

$$\frac{0.05\sqrt{n}}{\sqrt{21}} = 1.645$$

$$n = 228.65$$

Musíme provést alespoň 229 pokusů.
Podle přesnosti Vámi použitých hodnot Laplaceovy funkce se může numerický výsledek odlišovat

□

Příklad 2.157. Bylo provedeno 100 nezávislých pokusů. Pravděpodobnost nastoupení jevu A je v každém pokuse rovna 0.2. Určete pravděpodobnost, že počet nastoupení jevu A bude větší než 15 a menší než 30.

Řešení. Náhodná veličina udávající počet nastoupení jevu A má binomické rozložení $Bi(100; 0.2)$. Budeme je aproximovat normálním rozložením $No(\mu, \sigma)$, kde

$$\mu = np = 100 \cdot 0.2 = 20,$$

$$\sigma = \sqrt{np(1-p)} = \sqrt{100 \cdot 0.2 \cdot 0.8} = \sqrt{16} = 4.$$

Proto

$$p\,(15 < \mathbb{X} < 30) = \Phi\left(\frac{30-20}{4}\right) - \Phi\left(\frac{15-20}{4}\right) =$$

$$\Phi(2.5) - \Phi(-1.5) = 0.99379 - (1 - 0.89435) = 0.88814.$$

□

Příklad 2.158. Pravděpodobnost nastoupení jevu A je v každém pokusu rovna p. Jestliže je n dostatečně velké ($n > 100$), jak je pravděpodobnost, že počet nastoupení jevu A bude od α do β.

Řešení. Pomocí Moivre-Laplaceovy věty

$$P(\alpha < x < \beta) = P\left(\frac{\alpha - np}{\sqrt{np(1-p)}} < \frac{x - np}{\sqrt{np(1-p)}} < \frac{\beta - np}{\sqrt{np(1-p)}}\right) =$$

$$= \Phi\left(\frac{\beta - np}{\sqrt{np(1-p)}}\right) - \Phi\left(\frac{\alpha - np}{\sqrt{np(1-p)}}\right).$$

□

Věta 2.159. Poissonova
Mějme posloupnost $\{\mathbb{X}_n\}$ *náhodných veličin s rozložením* $Bi(n, p_n), n = 1, 2 \ldots$. *Nechť* $p_n \to 0$ *pro* $n \to +\infty$ *a* $\lim\limits_{n\to+\infty} np_n = \lambda$, *kde* $\lambda > 0$ *je konstanta. Potom*

$$\lim_{n\to+\infty} p(\mathbb{X}_n = i) = \lim_{n\to+\infty} \binom{n}{i} p^i (1-p)^{n-i} = \frac{\lambda^i}{i!} \mathrm{e}^{-\lambda}.$$

Neboli binomické rozložení v limitě přechází v Poissonovo.
V praxi pro $n > 30$ a $p < 0.1$ můžeme $Bi(n, p)$ aproximovat rozložením $Po(\lambda = np)$ s chybou menší ne§ 10^{-2}.

Pojmy k zapamatování

- Definovali jsme si pravděpodobnost a odvodili si její základní vlastnosti.
- Zavedli jsme si náhodnou veličinu a ulázali si, jak se s ní pracuje.
- Uvedli sme si některé nejužívanější rozložení diskrétních i spojitých náhodných veličin.
- Speciální pozornost jsme věnovali normálnímu rozložení.
- Seznámili jsme se s limitními větami.

Kontrolní otázky

1. Co rozumíme pojmem rozptyl?
2. K čemu nám slouží náhodná veličina?
3. Kde se všude můžete setkat s normálním rozložením?

Cvičení

1. Obrazovka radaru je kruhová o poloměru r. Při zapnutí se na ní náhodně objeví svítící bod znamenající letící objekt. Určete pravděpodobnost, že svítící bod bude od středu obrazovky vzdálen o méně než $\frac{r}{2}$.

2. Náhodná veličina $\mathbb{X}$ má funkci hustoty

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{a}{\sqrt{a^2 - x^2}}, & |x| < a, \\ 0, & |x| \geq a. \end{cases}$$

   Určete 1) parametr a, 2) pravděpodobnost, že náhodná veličina $\mathbb{X}$ bude ležet v intervalu $\left(\frac{a}{2}, a\right)$.

3. Může být pro některou spojitou náhodnou veličinu $\mathbb{X}$
   a) distribuční funkce větší než 1?
   b) funkce hustoty větší než 1?
   c) distribuční funkce záporná?
   d) funkce hustoty záporná?

4. Náhodná veličina $\mathbb{X}$ má Laplaceovo rozložení s funkcí hustoty
$$f(x) = a \cdot e^{-\lambda|x|},$$
kde $\lambda > 0$ je konstanta příslušná k danému rozložení. Určete a) paramatr a, b) distribuční funkci, c)$E(\mathbb{X})$, d) $D(\mathbb{X})$.

5. Továrna vyrobí za směnu 20 000 diod. Pravděpodobnost výroby vadné diody je 0.02. Jaká je pravděpodobnost, že počet vadných diod za směnu bude nejvýše 450.

6. Továrna vyrobí za směnu 15 000 čipů. Pravděpodobnost výroby vadného čipu je 0.03. Jak je pravděpodobnost, že počet vadných čipů za směnu bude nejvýše 475.

7. Je dána funkce
$$f(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ ax^2, & 0 \le x < 1, \\ a(2-x)^2, & 1 \le x < 2, \\ 0, & x \ge 2. \end{cases}$$
Určete: a) parametr a tak, aby funkce $f(x)$ byla funkcí hustoty, b) střední hodnotu, rozptyl a směrodatnou odchylku, c) koeficienty šikmosti a špičatosti.

8. Pravděpodobnost poruchy stroje za dobu T je rovna 0.2. Určete pravděpodobnost, že ze 100 strojů stejného typu, které pracují nezávisle na sobě, bude mít poruchu 14 až 26 strojů. Řešte a) pomocí binomického rozložení, b) pomocí Čebyševovy nerovnosti, c) pomocí Moivre-Laplaceovy věty.

9. Odhadněte pomocí Moivre-Laplaceovy věty, kolik je třeba provést nezávislých pokusů, abychom s pravděpodobností 0.8 získali alespoň pětkrát kladný výsledek, jestliže při každém pokusu nastane kladný výsledek s pravděpodobnostˇ 0.05.

10. Náhodná veličina $\mathbb{X}$ má pro $x > 0$ funkci hustoty $f(x) = Axe^{-h^2x^2}$, kde $h > 0$ je parametr, a pro $x \le 0$ je $f(x) = 0$. Určete 1) koeficient A, 2) modus $\mathcal{M}$, 3) střední hodnotu a rozptyl 4) pravděpodobnost, že náhodná veličina bude menší než $\mathcal{M}$.

11. Odhadněte pomocí Moivre-Laplaceovy věty, kolik je třeba provést nezávislých pokusů, abychom s pravděpodobnostˇ 0.9 získali alespoň šestkrát kladný výsledek, jestliže při každém pokusu nastane kladný výsledek s pravděpodobností 0.04.

12. Pro náhodnou veličinu X, která má rozložení $F(2, k)$ určete
1)$P(X \ge x)$, 2) distribuční funkci.

13. Náhodný pokus spočívá ve vytažení 4 karet z důkladně promíchané sady 32 karet. Určete pravděpodobnost, že budou vytaženy karty červeá sedma, zelená desítka, žaludský král a kulové eso v uvedeném pořadí.

14. Máme 10 krabic. V každé je 10koulí. V i-té krabici je i černých a $10-i$ bílých koulí. Náhodně vybereme krabici a z ní vyjmeme jednu kouli. Jak je pravděpodobnost, že bude černá?

Výsledky

1. Použijeme geometrickou pravděpodobnost

$$p(A) = \frac{S_A}{S_\Omega} = \frac{\pi\frac{r^2}{4}}{\pi r^2} = \frac{1}{4}.$$

2. 1) Parametr a určíme z podmínky pro funkci hustoty

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1.$$

Proto

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int_{-a}^{a} \frac{a}{\sqrt{a^2 - x^2}}dx = 1 \Rightarrow a = \frac{1}{\pi}.$$

2)$p\left(\frac{\frac{1}{\pi}}{2} < \mathbb{X} < \frac{1}{\pi}\right) = \frac{1}{3}$.

3. Přímo z definice plyne: a)ne, b) ano, c)ne, d) ne.

4.

$$a = \frac{\lambda}{2},$$

$$F(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}e^{-\lambda x}, & x \geq 0 \\ 1 - \frac{1}{2}e^{-\lambda x}, & x > 0 \end{cases}$$

$$E(\mathbb{X}) = 0,$$

$$D(\mathbb{X}) = \frac{2}{\lambda^2}.$$

5. Máme $n = 20000, p = 0.02$. Potom

$$\bar{x} = np = 20000 \cdot 0.02 = 400, \sigma = \sqrt{np(1-p)} = 19.79898987.$$

$$p(\mathbb{X} \leq 450) = F(450) = \Phi\left(\frac{450 - 400}{19.79898987}\right) = \Phi(2.52538136179) = 0.99413.$$

6. Máme $n = 15000, p = 0.03$, potom

$$\bar{x} = np = 15000 \cdot 0.03 = 450, \sigma = \sqrt{np(1-p)} = 20.893.$$

$$p(\mathbb{X} \leq 475) = F(475) = \Phi\left(\frac{475 - 450}{20.893}\right) = \Phi(1.196573) = 0.884268.$$

7.

$$1 = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = a\int_0^1 x^2dx + a\int_1^2 (2-x)^2dx = a\frac{x^3}{3}\bigg|_0^1 - a\frac{(2-x)^3}{3}\bigg|_1^2 = \frac{a}{3} + \frac{a}{3}.$$

Odtud $a = \frac{3}{2}$.

$$m_1 = E(X) = \frac{3}{2}\int_0^1 x^3dx + \frac{3}{2}\int_1^2 x(2-x)^2dx = \frac{3}{2}\frac{1}{4} + \frac{3}{2}\left(6 - \frac{28}{3} + \frac{15}{4}\right) = 1,$$

$$m_2 = \frac{3}{2}\int_0^1 x^4 dx + \frac{3}{2}\int_1^2 x^2(2-x)^2 dx = \frac{3}{10} + 14 + \frac{45}{2} = 1.1,$$
$$m_3 = \frac{3}{2}\int_0^1 x^5 dx + \frac{3}{2}\int_1^2 x^3(2-x)^2 dx = \frac{1}{4} + \frac{45}{2} - \frac{186}{5} + \frac{63}{4} = 1.3,$$
$$m_4 = \frac{3}{2}\int_0^1 x^6 dx + \frac{3}{2}\int_1^2 x^4(2-x)^2 dx = \frac{3}{14} + \frac{186}{5} - 63 + \frac{381}{14} = 1\frac{22}{35}.$$
$$M_1 = 0,$$
$$M_2 = m_2 - (m_1)^2 = 0.1,$$
$$M_3 = m_3 - 3m_1m_2 + 2(m_1)^3 = 0,$$
$$M_4 = m_4 - 4m_1m_3 + 6(m_1)^2m_2 - 3(m_1)^4 = \frac{1}{35}.$$

Potom

$$E(X) = m_1 = 1, D(X) = M_2 = 0.1, \sigma = \sqrt{D(X)}, k_1 = \frac{M_3}{\sigma^3} = 0,$$
$$k_2 = \frac{M_4}{\sigma_4} - 3 = \frac{\frac{1}{35}}{0.01} - 3 = -\frac{1}{7}.$$

8.

$$p(14 \le X \le 26) = p(|X-20| \le 6) = p(|X-20| < 7).$$

a) Přímý výpożet pomocí biomického rozložení je velmi zdlouhavý!

$$p(14 \le X \le 26) = \sum_{k=14}^{26} \binom{100}{k} \cdot 0.2^k 0.8^{100-k}$$

b) Podle Čebyševovy nerovnosti máme

$$p(|X-20| < 7) \ge 1 - \frac{np(1-p)}{\varepsilon^2} = 1 - \frac{100 \cdot 0.2 \cdot 0.8}{7^2} = 1 - \frac{16}{49} = 0.6735...$$

c) Podle Moivre-Laplaceovy věty máme:

$$p(14 \le X \le 26) = p\left(-1.5 \le \frac{x-20}{4} \le 1.5\right) = 2\Phi(1.5) - 1 = 0.8664...$$

9. Máme $Bi(n, 0.05)$ a máme určit n.

$$P(5 \le X < n) = \Phi\left(\frac{n - 0.05n}{\sqrt{n 0.05 \cdot 0.95}}\right) - \Phi\left(\frac{5 - 0.05n}{\sqrt{n 0.05 \cdot 0.95}}\right) = 0.8,$$
$$\Phi\left(\sqrt{n}\cdot\sqrt{19}\right) - \Phi\left(\frac{5 - 0.05n}{\sqrt{n 0.05 \cdot 0.95}}\right) = 0.8,$$

protože je $n > 5$ je $\sqrt{n}\cdot\sqrt{19} > 4$ a proto můžeme předpokládat, že $\Phi(\sqrt{n}\cdot\sqrt{19}) = 1$. Potom

$$1 - \Phi\left(\frac{5 - 0.05n}{\sqrt{n 0.05 \cdot 0.95}}\right) = 0.8,$$
$$\Phi\left(\frac{5 - 0.05n}{\sqrt{0.0475n}}\right) = 0.2,$$
$$\frac{5 - 0.05n}{\sqrt{0.0475n}} = -0.8416,$$
$$n \ge 144.$$

10. 1)

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1 \Rightarrow A = 2h^2.$$

2)

$$\mathcal{M} = \frac{1}{h\sqrt{2}}$$

3)

$$E(X) = \frac{\sqrt{\pi}}{2h}, \quad D(X) = \frac{4-\pi}{4h^2}$$

4)

$$P(X < \mathcal{M}) \approx 0.393.$$

11. Máme $Bi(n, 0.04)$ a máme určit n.

$$P(6 \leq X < n) = \Phi\left(\frac{n - 0.04n}{\sqrt{n0.04 \cdot 0.96}}\right) - \Phi\left(\frac{6 - 0.04n}{\sqrt{n0.04 \cdot 0.96}}\right) = 0.9,$$

$$\Phi\left(\sqrt{n} \cdot \sqrt{24}\right) - \Phi\left(\frac{6 - 0.04n}{\sqrt{n0.04 \cdot 0.96}}\right) = 0.9,$$

protože je $n > 6$ je $\sqrt{n} \cdot \sqrt{24} > 5$ a proto můžeme předpokládat, že $\Phi(\sqrt{n} \cdot \sqrt{24}) = 1$. Potom

$$1 - \Phi\left(\frac{6 - 0.04n}{\sqrt{n0.04 \cdot 0.96}}\right) = 0.9,$$

$$\Phi\left(\frac{6 - 0.04n}{\sqrt{0.0384n}}\right) = 0.1,$$

$$\frac{6 - 0.04n}{\sqrt{0.0384n}} = -1.289,$$

$$n \geq 247.$$

12. Prostým dosazením dostaneme
1)$P(X \geq x) = (1 + \frac{2x}{k})^{-k/2}$
2)

$$F(x) = 1 - \left(1 - \frac{2x}{k}\right)^{-\frac{k}{2}}.$$

13.

$$P = \frac{1}{32} \cdot \frac{1}{31} \cdot \frac{1}{30} \cdot \frac{1}{29} = 1.1587 \cdot 10^{-6}.$$

14. Použijeme větu o úplné pravděpodobnosti.
Označme A vytažení černé koule. Pravděpodobnost výběru i-té krabice je

$$p(B_i) = \frac{1}{10}.$$

Jevy B_i, $i = 1, 2. \ldots, 10$ tvoří úplný systém jevů. Proto

$$P(A) = \sum_{i=1}^{10} p_{B_i}(A) p(B_i) = \sum_{i=1}^{10} \frac{i}{10} \frac{1}{10}.$$

Maplety

V následujících mapletech si můžete některé studované pojmy přiblížit, případně si sestavit vlastní zadání příkladů.

1. Opakování pojmů z kombinatoriky
2. Binomické rozložení pravděpodobnosti
3. Aproximace binomického rozložení normálním
4. Exponenciální rozložení pravděpodobnosti
5. Geometrické rozložení pravděpodobnosti
6. Hypergeometrické rozložení pravděpodobnosti
7. Normální rozložení pravděpodobnosti
8. Kvantily normálního rozložení pravděpodobnosti
9. Poissonovo rozložení pravděpodobnosti
10. Fisher-Snedocorovo rozložení pravděpodobnosti
11. Studentovo rozložení pravděpodobnosti
12. Distribuční a frekvenční (pravděpodobnostní) funkce
13. Určitý integrál
14. Integrování
15. Derivování

3 Náhodné procesy

Průvodce studiem

Budeme se zabývat některými typy náhodných procesů. Ukážeme si jejich rozdělení a některé způsoby řešení problémů, které tyto procesy popisují.

V předchozí kapitole jsme se zabývali teorií pravděpodobností. Vždy jsme přepokládali, že náhodná veličina, náhodná proměnná dosáhne během pokusu některou, předem nám neznámou, hodnotu, ale tato hodnota bude pouze jedna jediná. Tento postup ale nevyhovuje při popisu řady dalších jevů, protože zanedbává závislost náhodné proměnné na čase.

S náhodnými procesy, které závisejí na čase, se můžeme setkat v řadě oblastí vědy, techniky a vyskytují se i v normálním životě, jenom o tom každý neví.

Vezměme si hromadění se prvků, které mají projít určitým systémem, ošetřením, tj. procesy hromadné obsluhy. Typickým příkladem je fronta zákazníků před pokladnou, počet vozidel před křižovatkou, zatížení telefonního uzlu. Dalším příkladem mohou být modely obnovy, tedy proces kdy dochází k postupnému vyřazování prvků ze souboru a jejich nahrazení jinými prvky. V demografii se takovými prvky rozumí úmrtí a narození.

Úvahy o nutnosti vybudovat teorii nádodnýxh procesů vyslovil už A. Poincaré (1854 - 1912). První náznaky realizace je možné nalézt u L. Bacheliera (1870). Skutečné vybudování matematických základů náhodných procesů je spojeno se jmény A.A. Markova (1856 - 1922), A.J. Chinčina (1894 - 1959) a A.N. Kolmogorova (1903 - 1987).

Cíle

Po prostudování této kapitoly budete schopni:

- Rozeznat deterministický a náhodný proces.
- Sestavit matici Markovského řetezce.
- Odlišit od sebe homogenní a nehomogenní Markovské řeězce.

3.1 Základní pojmy

Procesem budeme rozumět každý děj, který může probíhat v technické, ekonomické a matematické oblasti. Přitom jednotlivé procesy můžeme rozdělit na disjunktní třídy (tj. každý proces je možné jednoznačně zařadit do právě jedné třídy). Rozeznáváme procesy

- deterministické
- náhodné
- smíšené

Deterministický proces – vždy jej můžeme popsat nebo předpokládat o jaký proces se jedná. Pro funkci času $f(t), t \in \{0, 1, 2...n\}$, nebo $f(t), t \in \langle a, b \rangle, a < b, a, b \in \mathbb{R}$, vždy budeme znát její hodnotu. Jinak řečeno: u deterministického procesu při daných vstupních podmínkách vždy dokážeme určit výsledek procesu.

Příklad 3.1. Měděnou spirálu připojíme ke zdroji. Znamená to, že spirálou poteče proud a spirála se začne ohřívat. Můžeme změřit proud a napětí zdroje a na základě toho můžeme určit, jakým způsobem se šíří teplo ve spirále, jaký je její tepelný výkon atd. Jedná se o deterministický proces.

Náhodný proces (stochastický proces) - pro každé „t" budeme znát jen pravděpodobnost s níž může daný případ nastat.

Příklad 3.2. Turbulence v atmosféře, počasí, atd.

Obchodní strategie, restrukturalizace podniku, výroby a její dopad na míru zisku, atd.

Působení léků.

Vedlejší účinky léku.

V přemětu Matematika 3 jste se setkali s opakovanými pokusy (Bernouliovská posloupnost pokusů), kdy v každém pokusu nastal sledovaný jev vždy se stejnou pravděpodobností. V praxi se však velmi často setkáváme s tím, že výsledek jednoho pokusu závisí na výsledcích předchozích pokusů. Budeme se tím nyní zabývat.

Obecný náhodný proces je množina náhodných veličin, která závisí na určitém počtu parametrů a ty jsou definovány na množině reálných čísel.

Uvedeme si nyní přesnou definici pojmu.

Definice 3.3. Nechť $(\Omega; \mathcal{A}; P)$ je pravděpodobnostntní prostor, nechť $T \subset \mathbb{R}$. Posloupnost reálných náhodných veličin $\{X_t; t \in T\}$ definovaných na $(\Omega; \mathcal{A}; P)$ se nazývá náhodný proces.

Definice 3.4. Pro $T = \mathbb{Z} = \{0; \pm 1; \pm 2; \dots\}$ nebo $T \subset \mathbb{Z}$ máme proces s diskrétním časem, neboli časovou řadu.
Pro $T = [a; b]$, kde $-\infty < a < b < +\infty$ je $\{X_t; t \in T\}$ proces se spojitým časem.

Definice 3.5. Dvojice $(S; \mathcal{E})$, kde S je množina hodnot náhodných veličin X_t a $\mathcal{E}$ je σ-algebra podmnožin S, se nazývá stavový prostor procesu $\{X_t; t \in T\}$. Pokud náhodné veličiny X_t nabývají pouze diskrétních hodnot, říkáme, že jde o proces s diskrétními stavy, nabývají-li hodnot z nějakého intervalu, mluvíme o procesu se spojitými stavy.

Vždycky se budeme rozhodovat podle toho, jestli budeme pracovat s diskrétním časem nebo s časem spojitým.

Náhodné procesy jsou založeny na pravděpodobnosti, na náhodě, nebo jinak řečeno na nejistotě. To je jejich hlavní odlišnost od deterministických procesů, které nám dávají za shodných vstupních podmínek vždy stejný výsledek.

Obecný náhodný proces bude pro nás množina náhodných veličin, které zavisí na určitém počtu parametrů, které budeme brát z množiny reálných čísel.

V aplikacích (technických, ekonomických, ...) se pracuje především s náhodnými procesy, které závisí na jedné proměnné - na čase. Takové náhodné procesy budeme nazývat *stochastickými*.

Jestliže pracujeme s diskrétní množinou proměnných (diskrétní časová množina, např. sled měření s přesně určeným intervalem mezi jednotlivými měřeními), potom se stochastický proces nazývá **Markovský řetězec**, nebo Markovův řetězec[1]. Jestliže pracujeme se spojitou proměnnou (spojitým časem), potom mluvíme o Markovském procesu se spojitým časem.

3.2 Markovské řetězce

Jedná se o nejjednodušší typ z Markovských procesů. Předpokládáme, že máme diskrétní množinu hodnot (například diskrétní časovou množinu) a jí odpovídající diskrétní množinu výsledků - stavů.

Máme diskrétní čas i diskrétní stavy. Markovské řetězce (MŘ) používáme pro popis systémů, které se mohou nacházet v daný čas v jednom z konečného počtu stavů, respektive v jednom z nekonečného, ale spočetného počtu stavů.

Příklad 3.6. Připomeneme si:
Množina celých kladných čísel: $Z^+ = \{1, 2, 3...\}$ je nekonečná, ale spočetná.
Pouze nekonečná množina se dá bijektivně zobrazit na svoji podmnožinu.

$$2 \cdot Z^+ = \{2, 4, 6...\}$$

$$\forall a \in Z = 2a \in 2Z$$

$$2Z^+ \subset Z^+$$

[1] A.A. Markov (1850 -1932), ruský a sovětský matematik. V roce 1907 zavedl základní pojmy náhodných procesů s diskrétním časem a konečným počtem stavů. V roce 1936 A.N. Kolmogorov zobecnil tyto pojmy pro spočetnou množinu stavů. V současné době je teorie Markovských procesů jednou z nejrozšířenějších částí aplikací teorie pravděpodobnosti.

Nekonečná množina je spočetná, jestliže množinu dokážeme očíslovat a tím spočítat.
Množina racionálních čísel je spočetná.
Množina reálných čísel je nespočetná.

Uvedeme si nyní přesnou definici:

Definice 3.7. Markovská vlastnost.
Řekneme, že posloupnost náhodných pokusů, respektive posloupnost diskrétních náhodných proměnných

$$\{X_n,\ n = 0, 1, 2, \dots\}, \tag{3.1}$$

které nabývají pouze hodnot z množiny celých nezáporných čísel, tvoří Markovský řetězec, jestliže pro každé $n \in \{0, 1, 2, \dots\}$ a pro každou posloupnost celých nezáporných čísel $x_0, x_1, x_2, \dots, x_n$ platí

$$p\left(X_n = x_n / X_0 = x_0, X_1 = x_1, \dots, X_{n-1} = x_{n-1}\right) = p\left(X_n = x_n / X_{n-1} = x_{n-1}\right), \tag{3.2}$$

kde výraz $p(A/B)$ označuje podmíněnou pravděpodobnost jevu A za podmínky, že nastal jev B.

Jinak řečeno: Předpokládejme, že máme náhodný proces, který v čase t nabývá hodnot $s(t) = a$, kde a je celé nezáporné číslo. Potom platí

$$p\left(s(n) = i / s(n-1) = j, s(n-2) = k, \dots, s(1) = l, s(0) = m\right) =$$

$$= p\left(s(n) = i / s(n-1) = j\right).$$

Neboli pravděpodobnost, že v momentě n nastane jev i za předpokladu, že se v předešlých dobách (okamžicích měření) vyskytovaly různé jiné stavy je určena pouze stavem v době $n-1$. Mluvíme potom o podmíněné pravděpodobnosti přechodu ze stavu j do stavu i, ke kterému došlo v době od $n-1$ do n.

Pro pravděpodobnosti přechodu platí

$$0 \le p_{ij} \le 1, \quad i, j = 0, 1, 2, \dots \tag{3.3}$$

$$\sum_{i=0}^{+\infty} p_{ij} = 1, \quad i, j = 0, 1, 2, \dots \tag{3.4}$$

Pravděpodobnosti přechodu se obvykle udávají ve formě tzv. matice pravděpodobností přechodu:

$$\mathbb{P} = \begin{pmatrix} p_{00} & p_{01} & p_{02} & \dots \\ p_{10} & p_{11} & p_{12} & \dots \\ p_{20} & p_{21} & p_{22} & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}.$$

$\mathbb{P}$ je čtvercová matice konečného nebo nekonečného stupně. Pro její prvky platí podle (3.3), že jsou nezáporné a podle (3.4) je řádkový součet vždy roven jedné.

Definice 3.8. Každá matice s těmito vlastnostmi (všechny prvky jsou nezáporné a řádková součet je vždy roven jedné) se nazývá *stochastickou maticí.* Pokud je navíc i každý sloupcový součet roven jedné, potom mluvíme o *dvojnásobně stochastické matici.*

Věta 3.9. *Libovolná mocnina stochastické matice je opět stochastickou maticí.*

Součin dvou stochastických matic je opět stochastickou maticí.

Důkaz. Mějme dvě stochastické matice téhož řádu n.

$$A = (a_{ij}), \quad \sum_{j=1}^{n} a_{ij} = 1, \forall n,$$

$$B = (b_{ij}), \quad \sum_{j=1}^{n} b_{ij} = 1, \forall n.$$

Potom

$$A \cdot B = C = (c_{ij}), \text{ kde } c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj}.$$

$$\sum_{i=1}^{n} c_{ij} = \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj} \right) = \sum_{k=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} a_{ik} b_{kj} = \sum_{k=1}^{n} b_{kj} \sum_{k=1}^{n} a_{ik} = 1 \cdot 1 = 1.$$

Tím máme dokázané druhé tvrzení věty. První tvrzení se dokazuje analogicky. □

Chování celého systému je určeno

1. Vektorem absolutních pravděpodobností v počáteční moment

   $$\bar{\mathbf{p}}(0) = (p_1(0), p_2(0), \ldots, p_N(0)),$$

   kde $p_i(0)$ je pravděpodobnost, že v momentě 0 je systém ve stavu i.

2. Maticí pravděpodobnosti přechodu

   $$\mathbb{P} = (p_{ij}(n)),$$

   kde $p_{ij}(n)$ je podmíněná pravděpodobnost přechodu ze stavu i do stavu j mezi okamžiky $n-1$ a n, neboli $p\,(s(n) = j / s(n-1) = i)$.

Protože jednotlivé stavy tvoří úplná systém jevů, bude i pro počáteční vektor plati

$$0 \leq p_i(0) \leq 1, \quad \sum_{i} p_i(0) = 1.$$

Definice 3.10. V případe kdy pravděpodobnosti $p_{ij}(n)$ nebudou přímo záviset na hodnotě n, tj. nezávisí na okamžiku, kdy k přechodu došlo, potom mluvíme o **homogenním Markovském řetezci,** tj. $p_{ij}(n) = p_{ij}$.

Definice 3.11. Jestliže $p_{ij}(n)$ závisí na hodnotě n, pak mluvíme o **nehomogenním Markovském řetezci** .

Neboli u homogeního Markovského řetezce je matice pravděpodobností přechodů $\mathbb{P} = (p_{ij}(n)) = (p_{ij})$ konstantní maticí, která nezavisí na čase, zatímco u nehomogenního Markovského řetězce je matice pravděpodobností přechodů $\mathbb{P} = (p_{ij}(n))$ funkcí času.

Nechť ν je libovolné celé nezáporné číslo. Potom pravděpodobnost přechodu ze stavu i do stavu j za $n(n = 0, 1, 2, \dots)$ kroků označíme

$$p_{ij}^{(n)} = P\{s_{\nu+n} = j/s_\nu = i\}, \quad i, j = 0, 1, 2, \dots$$

přitom položíme

$$p_{ij}^{(1)} = p_{ij}.$$

Věta 3.12. *Nechť n, k jsou libovolná přirozená čísla a i, j jsou libovolná nezáporná čísla. Potom pro pravděpodobnosti přechodu platí vztahy*

$$p_{ij}^{(n+1)} = \sum_{\nu=0}^{\infty} p_{i\nu}^{(n)} \cdot p_{\nu j}. \tag{3.5}$$

$$p_{ij}^{(n+k)} = \sum_{\nu=0}^{\infty} p_{i\nu}^{(n)} \cdot p_{\nu j}^{(k)}. \tag{3.6}$$

Vztahy (3.5) a (3.6) se nazývají **Chapman-Kolmogorovy rovnice**

Věta 3.13. *Nechť $n \geq 2$ je libovolné přirozené číslo a nechť i, j jsou libovolná celá nezáporná čísla. Potom pro matici pravděpodobností přechodu platí*

$$\mathbb{P}^n = \{p_{ij}^{(n)}\}, \quad i, j = 1, 2, \dots, \tag{3.7}$$

kde $\mathbb{P}^n$ je n-tá mocnina matice pravděpodobností přechodu pro jeden krok $\mathbb{P}$.

Pojmy k zapamatování

– Definovali jsme si náhodný proces.
– Zavedli jsme si pojem Markovský řetězec.
– Uvedli jsme si základní Markovskou vlastnost, tj. stav systému v daný moment závisí pouze na stavu v předchozím momentu a ne na celé historii.
– Odvodili jsme si základní vlastnosti stochastických matic.

Kontrolní otázky

1. Co rozumíme pojmem stochastický proces?
2. Kdy je definován součin stochastických matic?
3. Co nám říkají Chapman-Kolmogorovy rovnice?

4 Homogenní Markovské řetězce

Průvodce studiem

V této kapitole se budeme zabývat homogenními Markovskými řetezci. Odvodíme si jejich základní vlastnosti.

Zavedeme si klasifikaci jednotlivých řetezců.

Cíle

Po prostudování této kapitoly budete schopni:

- Provést klasifikaci stavů.
- Určovat vektor absolutních pravděpodobností.
- Pracovat s maticí přechodů.

4.1 Základní pojmy

.

Mějme homogenní Markovský řetězec s maticí pravděpodobností přechodů $\mathbb{P} = (p_{ij})$. Potom platí:

Věta 4.1. *Pravděpodobnosti p_{ij}, které vytvářejí matici pravděpodobnosti přechodů $\mathbb{P}$, musí splňovat následující podmínky.*

1. $p_{ij} \geq 0, \forall i, j \in \{0, 1, 2...N\}$;
2. $\sum\limits_{j=1}^{n} p_{ij} = 1, \forall i, j \in \{0, 1, 2...N\}$, *tj. každý řádek tvoří úplnou množinu jevů.*

Nyní můžeme Markovský řetězec popsat na základě znalosti vektoru $\bar{\mathbf{p}}(n)$, $n = 0, 1, 2, \dots,$ a matice $\mathbb{P} = (p_{ij})$ (matice přechodu) pomocí vztahu

$$\bar{\mathbf{p}}(n + 1) = \bar{\mathbf{p}}(n) \cdot \mathbb{P}.$$

Postupným dosazováním můžeme dojít k výrazu

$$\bar{\mathbf{p}}(n+1) = \bar{\mathbf{p}}(0) \cdot \mathbb{P}^{n+1}, \tag{4.1}$$

kde $\bar{\mathbf{p}}(0)$ – je vektor určující počáteční stav, $\mathbb{P}$- je čtvercová matice řádu N. Jinými slovy: jestliže známe pravděpodobnosti výskytu jednotlivých stavů v počátku Markovského procesu popsaného maticí $\mathbb{P}$, potom můžeme pomocí Markovský řetězec popsat pravděpodobnosti výskytu jednotlivých stavů v každém dalším momentě.

Důkaz. vztahu 4.1:

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{p}}(1) &= \bar{\mathbf{p}}(0) \cdot \mathbb{P}, \\ \bar{\mathbf{p}}(2) = \bar{\mathbf{p}}(1) \cdot \mathbb{P} = (\bar{\mathbf{p}}(0) \cdot \mathbb{P}) \cdot \mathbb{P} &= \bar{\mathbf{p}}(0) \cdot \mathbb{P}^2, \\ \bar{\mathbf{p}}(3) = \bar{\mathbf{p}}(2) \cdot \mathbb{P} = (\bar{\mathbf{p}}(0) \cdot \mathbb{P}^2) \cdot \mathbb{P} &= \bar{\mathbf{p}}(0) \cdot \mathbb{P}^3, \\ &\ldots\ldots \end{aligned}$$

Použitím matematické indukce dostaneme tvrzení. □

Poznámka 4.2. Připomínám, že násobení matic není komutativní, tj. obecně pro libovolné dvě matice A, B

$$A \cdot B \neq B \cdot A.$$

Takže vždy záleží na pořadí násobení.

Poznámka 4.3. Připomínám, že obecně nemůžeme vynásobit libovolné dvě matice. Jestliže máme matici $A = (a_{ij})$, kde $i = 1, \ldots, m$, $j = 1, \ldots, n$, tj. matice A má m řádků a n sloupců, a matici $B = (b_{kl})$, kde $k = 1, \ldots, p$, $l = 1, \ldots, q$, takže máme dvě matice typů (m, n) a (p, q), potom je definován součin $A \cdot B$ (v uvedeném pořadí) pouze tehdy, když $n = p$. Počet sloupců první matice se musí rovnat počtu řádků matice druhé. Výsledná matice je potom typu (m, q).

Příklad 4.4. Mějme MŘ se stavy „1“ a „2“. Nechť jsme v době „0“ ve stavu „1“. Pravděpodobnost tohoto jevu označíme $p_1(0)$. Jestliže budeme v době „0“ ve stavu „2“, potom označíme pravděpodobnost tohoto jevu $p_2(0)$.

V dalším momentu „1“ se můžeme ocitnout ve stavu „1“ dvojím způsobem: buď setrváním ve stavu „1“ a nebo přechodem do stavu „1“ ze stavu „2“. Potom

$$p_1(1) = p_1(0) \cdot p_{11} + p_2(0) \cdot p_{21} = \sum_i p_i(0) \cdot p_{i1},$$

kde p_{11}, p_{21} jsou prvky matice $\mathbb{P}$ (jde o první sloupec) a $p_1(0), p_2(0)$ jsou složky vektoru absolutních pravděpodobnoistí $\bar{\mathbf{p}}(0)$ v době „0“.

Jestliže v momentě „0“ může nastat více možností, bude mít vektor absolutních pravděpodobností více členů.

Pomocí vektoru absolutních pravděpodobností $\bar{\mathbf{p}}$ a matice $\mathbb{P}$ můžeme určit rozdělení pravděpodobností v libovolný moment pro každý z možných N stavů. Jednotlivé pravděpodobnosti $p_i(k), i = 1, 2, \ldots, N, k = 1, 2 \ldots$ počítáme pomocí vztahů:

$$\begin{aligned}
p_1(1) &= p_1(0)p_{11} + p_2(0)p_{21} + \cdots + p_N(0)p_{N1}, \\
p_2(1) &= p_1(0)p_{12} + p_2(0)p_{22} + \cdots + p_N(0)p_{N2}, \\
\ldots & \quad \ldots \\
p_N(1) &= p_1(0)p_{1N} + p_2(0)p_{2N} + \cdots + p_N(0)p_{NN}.
\end{aligned}$$

Nebo při maticovém zápisu

$$\bar{\mathbf{p}}(1) = \bar{\mathbf{p}}(0)\mathbb{P}.$$

Analogicky platí

$$\begin{gathered}
\bar{\mathbf{p}}(2) = \bar{\mathbf{p}}(1)\mathbb{P} = (\bar{\mathbf{p}}(0)\mathbb{P}) \cdot \mathbb{P} = \bar{\mathbf{p}}(0)\mathbb{P}^2, \\
\bar{\mathbf{p}}(3) = \bar{\mathbf{p}}(2)\mathbb{P} = \bar{\mathbf{p}}(0)\mathbb{P}^3, \\
\ldots \\
\bar{\mathbf{p}}(n) = \bar{\mathbf{p}}(0)\mathbb{P}^n.
\end{gathered}$$

Chování homogenních MŘ po konečném počtu časových intervalů je tedy popsáno pomocí vektoru výchozích absolutních pravděpodobností a mocnin matice přechodu.

Ptejme se: Jaká je pravděpodobnost přechodu ze stavu „i“ do stavu „j“ v průběhu „n“ časových intervalů?

Tyto pravděpodobnosti jsou dány prvky matice přechodu $\mathbb{P}^n$, označíme je $p_{ij}^{(n)}$ jde o prvky matice $\mathbb{P}^n$, ale nezískáme je pouhým umocněním prvků p_{ij}, ale jako prvek mocniny matice.

Příklad 4.5.

$$\begin{aligned}
A &= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \\
A^2 &= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \\
A^3 &= \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \\
\ldots & \quad \ldots \\
A^n &= \begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Dostali jsme $\forall n$

$$\begin{aligned}
p_{11}^{(n)} &= 1, \\
p_{21}^{(n)} &= 0, \\
p_{22}^{(n)} &= 1,
\end{aligned}$$

ale $p_{12}^{(n)} = n$.

Přitom na hlavní diagonále matice $\mathbb{P}^n$ dostáváme pravděpodobnosti $p_{ii}^{(n)}$ návratu do téhož stavu po „n“ časových intervalech.

4.2 Klasifikace stavů

Definice 4.6. Jestliže je prvek na hlavní diagonále $p_{ii}^{(n)}$ různý od nuly pro všechna „n“, tak potom hovoříme o **rekurentních stavech** (je možné se vrátit na počátek).

V opačných případech mluvíme o **tranzientních stavech**.

Definice 4.7. Rekurentní stavy mohou být takové, že návrat do výchozího stavu může nastat kdykoliv, potom mluvíme o **ergodických stavech**, nebo může nastat až po provedení konečného počtu kroků, potom mluvíme o **periodických stavech** a nebo až po provedení nekonečného (ale spočetného) počtu kroků (tj. až v limitě) pak mluvíme o stavech **rekurentních nulových.**

Definice 4.8. Hodnoty $p_{ij}^{(n)}$ nám dovolují rozlišit **dosažitelné a nedosažitelné stavy**, tzv. jestliže $p_{ij}^{(n)} > 0 \Rightarrow$ stav „j“ je dosažitelný ze stavu „i“ po provedení určitého počtu kroků po „n“ časových intervalech.

V opačném případe, tj. když $p_{ij}^{(n)} = 0$, jde o nedosažitelný stav.

Definice 4.9. Stavy vzájemně dosažitelné nazveme **souslednými**. Skupinu vzájemně sousledných stavů nazveme **uzavřenou třídou**.

Je-li v MŘ pouze jedna taková třída, potom nazýváme tento řetězec **nerozložitelný**. V opačném případě nazýváme tento řetězec **rozložitelný** .

Definice 4.10. Tvoří-li všechny stavy řetězce uzavřenou třídu a jestliže jsou navíc ergodické, potom mluvíme o **regulárním řetězci**.

Definice 4.11. Jestliže pro jeden nebo víc stavů platí $p_{ii}^{(n)} = 1$, nebo $p_{ii}^{(n)} \to 1$, tj. setrvání ve stavu „i“ je stav jistý a jestliže do těchto stavů existuje vstup, potom mluvíme o stavech **pohlcujících (absorpčních)**.

Ostatní stavy pak nutně musí být tranzientní, protože se postupně jejích pravděpodobnosti blíží k nule. MŘ, které obsahují tyto stavy se nazývaji **absorpčními**.

Poznámka 4.12. Blokové matice – jestliže matici rozdělíme několika vodorovnými a svislými čarami na podmatice, které nazveme bloky, potom máme blokovou matici.

Příklad 4.13. Mějme matici A,

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 3 & 5 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 4 & 8 \\ 0 & 1 & 5 & 7 \end{pmatrix}.$$

Potom můžeme psát $A = \begin{pmatrix} B & I \\ I & C \end{pmatrix}$,

kde $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 4 & 8 \\ 5 & 7 \end{pmatrix}$, $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Blokové matice můžeme použít pro klasifikaci MŘ.
Je-li MŘ rozložitelný potom pří vhodném přečíslování jednotlivých stavů můžeme v matici $\mathbb{P}$ vytvořit nulovou podmatici O.

A dostaneme:

$$\mathbb{P} = \begin{pmatrix} \mathrm{A} & \mathrm{O} \\ \mathrm{O} & \mathrm{B} \end{pmatrix}. \tag{4.2}$$

kde A, B jsou čtvercové matice.

$$\mathbb{P} = \begin{pmatrix} \mathrm{Q} & \mathrm{O} \\ \mathrm{R} & \mathrm{S} \end{pmatrix} \tag{4.3}$$

kde Q, S - jsou čtvercové matice, přičemž Q obsahuje rekurentní stavy a S obsahuje tranzientní stavy.

Jestliže je P rozložitelná na tvar:

$$\mathbb{P} = \begin{pmatrix} \mathrm{O} & \mathrm{C} \\ \mathrm{D} & \mathrm{O} \end{pmatrix}, \tag{4.4}$$

kde C, D jsou čtvercové matice a O je nulové čtvercová matice, pak bude systém oscilovat mezi dvěma množinami stavů a příslušná matice $\mathbb{P}$ bude popisovat periodický řetězec.

Není-li matice $\mathbb{P}$ rozložitelná, jedná se o regulární řetězec, kde všechny stavy tvoří uzavřený celek, přičemž z každého stavu lze přejít do ostatních a naopak.

Příklad 4.14. Mějme MŘ, který má ceklkem čtyři stavy, přičemž ze stavu „1“ můžeme přejít pouze do stavu „3“ a naopak, a ze stavu „2“ můžeme přejít pouze do stavu „4“ a naopak. Matice pravděpodobnosti přechodů bude potom mít tvar

$$\mathbb{P} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \left(\begin{array}{cc|cc} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \hline 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right) = \begin{pmatrix} O & I \\ I & O \end{pmatrix}.$$

Dostali jsme matici periodického řetězce.

Příklad 4.15. Mějme MŘ, který má celkem pět stavů, přičemž ze stavu „1“ můžeme přejít pouze do stavu „3“, ze stavu „2“ můžeme přejít pouze do stavu „4“, ze stavu „3“ můžeme přejít pouze do stavu „5“, ze stavu „4“ můžeme přejít pouze do stavu „1“ a ze stavu „5“ můžeme přejít pouze do stavu „2“. Matice pravděpodobnosti přechodů bude potom mít tvar

$$\mathbb{P} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \left(\begin{array}{cc|ccc} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ \hline 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Nulové podmatice nejsou čtvercové.
Pokud poslední dva řádky přehodíme na první místa, dostaneme jednotkovou matici. To

ale znamená, že všechny stavy jsou sousledné a tvoří jen jednu uzavřenou třídu. Jedná se tedy o regulární řetězec.

Pojmy k zapamatování

- Ukázali jsme si základní vlastnosti homogenních Markovských řetezuců.
- Zavedli jsme si klasifikaci stavů.
- Ukazali jsme si jak se pracuje s maticí pravděpodobnosti přechodů a s počátečním vektorem pravděpodobností.
- Zabývali jsme se umocňováním mative pravděpodobnosti přechodů.

Kontrolní otázky

1. Co rozumíme pojmem absorpční stav?
2. Které stavy jsou periodické?
3. Které stavy jsou tranzientní?
4. Které stavy jsou sousledné?
5. Co nám vyjadřuje vektor absolutních pravděpodobností?

5 Regulární Markovské řetězce

Průvodce studiem

V této kapitole se budeme věnovat regulárním Markovským řetezcům. Odvodíme si jejich základní vlastnosti.

Ukážeme si jakým způsobem je možné určit limitní vektor.

Zavedem si fundamentální matici regulárního řetezce a ukážeme si její použití při hledání stření doby prvního přechodu.

Cíle

Po prostudování této kapitoly budete schopni:

- Určit limitní vektor regulárního Markovského řetezce.
- Sestrojit fundamentální matici regulárního Markovského řetezce.
- Určit střední dobu prvého přechodu.

5.1 Regulární Markovské řetězce

Není-li matice $\mathbb{P}$ rozložitelná, potom se podle definice 4.10 jedná o regulární řetězec, kde všechny stavy tvoří uzavřený celek, přičemž z každého stavu lze přejít do ostatních a naopak.

Definice 5.1. Matici pravděpodobnosti přechodu $\mathbb{P}$ nazveme regulární, je-li „$\mathbb{P}^n$“ pro určité „n“ bez nulových prvků.

Příklad 5.2. Mějme celočíselnou matici

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix},$$

která obsahuje i nulové prvky. Ale její mocnina

$$A^2 = A \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 4 & 2 & 5 \\ 2 & 3 & 5 \end{pmatrix},$$

už žádné nulové prvky neobsahuje.

Příklad 5.3. Mějme stochastickou matici

$$B = \frac{1}{10} \begin{pmatrix} 0 & 2 & 8 \\ 3 & 0 & 7 \\ 5 & 5 & 0 \end{pmatrix},$$

která obsahuje i nulové prvky. Potom

$$B^2 = \frac{1}{100} \begin{pmatrix} 46 & 40 & 14 \\ 35 & 41 & 24 \\ 15 & 10 & 75 \end{pmatrix},$$

už žádné nulové prvky neobsahuje.

Důsledek 5.4. *Je-li $\mathbb{P}$ regulární, potom není rozložitelná na žádný z typů (4.2), (4.3), (4.4).*

Poznámka 5.5. POZOR! Neplést si pojmy regulární matice, tj matice jejíž determinant je nenulový, s regulární maticí pravděpodobnosti přechodu, která je maticí regulárního Markovského řetezce.

Příklad 5.6. Mějme dánu matici

$$C = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}.$$

Protože $\det C = 0$ (matice má dva stejné řádky), jedná se o singulární matici.
Současně ale je matice C^2 bez nulových prvků (Ověřte!), takže se jedná o regulární matici pravděpodobností přechodu.

Věta 5.7. *Je-li $\mathbb{P}$ regulární potom matice „$\mathbb{P}^n$“ konverguje k limitní matici A, kde A je matice tvořena prvky $a_1, a_2, ...a_N$, kde všechny řádky jsou stejné.*

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_N \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_1 & a_2 & \dots & a_N \\ a_1 & a_2 & \dots & a_N \end{pmatrix}$$

Všechny řádky limitní matice A jsou stejné a tvoří tzv. limitní vektor $\vec{a} = (a_1, a_2 ... a_N)$

Věta 5.8. *Pro regulární matici $\mathbb{P}$ platí:*

1. *Je-li A limitní matice pro $\mathbb{P}$ a $\vec{a}$ je limitní vektor platí pro libovolný počáteční vektor $\vec{p}$ potom*
$$\lim_{n\to\infty} \vec{p}\cdot\mathbb{P}^n = \vec{a}.$$
2. *Limitní vektor je jediným vektorem pro který platí:*
$$\vec{a}\cdot\mathbb{P} = \vec{a}.$$
3. $$\mathbb{P}\cdot A = A = A\cdot\mathbb{P}.$$
Neboli limitní matice komutuje s příslušnou stochastickou maticí.

5.2 Hledání limitního vektoru $\vec{a}$

Předpokládáme že se u našeho regulárního řetězce mohou všechny stavy stále vyskytovat, tj. platí:
$$0 < p_{ij} < 1, \forall i, j = 1, 2, \ldots, N$$
Potom, jestliže existuje limitní rozdělení, tak platí, že
$$\lim_{n\to\infty} \vec{p}(n) = \lim_{n\to\infty} \vec{p}(n-1) = \vec{a}.$$
Přitom složky vektoru $\vec{a}$ můžeme chápat jako podíly z celkové doby, kdy systém setrvává v jednotlivých stavech $1, 2 \ldots N$ během dostatečně dlouhé doby.

Jestliže vyjdeme z podmínky $\vec{a}\cdot\mathbb{P} = \vec{a}$, dostaneme soustavu lineárních algebraických rovnic, které budou lineárně závislé. Řešení bude záviset na parametru a nebude jednoznačně určené. Doplníme-li systém o podmínku $\sum_{i=1}^{N} a_i = 1$ potom dostaneme právě jedno řešení.

Příklad 5.9. Máme výrobní linku, která se může nacházet pouze ve dvou stavech.

1. linka je v provozu
2. linka je v opravě

Sledováním provozu bylo zjištěno, že pokud je linka v jednom okamžiku v provozu (stav 1), potom v dalším okamžiku, může být se stejnou pravděpodobností buď v provozu a nebo v opravě. Pokud se linka nacházela v opravě (stav 2), potom v dalším období byla s pravděpodobností 75% opět v opravě a s pravděpodobností 25% byla v provozu.

Řešení. Máme příklad se dvěma stavy, přičemž uvedené relativní četnosti můžeme pokládat za pravděpodobnosti přechodu mezi jednotlivými stavy. Matice podmíněných pravděpodobností má tedy tvar
$$\mathbb{P} = \begin{pmatrix} 0,5 & 0,5 \\ 0,25 & 0,75 \end{pmatrix}.$$

Určíme nyní vektor absolutních pravděpodobností. Předpokládáme, že na začátku je linka v provozu, potom máme $\vec{p}(0) = (1; 0)$

Pravděpodobnost v bodě 1 získáme:

$$\vec{p}(1) = \vec{p}(0) \cdot \mathbb{P} = (1; 0) \cdot \begin{pmatrix} 0,5 & 0,5 \\ 0,25 & 0,75 \end{pmatrix} = (0,5; 0,5).$$

To znamená, že po uplynutí prvního intervalu bude linka se stejnou pravděpodobností v provozu jako v opravě. Pokračujeme dále a dostaneme:

$$\vec{p}(2) = \vec{p}(1) \cdot \mathbb{P} = (0,5; 0,5) \cdot \begin{pmatrix} 0,5 & 0,5 \\ 0,25 & 0,75 \end{pmatrix} = (0,375; 0,625).$$

Dostali jsme, že po uplynutí druhého časového intervalu bude linka s pravděpodobností 0.375 pracovat a s pravděpodobností $0,625$ bude v opravě. Odtud už se dají dělat závěry například o kvalitě linky, ale to už není náplní matematiky.

Výsledky si zapíšeme do tabulky:

n	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**
Pracuje $p_1(n)$	1	0,5	0,375	0,3438	0,3359	0,334
V opravě $p_2(n)$	0	0,5	0,625	0,6562	0,6641	0,666

Tab. 5.1: Výsledky příkladu 5.9 pro $\vec{p}(0) = (1; 0)$

Nyní naopak předpokládejme, že v počátku je linka v opravě potom $\vec{p}(0) = (0; 1)$.

$$\vec{p}(1) = \vec{p}(0) \cdot \mathbb{P} = (0; 1) \cdot \begin{pmatrix} 0,5 & 0,5 \\ 0,25 & 0,75 \end{pmatrix} = (0,25; 0,75),$$

Takže po uplynutí prvního časového intervalu linka, která byla v opravě, bude dále v opravě s pravděpodobností 0.75 a pouze s pravděpodobností $0,25$ bude pracovat.

$$\vec{p}(2) = \vec{p}(1) \cdot \mathbb{P} = (0,31250; 0,6875).$$

Výsledky si opět zapíšeme do tabulky:

n	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**
Pracuje $p_1(n)$	0	0,25	0,3125	0,3281	0,332	0,333
V opravě $p_2(n)$	1	0,75	0,6875	0,6719	0,668	0,667

Tab. 5.2: Výsledky příkladu 5.9 pro $\vec{p}(0) = (0; 1)$

Všimněte si, že přes rozdílnost počátečních vektorů už po pátem kroku máme v obou tabulkách skoro stejné hodnoty.

Jestliže existují pouze uvedené dva stavy potom si můžeme určit limitní vektor $\vec{a}$.

$$\vec{a} \cdot \mathbb{P} = \vec{a},$$

kde $\vec{a} = (\alpha; \beta)$ a $\mathbb{P} = \begin{pmatrix} 0,5 & 0,5 \\ 0,25 & 0,75 \end{pmatrix}$. Potom

$$(\alpha; \beta) \cdot \begin{pmatrix} 0,5 & 0,5 \\ 0,25 & 0,75 \end{pmatrix} = (\alpha; \beta)$$

a současně

$$\alpha + \beta = 1.$$

Dostaneme tak soustavu

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\alpha + \frac{1}{4}\beta &= \alpha, \\ \frac{1}{2}\alpha + \frac{3}{4}\beta &= \beta, \\ \alpha + \beta &= 1. \end{aligned}$$

Po jejím vyřešení dostaneme:

$$\alpha = \frac{1}{3}, \qquad \beta = \frac{2}{3}.$$

V dostatečně dlouhém období bude linka $\frac{1}{3}$ doby pracovat a $\frac{2}{3}$ doby bude v opravě.

Opět připomínám, že už pátá aproximace byla velmi blízko limitnímu řešení. □

Příklad 5.10. Na sídlišti máme dva obchody s potravinami. Pro jednoduchost budeme předpokládat že během jednoho týdne zákazník nakupuje buď pouze v obchodě A nebo pouze v obchodě B. Průzkumem trhu, který se týkal tisíce zákazníků, bylo zjištěno že 90% nakupujících v A tam bude nakupovat i v příštím týdnu a jen 10% přejde následující týden ke konkurenci (tj. bude nakupovat v obchodě B). Dále 80% zákazníků z obchodu B tam bude nakupovat dále a 20% přejde k obchodu A.

Je třeba popsat danou situaci a odhadnou možný vývoj.

Řešení. K analýze použijeme MŘ. Opět máme situaci, ve kterí existují pouze dva stavy:

1. nakupuje v A,
2. nakupuje v B.

Shromážděné údaje z průzkumu trhu obsahují relativní četnosti, které můžeme pokládat za aproximece pravděpodobností jednotlivých přechodů. Sestavíme si z nich matici pravděpodobností:

$$\mathbb{P} = \begin{pmatrix} 0,9 & 0,1 \\ 0,2 & 0,8 \end{pmatrix}.$$

Prvky na hlavní diagonále – pravděpodobnost věrnosti obchodu.
Předpokládejme, že zákazník nakupuje v obchodě A, potom

$$\vec{p}(0) = (1; 0).$$

Pro následující týden dostaneme:

$$\vec{p}(1) = \vec{p}(0) \cdot \mathbb{P} = (1; 0) \cdot \begin{pmatrix} 0,9 & 0,1 \\ 0,2 & 0,8 \end{pmatrix} = (0,9; 0,1).$$

Pro další týden budeme mít:

$$\vec{p}(2) = \vec{p}(1) \cdot \mathbb{P} = (0,9; 0,1) \cdot \begin{pmatrix} 0,9 & 0,1 \\ 0,2 & 0,8 \end{pmatrix} = (0,83; 0,17).$$

Získali jsme, že po dvou týdnech s pravděpodobností 0.83 zákazník, který nakupoval v A, bude dále nakupovat v A, a s pravděpodobností 0.17 přejde ke konkurenci a bude nakupovat v B. Stejným způsobem můžeme pokračovat dále. Výsledky si zapíšeme do tabulky:

n	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**
$p_1(n)$	1	0,9	0,83	0,781	0,747	0,723	0,706
$p_2(n)$	0	0,1	0,17	0,219	0,253	0,277	0,294

Tab. 5.3: Výsledky příklady 5.10, zákazník nakupoval v A

Neboli ze 1000 zákazníků, kteří v počátku nakupovali v A jich po šesti týdnech zůstane 706 a zbytek přejde ke konkurenci. Současně ale i někteří zákazníci v B zase přejdou k v A.

Předpokládejme nyní, že zákazník v počátku nakupuje v obchodě B, potom

$$\vec{p}(0) = (0; 1).$$

Určíme si pravděpodobnosti pro jednotlivé týdny a zapíšeme je do tabulky:

n	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**
$p_1(n)$	0	0,2	0,34	0,438	0,507	0,555	0,589
$p_2(n)$	1	0,8	0,66	0,562	0,493	0,445	0,441

Tab. 5.4: Výsledky příklady 5.10, zákazník nakupoval v B

Neboli z 1000 zákazníků nakupujících v počátku v B jich po šesti týdnech zůstane 411 a 589 jich přešlo ke konkurenci.

Pokud předpokládáme že „n“ je dostatečně velké, tj. máme k dispozici celkem n týdnů, potom můžeme určit limitní vektor $\vec{a}$.

$$\vec{a} \cdot \mathbb{P} = \vec{a},$$

kde $\vec{a} = (\alpha; \beta)$, a současně platí, že $\alpha + \beta = 1$ a $\mathbb{P} = \begin{pmatrix} 0,9 & 0,1 \\ 0,2 & 0,8 \end{pmatrix}$. Po úpravě máme soustavu rovnic

$$\begin{aligned} 0.9\alpha + 0.2\beta &= \alpha, \\ 0.1\alpha + 0.8\beta &= \beta, \\ \alpha + \beta &= 1, \end{aligned}$$

Která má jediné řešení $\alpha = \frac{2}{3}, \quad \beta = \frac{1}{3}$.

Limitní pravděpodobnosti nám ukazují podíl obchodů na trhu. Obchod A má zhruba $\frac{2}{3}$ zákazníků a obchod B má zhruba $\frac{1}{3}$. □

Příklad 5.11. Vyjdeme ze zadání předchozího příkladu. Nechť na základě průzkumu trhu zahájil obchod B reklamní kampaň. V jeho důsledku došlo k přesunu zájmu o jednotlivé obchody, (neboli došlo ke změně matice $\mathbb{P}$), která má nyní tvar

$$\mathbb{P}' = \begin{pmatrix} 0,85 & 0,15 \\ 0,2 & 0,8 \end{pmatrix}.$$

Všimněte si, že se změnil pouze první řádek matice $\mathbb{P}$. Rozhodněte, zda byla kampaň úspěšná.

Řešení. Určíme si opět vektor limitních pravděpodobností a dostaneme: $\vec{a}' \cdot \mathbb{P}' = \vec{a}'$, kde $\vec{a}' = (\alpha'; \beta')$ a dostaneme řešení

$$\vec{a}' = (0,57; 0,43).$$

Slovně vyjádřeno: došlo k nárůstu zákazníků o 10% u obchodu B, takže reklamní kampaň se vyplatila. □

Příklad 5.12. Ověřte, že $\mathbb{P} \cdot A = A \cdot \mathbb{P}$, pro $A, \mathbb{P}$ z příkladu (5.10).

Řešení.

$$\mathbb{P} \cdot A = \begin{pmatrix} \frac{9}{10} & \frac{1}{10} \\ \frac{2}{10} & \frac{8}{10} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{18+2}{30} & \frac{9+1}{30} \\ \frac{4+16}{30} & \frac{2+8}{30} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{20}{30} & \frac{10}{30} \\ \frac{20}{30} & \frac{10}{30} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}.$$

$$A \cdot \mathbb{P} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{9}{10} & \frac{1}{10} \\ \frac{3}{10} & \frac{8}{10} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{18+2}{30} & \frac{2+8}{30} \\ \frac{18+2}{30} & \frac{2+8}{30} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{20}{30} & \frac{10}{30} \\ \frac{20}{30} & \frac{10}{30} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}.$$

V obou případech jsme dostali stejný výsledek.

POZOR! Zde se jedná jen o ověření pro konkrétní matice A, $\mathbb{P}$. Nejde o důkaz. □

5.3 Fundamentální matice regulárního MŘ

U regulárního MŘ nás bude zajímat střední doba prvého přechodu do určitého stavu a rozptyl dob této první doby přechodu.

U regulárního MŘ je střední doba setrvání v systému neomezená, neboť každý stav se může opakovat libovolně často a proto nás tato charakteristika nezajímá.

Definice 5.13. Fundamentální matice $\mathbb{Z}$ regulárního MŘ s maticí pravděpodobnosti přechodu $\mathbb{P}$ a limitní maticí A má tvar:

$$\mathbb{Z} = (I - (\mathbb{P} - A))^{-1} = I + \sum_{n=1}^{\infty} (\mathbb{P}^n - A),$$

kde I je jednotková matice, $\mathbb{P}$ je matice pravděpodobností a A je limitní matice daného řetězce.

Protože

$$\mathbb{P}^n \to A,$$

proto

$$\mathbb{P}^n - A \to \mathcal{O},$$

kde $\mathcal{O}$ je nulová matice, a proto rozvinutím do řady dostáváme

$$(I - (\mathbb{P} - A))^{-1} = I(I - (\mathbb{P} - A))^{-1} = I + (\mathbb{P} - A) + (\mathbb{P} - A)^2 + \dots$$

Dále platí

$$(\mathbb{P} - A)^n = \mathbb{P}^n - A$$

$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}^n = A \Rightarrow \mathbb{P}^n - A \to O$, kde O je nulová matice

$$(\mathbb{P} - A)^n = \mathbb{P}^n - \begin{pmatrix} n \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \mathbb{P}^{n-1} \cdot A + \begin{pmatrix} n \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \mathbb{P}^{n-2} \cdot A^2 + ... + (-1)^n \cdot A^n$$

Volme $n = 2$ a dostaneme

$$(\mathbb{P} - A)^2 = (\mathbb{P} - A) \cdot (\mathbb{P} - A) = \mathbb{P}^2 - \mathbb{P}A - A\mathbb{P} + A^2 = P^2 - A \quad ,$$

přičemž jsme využili, že $\mathbb{P} \cdot A = A \cdot \mathbb{P}$. Matematickou indukcí potom dostaneme, že platí

$$(\mathbb{P} - A)^n = \mathbb{P}^n - A$$

Věta 5.14. *Pro fundamentální matici $\mathbb{Z}$ platí:*

1. $\mathbb{P} \cdot \mathbb{Z} = \mathbb{Z} \cdot \mathbb{P}$

2. $\mathbb{Z} \cdot \xi = \xi$, *kde* $\xi = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ ... \\ 1 \end{pmatrix}$

3. $a \cdot \mathbb{Z} = a$

4. $I - \mathbb{Z} = A - \mathbb{P} \cdot \mathbb{Z}$

Důkaz. Dokážeme poslední tvrzení.

$$I - \mathbb{Z} = A - \mathbb{P} \cdot \mathbb{Z}.$$

Vezmeme si vyjádření $\mathbb{Z}$ a vynásobíme jej zleva výrazem $(I - \mathbb{P})$,

$$\mathbb{Z} = I + \sum_{n=1}^{\infty} (\mathbb{P}^n - A),$$

dostaneme

$$\begin{gathered}
(I - \mathbb{P}) \cdot \mathbb{Z} \\
= (I - \mathbb{P}) \cdot (I + (\mathbb{P} - A) + (\mathbb{P}^2 - A) + .. + (\mathbb{P}^n - A) + \dots), \\
= I + (\mathbb{P} - A) + (\mathbb{P}^2 - A) + \dots + (\mathbb{P}^n - A) + \dots \quad | \cdot (-\mathbb{P}) - \mathbb{P}(\mathbb{P} - A) - \mathbb{P}(\mathbb{P}^2 - A) - \dots \\
= I - \mathbb{P} + (\mathbb{P} - A) + (\mathbb{P}^2 - A) + \dots - (\mathbb{P}^2 - \mathbb{P} \cdot A) - (\mathbb{P}^3 - \mathbb{P} \cdot A) - \dots ... \\
= I - \mathbb{P} + (\mathbb{P} - A) + (\mathbb{P}^2 - P \cdot A) + \dots - (\mathbb{P}^2 - A) - (P^3 - A) - \dots \\
= I - \mathbb{P} + (\mathbb{P} - A) = I - A.
\end{gathered}$$

Neboli jsme dostali

$$(I - \mathbb{P}) \cdot \mathbb{Z} = \mathbb{Z} - \mathbb{P}\mathbb{Z} = I - A$$

a po úpravě máme

$$I - \mathbb{Z} = A - \mathbb{P} \cdot \mathbb{Z}.$$

□

5.4 Střední doba prvého přechodu

Pokud máme regulární MŘ potom se v něm mohou vyskytovat všechny stavy v průběhu sledované doby. Proto nabývají na významu charakteristiky, které nám udávají střední dobu **prvého přechodu** do určitého stavu.

Označme střední dobu prvého přechodu ze stavu „S_i“ do stavu „S_k“ jako „m_{ik}“. V případě, že $i = k$ (jde vlastně o střední době prvého návratu) máme

$$m_{ii} = 1 \cdot p_{ii} + \sum_{k \neq i} p_{ik} \cdot m_{ki}.$$

Setrvá-li systém ve stavu „S_i“ s pravděpodobností „p_{ii}“ (tj. jeden interval systém setrvá v příslušném stavu „S_i“, což může nastat s pravděpodobností „p_{ii}“), proto první člen násobíme jedničkou.

Přejde-li systém s pravděpodobností „p_{ik}“ do stavu „S_k“, trvá v průměru návrat, tzv. první přechod ze stavu „S_k“ do „S_i“ m_{ki}.

V ostatních případech, tj. pro $j \neq i$, můžeme střední dobu prvého přechodu z „S_i“ do „S_j“ vyjádřit rovnicí

$$m_{ij} = 1 \cdot p_{ij} + \sum_{k \neq j} (p_{ik} \cdot m_{kj} + 1 \cdot p_{ik}) \tag{5.1}$$

Přechod od „S_i“ do „S_j“ může s pravděpodobností „p_{ij}“ proběhnout hned v prvém kroku (tj. během prvního časového intervalu) a nebo všemi možnými kombinacemi přechodu ze stavu „S_i“ do „S_j“ a to opět během různých časových intervalů (během rúzných kroků, přičemž opět může se jednat jen o jediný krok, ale nemusí).

Úpravou rovnice (5.1) dostaneme

$$m_{ij} = 1 \cdot p_{ij} + \sum_{k \neq j} p_{ik} \cdot m_{kj} + 1 \cdot \sum_{k \neq j} p_{ik} = \sum_{k \neq j} p_{ik} \cdot m_{kj} + 1 =$$
$$= \sum_{k} p_{ik} \cdot m_{kj} - p_{ij} \cdot m_{jj} + 1.$$

Přejdeme k maticovému vyjádření a máme vztah

$$M = \mathbb{P}(M - \hat{M}) + E,$$

kde $M = (m_{ij})$,

$\mathbb{P}$ - naše matice pravděpodobnostního přechodu,

$\hat{M}$ - diagonální matice, která má na diagonále prvky matice M,

E - matice ze samých jednotek.

Pokračujeme dále v úpravách a dostaneme

$$M = (I - \mathbb{Z} + E \cdot \hat{\mathbb{Z}}) \cdot \hat{M}, \tag{5.2}$$

kde $\mathbb{Z}$ - příslušná fundamentální matice,

$\hat{\mathbb{Z}}$ - je matice obsahující pouze diagonální prvky fundamentální matice $\mathbb{Z}$.

Dále platí $m_{ii} = \dfrac{1}{a_i}$, kde a_i je i-ta složka limitního vektoru $\vec{a}$.

Takže ve vztahu (5.2) známe všechny prvky na pravé straně a to nám umožňuje určit matici M.

Příklad 5.15. Analýzou situace na trhu práce bylo zjištěno že pracovník může buď pracovat ve svém oboru, nebo pracovat v jiné profesi (mimo svůj obor) a nebo být nezaměstnaný.

Ve své profesi pracovalo i následující měsíc 80% pracovníků, kteří v ní pracovali na začátku. 10% pracovníků přešlo k jiné profesi a 10% se stalo nezaměstnanými.

Z pracovníků zaměstnaných mimo svůj obor se během příštího měsíce 10% vrátí ke své původní profesi, 70% zůstane pracovat mimo svůj obor a 20% pracovníků přijde o práci.

Z nezaměstnaných našlo svůj obor a práci v něm 5% pracovníků, 30% našlo práci mimo svůj obor a 65% bylo dále nezaměstnanými. Určete matici M středních dob prvého přechodu.

Řešení. Máme celkem tři stavy

1. dělá ve svém oboru
2. děla v jiném oboru
3. je nezaměstnaný

Matice pravděpodobnosti přechodu

$$\mathbb{P} = \begin{pmatrix} 0,8 & 0,1 & 0,1 \\ 0,1 & 0,7 & 0,2 \\ 0,05 & 0,3 & 0,65 \end{pmatrix}.$$

Určíme si limitní vektor $\vec{a}$:

$\vec{a} \cdot \mathbb{P} = \vec{a}$, kde $\vec{a} = (\alpha; \beta; \gamma)$ a současně musí platit podmínka $\alpha + \beta + \gamma = 1$. Dostaneme tak soustavu

$$\begin{gathered} 0,8\alpha + 0,1\beta + 0,05\gamma = \alpha, \\ 0,1\alpha + 0,7\beta + 0,3\gamma = \beta, \\ 0,1\alpha + 0,2\beta + 0,65\gamma = \gamma, \\ \alpha + \beta + \gamma = 1 \end{gathered}$$

která má řešení

$$\begin{gathered} \alpha = 0,28125, \\ \beta = 0,40625, \\ \gamma = 0,31250. \end{gathered}$$

Jestliže máme limitní vektor $\vec{a}$, potom známe i matici A

$$A = \begin{pmatrix} 0,28125 & 0,40625 & 0,31250 \\ 0,28125 & 0,40625 & 0,31250 \\ 0,28125 & 0,40625 & 0,31250 \end{pmatrix}$$

Můžeme si nyní určit fundamentální matice $\mathbb{Z}$

$$\mathbb{Z} = (I - (\mathbb{P} - A))^{-1} = \begin{pmatrix} 2,8496 & -1,1270 & -0,7227 \\ -0,5879 & 1,6855 & -0,09766 \\ -0,9004 & 0,1230 & 1,7773 \end{pmatrix}$$

Všimněte si, že ne všechny prvky matice $\mathbb{Z}$ musí být kladné. Matice $\mathbb{Z}$ nám totiž svým způsobem určuje odchylku od limitní matice.

Matice M středních dob prvého přechodu

$$M = (I - \mathbb{Z} + E \cdot \hat{\mathbb{Z}}) \cdot \hat{M}$$

kde $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $E = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $\hat{\mathbb{Z}} = \begin{pmatrix} 2,8496 & 0 & 0 \\ 0 & 1,6855 & 0 \\ 0 & 0 & 1,7773 \end{pmatrix}$,

$$\hat{M} = \begin{pmatrix} 3,5556 & 0 & 0 \\ 0 & 2,4615 & 0 \\ 0 & 0 & 3,2 \end{pmatrix}.$$

Dosazení do vztahu vypočteme matice M

$$M = \begin{pmatrix} 3,556 & 6,9229 & 7,999 \\ 12,222 & 2,4614 & 5,999 \\ 13,333 & 3,2461 & 3,19999 \end{pmatrix}$$

Jednotkou času pro nás byl měsíc. Proto z matice M plyne, že pracovník, který na počátku pracoval ve svém oboru se v průměru za necelých 8 měsíců (přesněji za 7,999 měsíce) stane nezaměstnaným.

Jestliže je někdo nezaměstnaný tak za 13,33 měsíce sežene práci ve svém oboru. □

Příklad 5.16. Předpokládáme že týdenní poptávka po výrobku v je dána rozložením

velikost poptávky	0	1	2	3	4
pravděpodobnost výskytu poptávky	0,2	0,2	0,4	0,1	0,1

Interval pořízení zásob je jeden týden. Náklady na objednávku činí 100 tolarů, skladování jednoho výrobku po dobu jednoho týdne nás přijde na 40 tolarů, prodejem jednoho výrobku dosáhneme zisku 200 tolarů. Jaký bude mít zisk při strategii řízení zásob následujícího stavu:

stav na počátku týdne	0	1	2	3	4
velikost objednávky	3	3	0	0	0

Řešení. Musíme si určit náklady spojené se zásobovacím procesem, skladováním a prodejem. Sestavíme si matici pravděpodobností přechodu. Stavem bude vždy stav na počátku týdne, tj. velikost zásob na počátku týdne. Počáteční stav může být: 0,1,2,3,4.

Nejdříve si sestavíme matici P.

- Pokud byl v počátku 0, můžeme přejít pouze do stavu 3, protože si objednáme 3 výrobky, neboli

  $p_{03} = 1$; $p_{01} = p_{02} = p_{04} = p_{00} = 0$

- Pokud byl stav na počátku 1, kže objednáváme 3 výrobky a potom můžeme přejít do stavu 4, jestliže během týdne není žádny zájem o náš výrobek, což může nastat s pravděpodobností 0,2, proto bude $p_{14} = 0,2$, nebo můžeme ze stavu 1 přejít do stavu 3 s pravděpodobností 0,8 $p_{13} = 0,8$. Jestliže byla poptávka 1, 2, 3, 4 (přitom vyšší poptávky (tzv. 2, 3, 4) budou uspokojeny částečně). Proto je $p_{14} = 0.2, p_{13} = = 0.8, p_{10} = p_{11} + p_{12} = 0$.

- Jestliže na počátku byl stav 2, proto podle naší strategie (nic neobjednáváme) nemůžeme přejít do stavu 3,4, proto $p_{23} = p_{24} = 0$. Byla-li poptávka nulová, potom systém setrvá ve stavu 2, neboli $p_{22} = 0,2$. Dále $p_{21} = 0,2$ protože s pravděpodobností 0,2 prodáme jeden výrobek a systém přejde do stvu 1 a pravděpodobnost $p_{20} = 0,6$, což může nastat pokud by byla poptávka po 2,3,4 výrobcích.

- Obdobně postupujeme dále a dostaneme hledanou matici P:

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0,8 & 0,2 \\ 0,6 & 0,2 & 0,2 & 0 & 0 \\ 0,2 & 0,4 & 0,2 & 0,2 & 0 \\ 0,1 & 0,1 & 0,4 & 0,2 & 0,2 \end{pmatrix}$$

Tato matice P splňuje podmínky regulárního MŘ, protože všechny stavy tvoří uzavřenou třídu a jsou ergodické (řetězec je nerozložitelný). Určíme limitní vektor $\vec{a}$ ze soustavy

$$\begin{cases} \vec{a} \cdot P = \vec{a} \\ \sum a_i = 1 \end{cases}$$

Řešením dostaneme: $\vec{a} = (0,1729; 0,2061; 0,1345; 0,4350; 0,0515)$

Odtud plyne, že během dostatečně dlouhé doby budeme mít na počátku týdne nulové zásoby v 17,29% případů, jeden výrobek ve 20,61% atd.

Nyní si spočítáme zisk (pro danou strategii, tj zásoby se doplňují, pokud máme na počátku 0 výrobků a nebo 1 výrobek).

Takováto situace nastává v 37,9% případů (17,29% + 20,61%). Proto střední hodnota nákladů na objednávku bude $0,379 \cdot 100 = 37,9$ tolarů.

Je-li systém ve stavu 0, potom není žádný zisk (ani náklady na skladování).

Je-li systém ve stavu 1, potom s pravděpodobnosti $P_{13} = 0,8$ prodáme jeden kus a s pravděpodobností $P_{14} = 0,2$ neprodáme nic = výrobek zůstane na skladě.

Zisk $Z_1 = 0,8 \cdot 200 - 0,2 \cdot 40 = 160 - 8 = 152$ tolarů.

Obdobně i dále. Výsledky si zapíšeme do tabulky:

stav na počátku	0	1	2	3	4
zisk Z_i	0	152	256	264	246

Z limitního vektoru $\vec{a}$ víme jak často (v delším časovém období) může která situace nastat ,nebo jak často se s ní můžeme setkat.

$$Zisk = \sum_i a_i \cdot Z_i =$$

$$0,1729 + 0,2061 \cdot 152 + 0,1345 \cdot 256 + 0,4350 \cdot 264 + 0,0515 \cdot 246 = 193,2682.$$

Zisk je funkcí strategie řízení zásob. Pokud dojde ke změně strategie změní se většinou i hodnota zisku. □

Pojmy k zapamatování

– V této kapitole jsme se věnovali regulárním Markovským řetezcům.
– Odvodili jsme si jejich základní vlastnosti.
– Ukázali jsme si způsob jak můžeme určit limitní vektor.
– Definovali jsme si fundamentální matici regulárního řetezce a pomocí ní jsme potom určovali střední dobu prvního přechodu.

Kontrolní otázky

1. Co rozumíme pojmem regulární řetezec?
2. Jaký je rozdíl mezi maticí regulárního řetezce a regulární maticí?
3. Co vyjadřují čísla, ketrá stojí na hlavní diagonále matice přechodů regulárního Markovského řetezce?

6 Absorpční řetězce

Průvodce studiem

V této kapitole se budeme zabývat absorpčními (pohlcujícími) řetezci. Po zadefinování tohoto pojmu si uvedeme jeho základní vlastnosti. Dále budeme studovat střední doby průchodu tranzientními stavy, pravděpodobnost přechodu do absorpčního stavu a pravděpodobnost setrvání v tranzientním stavu. Přitom budeme používat fundamentální matici absorpčního řetězce.

Cíle

Po prostudování této kapitoly budete schopni:

- Rozhodnout o tom, zda je řetezec absorpční či nikoliv.
- Sestavit fundamentálmí matici absorpčního řetězce.
- Řešit vybrané typy příkladů, které obsahují absorpční řetezce.

6.1 Úvod

Definice 6.1. *Absorpčním řetězcem* nazveme takový MŘ, který vedle tranzientních stavů obsahuje i stavy absorpční, tj. takové, že pravděpodobnost setrvání v tomto stavu je 1.

Abychom vytvořili v matici pravděpodobnosti přechodu absorpčního řetězce kompaktní bloky, je většinou nutné vhodně přečíslovat jednotlivé stavy (= zaměníme pořadí řádků a sloupců). Potom dostaneme matici $\mathbb{P}$ ve tvaru:

$$\mathbb{P} = \begin{pmatrix} I & O \\ \mathbb{R} & \mathbb{Q} \end{pmatrix}.$$

Jestliže je N celkový počet stavů a počet tranzientních stavů je „S“ potom je I jednotková matice řádu $(N-S)$, $\mathbb{Q}$ je matice pravděpodobnosti přechodu mezi tranzientními stavy řádu „S“, O je nulová matice typu $(N-S;S)$,a $\mathbb{R}$ je matice pravděpodobnosti přechodu mezi tranzientními stavy a absorpčními stavy a je typu $(S;N-S)$.

6.2 Střední doba průchodů tranzientními stavy.

U absorpčních řetězců sledujeme charakteristiky, které lze určit pomocí fundamentální matice daného absorpčního řetězce.

$$\mathbb{N} = (I - \mathbb{Q})^{-1}.$$

Matice $\mathbb{N}$ existuje, jestliže $\mathbb{Q}^n$ konverguje k nulové matici a můžeme tedy psát:

$$(I - \mathbb{Q})^{-1} = I + \mathbb{Q} + \mathbb{Q}^2 + \cdots + \mathbb{Q}^k + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{Q}^k.$$

Prvky matice $\mathbb{N}$ udávají kolikrát se proces v průměru ocitne v tranzientním stavu.

Označíme prvky matice $\mathbb{N}$ jako „n_{ij}“ potom n_{ij} bude vyjadřovat střední hodnotu počtu průchodů stavem „S_j“, jestliže proces začal v „S_i“, přičemž oba stavy „S_i“, „S_j“ jsou tranzientní.

Pokud budeme předpokládat že se průchody tranzientními stavy uskutečňují v jednotlivých časových intervalech, potom nás zajímá průměrná doba, kterou proces stráví v jednotlivých tranzientních stavech. Tato doba závisí na tom z jakého stavu proces vyšel.

Pokud vyšel proces ze stavu absorpčního, je tato doba nulová.

Vyjde-li proces z i-tého tranzientního stavu, můžeme střední dobu (hodnotu)(střední počet průchodů) vyjádřit jako prvek $m_i(t_i)$, kde $t_i = \sum_j n_{ij}$ představuje součet průchodů všemi tranzientními stavy dosažitelnými ze stavu „S_i“.

Soustavu veličin $m_i(t_i)$ pro různá „i“ lze vyjádřit jako sloupcový vektor $\vec{m}(t)$.

Tento vektor $\vec{m}(t)$je tvořen řádkovými součty prvků fundamentální matice $\mathbb{N}$. Vektor $\vec{m}(t)$ můžeme také získat vynásobením fundamentální matice $\mathbb{N}$ vektorem ξ složeným ze samých jedniček.

$$\mathbb{N} \cdot \xi = \mathbb{N} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \dots \\ 1 \end{pmatrix} = m(t)$$

6.3 Pravděpodobnost přechodu do absorpčních stavů.

Další charakteristikou, která se studuje u absorpčních řetězců, je pravděpodobnost přechodu do absorpčních stavů.

Přechod ze stavu tranzientního do stavu absorpčního může proběhnout buď přímo (v jednom kroku) a nebo přes řadu jiných tranzientních stavů. Označme b_{ij} pravděpodobnost přechodu z tranzientního stavu „S_i“ do absorpčního stavu „S_j“. Potom můžeme psát:

$$b_{ij} = p_{ij} + \sum_k p_{ik} \cdot b_{kj}$$

Přitom p_{ij} značí pravděpodobnost přímého přechodu z „S_i“ do „S_j“. Druhá suma popisuje všechny přechody nepřímé. V maticovém tvaru pro $\mathbb{B} = (b_{ij})$

$$\mathbb{B} = \mathbb{R} + \mathbb{Q} \cdot \mathbb{B}.$$

Po úpravě:

$$\mathbb{B} = (I - \mathbb{Q})^{-1} \cdot \mathbb{R} = \mathbb{N} \cdot \mathbb{R}.$$

Tady vidíte odkud se vzala fundamentální matice N. Řádkové součty matice $\mathbb{B}$, která vyjadřuje pravděpodobnost přechodu ze stavu tranzientního do absorpčního jsou rovny jedné (=1), protože proces musí po určité době končit v některém z absorpčních stavů.

6.4 Pravděpodobnost setrvání v tranzientním stavu

Pravděpodobnost přechodu mezi tranzientními stavy lze popsat maticově:

$$Q = (\mathbb{N} - I) \cdot \hat{\mathbb{N}}^{-1}$$

kde Q je matice pravděpodobnosti přechodu mezi tranzientními stavy a $\hat{\mathbb{N}}^{-1}$ je inverzní matice k fundamentální matici, obsahující pouze diagonální prvky.

Příklad 6.2. Firma třídí své pohledávky (tj. nezaplacené faktury) do 30-denních intervalů: pohledávky nad 90-dní po době splatnosti se pokládají za nedobytné. Systém pohledávek tvoří absorpční MŘ období přechodu je 30 dní. Matice pravděpodobnosti přechodu potom obsahuje stavy S_1, S_2, S_3, který jsou tranzientní a 2 absorpční stavy S_4,S_5.

$$\begin{array}{lcl} S_1 & - & \text{0 až 30 dní po době splatnosti,} \\ S_2 & - & \text{31 až 60 dní po době splatnosti,} \\ S_3 & - & \text{61 až 90 dní po době splatnosti,} \\ S_4 & - & \text{pohledávka byla zaplacena,} \\ S_3 & - & \text{pohledávka je nedobytná.} \end{array}$$

Sestavte matici pravděpodobnosti přechodů a fundamentální matici.

Řešení. Při konstrukci matice pravděpodobnosti přechodu během **zvoleného** časového intervalu (30 dní) mohou nastat pouze tyto situace:

1. pohledávka byla zaplacena $S_i \to S_4$, $i = 1, 2, 3$. (Optimální možnost)
2. nezaplacena pohledávka „postoupila“ do vyššího stavu $S_1 \to S_2$, $S_2 \to S_3$.
3. pohledávka se stala nedobytnou (překročila 90-denní hranici) $S_3 \to S_5$

Neboli

$$\begin{array}{c}
S_1 \to S_4 \\
\downarrow \\
S_2 \to S_4 \\
\downarrow \\
S_3 \to S_4 \\
\downarrow \\
S_5
\end{array}$$

Matice $\mathbb{P}$ - její prvky byli získány pozorováním za dostatečně dlouhou dobu (vycházíme s konkrétní situace konkrétní firmy).

$$P = \begin{array}{cc}
 & \begin{array}{ccccc} S_1 & S_2 & S_3 & S_4 & S_5 \end{array} \\
\begin{array}{c} S_1 \\ S_2 \\ S_3 \\ S_4 \\ S_5 \end{array} &
\begin{pmatrix}
0 & 0,77 & 0 & 0,23 & 0 \\
0 & 0 & 0,34 & 0,66 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0,73 & 0,27 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1
\end{pmatrix}
\end{array}$$

Přečíslujeme-li jednotlivé stavy, potom můžeme získat zvlášť absorpční a zvlášť tranzientní stavy a poté získáme matici $\mathbb{P}$ ve tvaru

$$P = \begin{array}{cc}
 & \begin{array}{ccccc} S_4 & S_5 & S_1 & S_2 & S_3 \end{array} \\
\begin{array}{c} S_4 \\ S_5 \\ S_1 \\ S_2 \\ S_3 \end{array} &
\begin{pmatrix}
1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0,23 & 0 & 0 & 0,77 & 0 \\
0,66 & 0 & 0 & 0 & 0,34 \\
0,73 & 0,27 & 0 & 0 & 0
\end{pmatrix}
\end{array} = \begin{pmatrix} I & O \\ \mathbb{R} & \mathbb{Q} \end{pmatrix}$$

Podmatice $\mathbb{Q}$ - jejíž prvky vyjadřují pravděpodobnost přechodu mezi tranzientními stavy S_1, S_2, S_3 má tvar:

$$\mathbb{Q} = \begin{pmatrix} 0 & 0,77 & 0 \\ 0 & 0 & 0,34 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Podmatice $\mathbb{R}$- jejíž prvky vyjadřují pravděpodobnost přechodu mezi tranzientními stavy S_1, S_2, S_3a absorpčními stavy S_4,S_5 má tvar:

$$R = \begin{pmatrix} 0,23 & 0 \\ 0,66 & 0 \\ 0,73 & 0,27 \end{pmatrix}.$$

Fundamentální matice $\mathbb{N}$ je určena vztahem:

$$\mathbb{N} = (I - \mathbb{Q})^{-1}$$

$$\mathbb{N} = \begin{array}{cc}
 & \begin{array}{ccc} S_1 & S_2 & S_3 \end{array} \\
\begin{array}{c} S_1 \\ S_2 \\ S_3 \end{array} &
\begin{pmatrix}
1 & 0,77 & 0,2818 \\
0 & 1 & 0,34 \\
0 & 0 & 1
\end{pmatrix}
\end{array}$$

Pokud vyjdeme z toho, co říkají prvky fundamentální matice, z toho vyplývá, že je možné v průměru očekávat, že pohledávka zařazena do stavu S_1, v něm setrvá v průměru 30 dní (1…30 dní). Pohledávka setrvá ve stavu S_2 v průměru 23,1 dní $(0,77 \cdot 30)$ a setrvá ve stavu S_3 - 7,8 dní (před zaplacením a nebo postupem do vyššího stavu).

Dále matice $\mathbb{B}$, která vyjadřuje pravděpodobnost přechodu z tranzientního stavu (S_1, S_2, S_3) do absorpčního stavu (S_4,S_5) má tvar:

$$\mathbb{B} = \mathbb{N} \cdot \mathbb{R}$$

$$\mathbb{B} = \begin{pmatrix} 1 & 0,77 & 0,2618 \\ 0 & 1 & 0,34 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0,23 & 0 \\ 0,66 & 0 \\ 0,73 & 0,27 \end{pmatrix} = \begin{array}{c} \\ S_1 \\ S_2 \\ S_3 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cc} S_4 & S_5 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0,9293 & 0,0707 \\ 0,9082 & 0,0918 \\ 0,73 & 0,027 \end{pmatrix} \end{array}$$

Z prvního řádku matice $\mathbb{B}$ plyne, že pohledávka zařazena do stavu S_1 je s pravděpodobností 92,93% zaplacena (přejde do absorpčního stavuS_4) a s pravděpodobností 7,07% se stane nedobytnou (přejde do absorpčního stavu S_5).

Analogicky můžeme v úvahách postupovat dále.

Uvedené hodnoty matic $\mathbb{P}, \mathbb{N}, \mathbb{B}$ je možné použít pro stanovení dalších ukazatelů, respektive je možné uvažovat o změně některého z prvků matice $\mathbb{P}$ a sledovat výsledný efekt této změny. □

Příklad 6.3. Jestliže známe průměrný objem pohledávek po termínu splatnosti jednotlivých 30-denních intervalech, stanovte očekávanou hodnotu splněných pohledávek, jestliže vektor $\vec{k}$, který udává hodnoty pohledávek ve stavech (S_1, S_2, S_3) má tvar:

$$\vec{k}^T = (4030000; 9097000; 3377000).$$

Řešení. Průměrně hodnoty zaplacených a nedobytých pohledávek $\vec{y} = (y_1, y_2)^T$

Získáme ze stavu $\vec{y}^T = \vec{k}^T \cdot \mathbb{B}$

$$\vec{y} = \begin{pmatrix} S_4 & 14472184 \\ S_5 & 2031816 \end{pmatrix}$$

Dostali jsme, že průměrná hodnota zaplacených pohledávek bude $y_1 = 14472184$ a průměrná hodnota nesplacenýc pohledávek bude $y_2 = 2031816$. □

Pojmy k zapamatování

- V této kapitole jsme se zabývali absorpčními řetezci a jejich vlastnostmi.. Definovali jsme si pojem absorpční řetezec.
- Fundamentální maticí absorpčního řetězce jsme nazvali výraz

$$\mathbb{N} = (I - \mathbb{Q})^{-1}.$$

- Studovali jsme střední doby průchodu tranzientními stavy, pravděpodobnost přechodu do absorpčního stavu a pravděpodobnost setrvání v tranzientním stavu.

Kontrolní otázky

1. Co rozumíme pojmem absorpční řetezec a jak jej můžeme poznat?
2. Jaká je pravděpodobnost přechodu do absorpčního stavu?
3. Jaká je pravděpodobnost setrvání v tranzientním stavu?

7 Analýza Markovských řetězců

Průvodce studiem

V této kapitole si nejdříve zavedeme $\mathbb{Z}$-transformaci a ukážeme si její základní vlastnosti.Potom s pomocí $\mathbb{Z}$-transformace budeme provádět analýzu Markovských řetězců.

Protože v řadě případů potřebujeme znát n-tou mocninu matice přechodů, ukážeme si dále způsob výpočtu mocniny matice přechodů pro obecné n.

V závěru se budeme věnovat klasifikaci stavů Markovského řetezce.

Cíle

Po prostudování této kapitoly budete schopni:

- Vypočítat mocninu mative přechodů.
- Pracovat se $\mathbb{Z}$-transformací.
- Analyzovat Markovský řetezec pomocí $\mathbb{Z}$-transformace.

7.1 $\mathbb{Z}$-transformace

$\mathbb{Z}$-transformace je diskrétní analogií Laplaceovy transformace. Připomeneme si některé její vlastnosti.

Mějme posloupnost prvků

$$\{a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots\},$$

nebo funkcí

$$f(n), \quad n = 0, 1, 2, \ldots, n, \ldots.$$

Potom si definujeme její obraz pomocí $\mathbb{Z}$-transformace následovně:

$$\{a_n\} \to F(z) = a_0 + a_1 z + a_2^2 z^2 + \cdots + a_n^n z^n + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n.$$

nebo

$$f(n) \to F(z) = f(0) + f(1)z^1 + f(2)z^2 + \cdots + f(n)z^n + \ldots,$$

$$f(n) \to F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} f(n) z^n.$$

Tato řada konverguje pro $|z| < 1$. Funkce $f(n)$ je vzor a funkce $F(z)$ je obraz.

Jestliže máme

$$f(n) \equiv 1 \quad \forall n,$$

potom

$$F(z) = 1 + 1 \cdot z + 1 \cdot z^2 + \cdots + 1 \cdot z^n + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} z^n = \frac{1}{1-z}.$$

Pro

$$f(n) = n$$

dostaneme

$$F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} n \cdot z^n = \sum_{n=1}^{\infty} n \cdot z^n = \sum_{n=1}^{\infty} n \cdot z^{n-1} \cdot z = z \sum_{n=1}^{\infty} n \cdot z^{n-1} = z \sum_{n=1}^{\infty} \frac{d}{dz} z^n = z \frac{d}{dz} \sum_{n=1}^{\infty} z^n.$$

A po derivování máme konečný výsledek ve tvaru

$$F(z) = \frac{z}{(1-z)^2}.$$

Jestliže $f(n) = a^n$, kde $|a| < 1$ (aby jsme měli zaručenou konvergenci), potom máme

$$F(z) = 1 + a \cdot z + a^2 \cdot z^2 + ... + a^n \cdot z^n = \sum_{n=0}^{\infty} (a \cdot z)^n = \frac{1}{1 - a \cdot z}.$$

Jestliže máme vektor: $\vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ ... \\ v_k \end{pmatrix}$, potom transformací dostaneme

$$\vec{F}(z) = \vec{v}(0) + \vec{v}(1)z + \vec{v}(2)z^2 + \cdots + \vec{v}(n)z^n + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \vec{v}(n) z^n,$$

neboli

$$\begin{pmatrix} F_1(z) \\ F_2(z) \\ ... \\ F_k(z) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \vec{v}_1(0) \\ \vec{v}_2(0) \\ ... \\ \vec{v}_k(0) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \vec{v}_1(1) \\ \vec{v}_2(1) \\ ... \\ \vec{v}_k(1) \end{pmatrix} z + \begin{pmatrix} \vec{v}_1(2) \\ \vec{v}_2(2) \\ ... \\ \vec{v}_k(2) \end{pmatrix} z^2 + \cdots + \begin{pmatrix} \vec{v}_1(n) \\ \vec{v}_2(n) \\ ... \\ \vec{v}_k(n) \end{pmatrix} z^n + \ldots$$

Analogické pro matice $M(n)$, kde $n = 0, 1, 2...k$, transformací získáme $F(z)$, které se bude rovnat:

$$F(z) = M(0) + M(1)z + M(2)z^2 + \cdots + M(n)z^n + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} M(n) z^n.$$

Speciálně pro $M(n) = A^n$, kde A je čtvercová matice. Dostaneme že obrazem je

$$F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} A^n z^n = I + A \cdot z + A^2 \cdot z^2 + ... + A^n \cdot z^n + \cdots = (I - A \cdot z)^{-1}.$$

Inverzní matice $(I - A \cdot z)^{-1}$ je vyjádřena jako součet nekonečné geometrické řady. Jestliže je matice $(I - A \cdot z)$ regulární, potom k ní existuje matice inverzní.

Jestliže $f(n) = n \cdot A^n$, potom

$$F(z) = z(I - A \cdot z)^{-1} \cdot A(I - A \cdot z)^{-1}.$$

C aplikacích se často objevují zlomky typu

1. $\dfrac{1 - cz}{(1 - az) \cdot (1 - bz)}$;
2. $\dfrac{cz}{(1 - az) \cdot (z - bz)}$,

kde $a \neq b$.

Jejích rozklad na parciální zlomky, má tvar

1)

$$\frac{1 - cz}{(1 - az) \cdot (1 - bz)} = \frac{A}{(1 - az)} + \frac{B}{(1 - bz)} = \frac{A - Abz + B - Baz}{(1 - az) \cdot (1 - bz)} = \\ = \frac{(A + B) - z(Ab + Ba)}{(1 - az) \cdot (1 - bz)}.$$

Srovnáním koeficientů dostaneme dostaneme soustavu, kterou vyřešíme:

$$\left\{ \begin{array}{c} 1 = A + B \\ -c = -(Ab + Ba) \end{array} \right. ; \quad \left\{ \begin{array}{c} B = 1 - A \\ c = Ab + a - aA \end{array} \right. ;$$

$$A = \frac{c - a}{b - a}, \quad B = \frac{b - c}{b - a}.$$

V druhém případě máme

2)

$$\frac{cz}{(1 - az) \cdot (1 - bz)} = \frac{K}{(1 - az)} + \frac{L}{(1 - bz)} = \frac{K - Kbz + L - Laz}{(1 - az) \cdot (1 - bz)} = \\ = \frac{(K + L) - z(Kb + La)}{(1 - az) \cdot (1 - bz)},$$

$$\left\{ \begin{array}{c} 0 = A + B \\ c = -(Kb + La) \end{array} \right. ; \quad \left\{ \begin{array}{c} K = -L \\ c = Lb - La \end{array} \right. ;$$

$$K = \frac{c}{a - b}, \quad L = \frac{-c}{a - b}.$$

7.2 Analýza MŘ použitím $\mathbb{Z}$-transformace

Ukážeme si použití $\mathbb{Z}$-transformace při rozboru chování vektoru absolutních pravděpodobností.

Máme vektor absolutních pravděpodobností $\vec{p}(n)$, určíme jeho obraz, a obrazem je

$$\vec{F}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \vec{p}(n) z^n$$

Pro vektor $\vec{p}(n)$ platí:

$$\vec{p}(n+1) = \vec{p}(n) \cdot \mathbb{P},$$

kde $\mathbb{P}$- matice pravděpodobnosti přechodu. Odtud dostáváme

$$\sum_{n=0}^{\infty} z^n \vec{p}(n+1) = \sum_{n=0}^{\infty} z^n \vec{p}(n) \cdot \mathbb{P}.$$

Levou stranu si můžeme vyjádřit ve tvaru

$$\sum_{n=0}^{\infty} z^n \vec{p}(n+1) = \frac{1}{z} \sum_{n+1=0}^{\infty} z^{n+1} \vec{p}(n+1) - \vec{p}(0).$$

Přitom je nutné si uvědomit, výraz $\sum\limits_{n+1=0}^{\infty} z^{n+1} \vec{p}(n+1)$ je také obraz vektoru $\vec{p}(n)$. Proto platí

$$\frac{1}{z}\left(\vec{F}(z) - \vec{p}(0)\right) = \vec{F}(z) \cdot \mathbb{P}.$$

Odtud

$$\vec{F}(z) - \vec{p}(0) = z\vec{F}(z) \cdot \mathbb{P}$$
$$F(z) = \vec{p}(0) \cdot (I - z\mathbb{P})^{-1}.$$

Užitím tohoto vztahu se vyhneme umocňování matice $\mathbb{P}$. Problémem tady zůstává výpočet matice inverzní. Můžeme použít vztah

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \text{adj } A = \frac{1}{|A|} \begin{pmatrix} A_{11} & \dots & A_{1n} \\ A_{21} & \dots & A_{2n} \\ \dots & \dots & \dots \\ A_{n1} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix},$$

kde A_{ij} je algebraický doplněk prvku a_{ij}.

Pokud budeme pracovat pouze s maticí řídu 2, potom máme ulehčenou situaci v tom, že zde s využitím předchozího vztahu existuje vzorec pro výpočet inverzní matice.

Mějme matici $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ a najdeme její inverzní matici. Protože

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \text{adj} A,$$

a kde adj$A = \begin{pmatrix} d & -c \\ -b & a \end{pmatrix}$. Potom

$$A^{-1} = \frac{1}{ad-bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}.$$

Příklad 7.1. Vezmeme si stejné zadání jako u příkladu 5.9. Máme linku, která je buď v provozu a nebo v opravě, což popisuje matice pravděpodobností:

$$\mathbb{P} = \begin{pmatrix} 0,5 & 0,5 \\ 0,25 & 0,75 \end{pmatrix}.$$

Řešení. Pro výpočet obrazu $F(z)$ si nejdříve určíme matici $(I - z\mathbb{P})$:

$$(I - z\mathbb{P}) = \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - z \begin{pmatrix} 0,5 & 0,5 \\ 0,25 & 0,75 \end{pmatrix} \right] = \begin{pmatrix} 1-0,5z & -0,5z \\ -0,25z & 1-0,75z \end{pmatrix}.$$

Její determinat má hodnotu

$$|I - z\mathbb{P}| = (1-0,5z)\,(1-0,75z) - 0,5z \cdot 0,25z = 1 - 1,25z + 0,25z^2 =$$

$$= (1-z)\,(1-0,25z)\,.$$

Inverzní matice je proto tvaru

$$(I - z\mathbb{P})^{-1} = \frac{1}{(1-z)\,(1-0,25z)} \begin{pmatrix} 1-0,75z & 0,5z \\ 0,25z & 1-0,5z \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} \frac{1-0,75z}{(1-z)(1-0,25z)} & \frac{0,5z}{(1-z)(1-0,25z)} \\ \frac{0,25z}{(1-z)(1-0,25z)} & \frac{1-0,5z}{(1-z)(1-0,25z)} \end{pmatrix}.$$

Provedeme si rozklad na parciální zlomky

$$(I - z\mathbb{P})^{-1} = \frac{1}{1-z} \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix} + \frac{1}{1-0,25z} \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}.$$

Provedeme zpětnou transformaci:

$$F^{-1}\left(\frac{1}{1-z}\right) = 1^n,$$

$$F^{-1}\left(\frac{1}{1-0,25z}\right) = (0,25)^n$$

a dostáváme

$$\mathbb{P}^n = 1^n \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix} + (0,25)^n \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}.$$

Matici $\mathbb{P}^n$ máme vyjádřenou jako součet dvou matic.

První matice $\begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$ je konstantní a nezávisí na hodnotě n. Je to stacionární matice.

Druhá matice $\begin{pmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$, kterou vždy násobíme koeficientem $\frac{1}{4^n}$ představuje přechodnou (tranzientní) složku procesu.

Protože obrazem vektoru $\vec{p}(n)$ byla funkce

$$F(z) = \vec{p}(0)\,(I - z\mathbb{P})^{-1},$$

můžeme psát

$$\vec{p}(n) = \vec{p}(0) \cdot \left[1^n \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix} + (0,25)^n \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}\right].$$

Protože $\lim\limits_{n\to\infty} (0,25)^n = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{4^n} = 0$, máme

$$\lim_{n\to\infty} \vec{p}(n) = \vec{p}(0) \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix} = \left(\frac{1}{3}\,\frac{2}{3}\right).$$

Výsledek je přitom nezávislý na tom, zda je $\vec{p}(0) = (0,1)$ a nebo $\vec{p}(0) = (1,0)$.

Pomocí $\mathbb{Z}$-transformace jsme tak dostali stejný limitní vektor jako při řešení příkladu 5.9. □

Příklad 7.2. Upravíme si zadání z předchozího příkladu tak, že stroj, který se pokazil už nejde opravit a je vyřazen z provozu. Stroj zůstává v chodu s pravděpodobností 0,6 a s pravděpodobností 0,4 se v následujícím období pokazí.

Řešení. Matice pravděpodobnosti bude mít tvar

$$\mathbb{P} = \begin{pmatrix} 0,6 & 0,4 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Potom

$$(I - z\mathbb{P}) = \begin{pmatrix} 1 - 0,6z & -0,4z \\ 0 & 1 - z \end{pmatrix},$$

$$(I - z\mathbb{P})^{-1} = \frac{1}{(1-0,6z)\,(1-z)} \begin{pmatrix} 1 - z & 0,4z \\ 0 & 1 - 0,6z \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{1-z} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{1-0,6z} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Provedeme rozklad na parciální zlomky

$$(I - z\mathbb{P})^{-1} = \frac{1}{1-z} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{1-0.6z} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Zpětnou transformaci dostaneme

$$\vec{p}(n) = \vec{p}(0) \left[1^n \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + (0,6)^n \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right].$$

Jestliže nyní je výchozí vektor $\vec{p}(0) = (1;0)$ (stroj je v počáteční moment v provozu), potom máme

$$\vec{p}_1(n) = (1;0)\left[\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + 0,6^n \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right] =$$

$$= (1;0)\left[\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0,6^n & -0,6^n \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right] =$$

$$= (1;0)\begin{pmatrix} 0,6^n & 1-0,6^n \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = (0,6^n; 1-0,6^n).$$

Všimněte si, $\lim\limits_{n\to\infty}(0,6^n; 1-0,6^n) = (0,1)$.

Jestliže je výchozí vektor tvaru $\vec{p}(0) = (0;1)$, tj. začínáme ve stavu poruchy, potom

$$\vec{p}'(1) = (0;1)\begin{pmatrix} 0,6 & 0,4 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = (0;1)\,.$$

V obou případech je stav 1 opuštěn. □

Ukážeme si ještě chování periodického řetězce.

Příklad 7.3. Matice pravděpodobností periodického MŘ bude mít tvar

$$\mathbb{P} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Určit limitní vektor.

Řešení. Postupujeme stejně jako v předchozím případě.

$$(I - z\mathbb{P}) = \begin{pmatrix} 1 & -z \\ -z & 1 \end{pmatrix}.$$

Určíme si inverzní matici.

$$(I - z\mathbb{P})^{-1} = \frac{1}{(1-z)(1+z)}\begin{pmatrix} 1 & z \\ z & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{1-z}\begin{pmatrix} 0,5 & 0,5 \\ 0,5 & 0,5 \end{pmatrix} + \frac{1}{1+z}\begin{pmatrix} 0,5 & -0,5 \\ -0,5 & 0,5 \end{pmatrix}.$$

Zpětnou transformaci dostaneme

$$\vec{p}(n) = \vec{p}(0)\left[1^n\begin{pmatrix} 0,5 & 0,5 \\ 0,5 & 0,5 \end{pmatrix} + (-1)^n\begin{pmatrix} 0,5 & -0,5 \\ -0,5 & 0,5 \end{pmatrix}\right].$$

Zde $1^n\begin{pmatrix} 0,5 & 0,5 \\ 0,5 & 0,5 \end{pmatrix}$ je stacionární matice.

Druhý člen $(-1)^n\begin{pmatrix} 0,5 & -0,5 \\ -0,5 & 0,5 \end{pmatrix}$ je tranzientní matice, která ukazuje na oscilaci - periodické kolísání mezi stavy.

Určíme si nyní

$$\lim_{n\to\infty} \vec{p}(n),$$

protože pro n sudé máme

$$\vec{p}(n) = \vec{p}(0) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

a pro n liché máme

$$\vec{p}(n) = \vec{p}(0) \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

takže v tomto případě limitní vektor neexistuje. □

7.3 Výpočet mocniny matice přechodů

V předchozí části jsme si ukázali použití $\mathbb{Z}$-transformace pro určování mocniny matice pravděpodobností přechodu. Největším problémem je zde výpočet inverzní matice, zvláště u matic vyšších řádů. Ukážeme si proto jiný způsob:

Definice 7.4. Mějme MŘ se stavy $S_1, S_2, \ldots, S_r$ a maticí pravděpodobností přechodu $\mathbb{P}$. Potom matici

$$\lambda I - \mathbb{P} = \begin{pmatrix} \lambda - p_{11} & -p_{12} & \ldots & -p_{1r} \\ -p_{21} & \lambda - p_{22} & \ldots & -p_{2r} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ -p_{r1} & -p_{r2} & \ldots & \lambda - p_{rr} \end{pmatrix},$$

kde λ je parametr, nazveme charakteristickou maticí matice $\mathbb{P}$.

Definice 7.5. Charakteristický polynom matice $\mathbb{P}$ je $P(\lambda) = \det(\lambda I - \mathbb{P})$. Charakteristická rovnice matice $\mathbb{P}$ je $P(\lambda) = 0$, její kořeny $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r$ nazýváme charakteristickámi čísly matice $\mathbb{P}$.

Věta 7.6. *Jeden kořen charakteristické rovnice $P(\lambda) = 0$ matice $\mathbb{P}$ je vždy roven jedné. Ostatní kořeny jsou v absolutní hodnotě menší jak jedna.*

Důkaz.

$$P(\lambda) = 0,$$

$$\det(\lambda I - \mathbb{P}) = \det \begin{vmatrix} \lambda - p_{11} & -p_{12} & \ldots & -p_{1r} \\ -p_{21} & \lambda - p_{22} & \ldots & -p_{2r} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ -p_{r1} & -p_{r2} & \ldots & \lambda - p_{rr} \end{vmatrix} = 0.$$

K prvnímu sloupci přičteme zbývající a dostamene v každém řádky výraz $(\lambda - 1)$, který můžeme vztknout před determinant.

$$= \det \begin{vmatrix} \lambda - \sum_{j=1}^{r} p_{1j} & -p_{12} & \dots & -p_{1r} \\ \lambda - \sum_{j=1}^{r} p_{2j} & \lambda - p_{22} & \dots & -p_{2r} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \lambda - \sum_{j=1}^{r} p_{rj} & -p_{r2} & \dots & \lambda - p_{rr} \end{vmatrix} = \det \begin{vmatrix} \lambda - 1 & -p_{12} & \dots & -p_{1r} \\ \lambda - 1 & \lambda - p_{22} & \dots & -p_{2r} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \lambda - 1 & -p_{r2} & \dots & \lambda - p_{rr} \end{vmatrix} =$$

$$= (\lambda - 1) \det \begin{vmatrix} 1 & -p_{12} & \dots & -p_{1r} \\ 1 & \lambda - p_{22} & \dots & -p_{2r} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & -p_{r2} & \dots & \lambda - p_{rr} \end{vmatrix} = 0.$$

Takže jeden z kořenů naší charakteristické rovnice bude roven jedné.

Protože platí

$$\det(\lambda - \mathbb{P}) = det(\lambda - \mathbb{P})^T,$$

potom determinat soustavy lineárních algebraických rovnic

$$\lambda x_j = \sum_{i=1}^{r} x_i p_{ij}, \quad j = 1, 2, \dots, r, \tag{7.1}$$

kde x_i, $i = 1, 2, \dots, r$ jsou neznámé, je roven $P(\lambda) = \det(\lambda I - \mathbb{P})$. Nechť dále je λ^* je libovolný kořen charakteristické rovnice $P(\lambda) = 0$ a x_i^*, $i = 1, 2, \dots, r$, jsou nenulovým řešením rovnice (7.1), potom

$$|\lambda^*| \cdot |x_j^*| \leq \sum_{i=1}^{r} |x_i^*| \cdot p_{ij}.$$

Sečteme všechny tyto rovnice a dostaneme

$$|\lambda^*| \sum_{j=1}^{r} |x_j^*| \leq \sum_{j=1}^{r} \sum_{i=1}^{r} |x_i^*| \cdot p_{ij},$$

$$|\lambda^*| \sum_{j=1}^{r} |x_j^*| \leq \sum_{i=1}^{r} \sum_{j=1}^{r} |x_i^*| \cdot p_{ij},$$

$$|\lambda^*| \sum_{j=1}^{r} |x_j^*| \leq \sum_{i=1}^{r} |x_i^*| \sum_{j=1}^{r} p_{ij},$$

a protože poslední suma je rovna jedné, dostáváme

$$|\lambda^*| \sum_{j=1}^{r} |x_j^*| \leq \sum_{i=1}^{r} |x_i^*|,$$

odkud plyne

$$|\lambda^*| \leq 1.$$

□

Věta 7.7. *Nechť charakteristický polynom matice $\mathbb{P}$ má tvar*

$$P(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^{m_1}(\lambda - \lambda_2)^{m_2} \dots (\lambda - \lambda_s)^{m_s},$$

kde m_i jsou násobnosti příslušných kořenů a $m_1 + m_2 + \dots + m_s = r$. Potom pro libovolné přirozené $n > 1$, platí

$$\mathbb{P}^n = \sum_{i=1}^{s} \frac{1}{(m_i - 1)!} \cdot \frac{d^{m_i - 1}}{d\lambda^{m_i - 1}} \left(\frac{\lambda^n B(\lambda)}{\Psi_i(\lambda)} \right)_{\lambda = \lambda_i}, \tag{7.2}$$

kde $B(\lambda)$ je adjungovaná matice k matici $\lambda I - \mathbb{P}$ a $\Psi_i(\lambda) = \dfrac{P(\lambda)}{(\lambda - \lambda_i)^{m_i}}$, $i = 1, 2, \dots, s$.

Důsledek 7.8. *Má-li matice $\mathbb{P}$ pouze prosté kořeny, tj. $P(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2) \dots (\lambda - \lambda_r)$, potom*

$$\mathbb{P}^n = \sum_{i=1}^{r} \frac{\lambda_i^n B(\lambda_i)}{\Psi_i(\lambda_i)}, \tag{7.3}$$

kde $\Psi_i(\lambda) = \dfrac{P(\lambda)}{\lambda - \lambda_i}$.

Příklad 7.9. Určit n-tou mocninu matice

$$\mathbb{P} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{2}{5} & \frac{3}{5} \end{pmatrix}.$$

Řešení. Máme

$$\lambda I - \mathbb{P} = \begin{pmatrix} \lambda - \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{2}{5} & \lambda - \frac{3}{5} \end{pmatrix}.$$

$$P(\lambda) = \lambda^2 - \frac{11}{10}\lambda - \frac{1}{10},$$

$$\lambda_1 = 1, \qquad \lambda_2 = \frac{1}{10}.$$

Potom

$$B(\lambda) = \begin{pmatrix} \lambda - \frac{3}{5} & \frac{1}{2} \\ \frac{2}{5} & \lambda - \frac{1}{2} \end{pmatrix},$$

odkud po dosazení dostaneme

$$B(\lambda_1) = \frac{1}{10} \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}, \qquad B(\lambda_2) = \frac{1}{10} \begin{pmatrix} -5 & 5 \\ 4 & -4 \end{pmatrix},$$

$$\Psi_1(\lambda) = \frac{P(\lambda)}{\lambda - \lambda_1} = \lambda - \frac{1}{10}, \qquad \Psi_1(\lambda_1) = \frac{9}{10},$$
$$\Psi_2(\lambda) = \frac{P(\lambda)}{\lambda - \lambda_2} = \lambda - 1, \qquad \Psi_1(\lambda_1) = -\frac{9}{10}.$$

Nakonec dostáváme

$$\mathbb{P}^n = \frac{1^n \frac{1}{10} \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}}{\frac{9}{10}} + \frac{\left(\frac{1}{10}\right)^n \frac{1}{10} \begin{pmatrix} -5 & 5 \\ 4 & -4 \end{pmatrix}}{-\frac{9}{10}} =$$
$$= \frac{1}{9}\left(\begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} - \left(\frac{1}{10}\right)^n \begin{pmatrix} -5 & 5 \\ 4 & -4 \end{pmatrix}\right).$$

□

Příklad 7.10. Určit n-tou mocninu matice

$$\mathbb{P} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}.$$

Řešení. Charakteristická matice má tvar

$$\lambda I - \mathbb{P} = \begin{pmatrix} \lambda & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \lambda & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \lambda \end{pmatrix}.$$

Charakteristický polynom je

$$P(\lambda) = (\lambda - 1)\left(\lambda + \frac{1}{2}\right)^2,$$

$$\lambda_1 = 1, \qquad \lambda_{2,3} = -\frac{1}{2}.$$

$$B(\lambda) = \begin{pmatrix} \lambda^2 - \frac{1}{4} & \frac{1}{2}\lambda + \frac{1}{4} & \frac{1}{2}\lambda + \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2}\lambda + \frac{1}{4} & \lambda^2 - \frac{1}{4} & \frac{1}{2}\lambda + \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2}\lambda + \frac{1}{4} & \frac{1}{2}\lambda + \frac{1}{4} & \lambda^2 - \frac{1}{4} \end{pmatrix}.$$

$$B(\lambda_1) = \frac{3}{4}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \qquad B(\lambda = B(\lambda_3) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Derivace

$$B'(\lambda) = \begin{pmatrix} 2\lambda & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 2\lambda & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 2\lambda \end{pmatrix},$$

$$B'(\lambda_1) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix}, \qquad B'(\lambda_2) = B'(\lambda_3) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

Potom máme

$$\mathbb{P}^n = \frac{\lambda_1^n B(\lambda_1)}{\Psi_1(\lambda_1)} + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\lambda}\left(\frac{\lambda^n B(\lambda)}{\Psi_2(\lambda)}\right)_{\lambda=\lambda_2}.$$

Derivace má tvar

$$\frac{\Phi_2(\lambda_2)\left(n\lambda_2^{n-1}B_2(\lambda_2) + \lambda_2^n B'(\lambda_2) - \lambda_2^n B(\lambda_2)\Psi_2'(\lambda_2)\right)}{\Phi_2^2(\lambda_2)},$$

kde

$$\Psi_1(\lambda) = \frac{P(\lambda)}{\lambda - \lambda_1} = \left(\lambda + \frac{1}{2}\right)^2, \qquad \Phi_1(\lambda_1) = \frac{9}{4},$$

$$\Psi_2(\lambda) = \frac{P(\lambda)}{\lambda - \lambda_2} = \lambda - 1, \qquad \Phi_2(\lambda_2) = -\frac{3}{4},$$

Potom

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\lambda}\left(\frac{\lambda^n B(\lambda)}{\Psi_2(\lambda)}\right)_{\lambda=\lambda_2} = \left(-\frac{1}{3}\right)\left(-\frac{1}{2}\right)^n \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

Takže nakonec máme

$$\mathbb{P}^n = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^n \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

□

7.4 Klasifikace stavů MŘ

Mějme MŘ s maticí pravděpodobností přechodu:

$$\mathbb{P} = \begin{pmatrix} p_{00} & p_{01} & p_{02} & \cdots \\ p_{10} & p_{11} & p_{12} & \cdots \\ p_{20} & p_{21} & p_{22} & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{pmatrix}$$

a stavy $a_i, i = 1, 2, \ldots$.

Jestliže pro stav a_i platí, že se i po dostatečně velkém počtu kroků vyskytuje, tj. pokud existuje konečná limita

$$\lim_{n\to\infty} p_{ii}^{(n)} \neq 0, \quad i = 0, 1, 2, \ldots \tag{7.4}$$

potom stav a_i nazýváme rekurentní (podstatný). V opačném případě, tj. pokud

$$\lim_{n\to\infty} p_{ii}^{(n)} = 0, \quad i = 0, 1, 2, \ldots \tag{7.5}$$

potom stav a_i nazýváme přechodný (nepodstatný).

Definice 7.11. Stav a_i nazýváme dosažitelným ze stavu a_j jestliže existuje takové přirozené n, že platí

$$p_{ji} > 0, \quad i \neq j, \quad n = 1, 2, \ldots \tag{7.6}$$

Tj. existuje nenulová pravděpodobnost přechodu se stavu a_j do stavu a_i za n kroků. V opačném případě, tj. pokud

$$p_{ji} = 0, \quad i \neq j, \quad n = 1, 2, \ldots, \tag{7.7}$$

je stav a_i nedosažitelný ze stavu a_j.

Věta 7.12. *Jestliže existují takové stavy a_i, a_j, a_k, že stav a_j je dosažitelný ze stavu a_i a stav a_k je dosažitelný ze stavu a_j, potom je stav a_k dosažitelný ze stavu a_i.*

Důkaz. Podle (7.6) existují taková přirozená čísla m, n, že platí

$$p_{ij} = 0, \quad i \neq j, \quad n = 1, 2, \ldots,$$
$$p_{jk} = 0, \quad j \neq k, \quad n = 1, 2, \ldots.$$

Protože podle (3.6)platí

$$p_{ik}^{(m+n)} \geq p_{ij}^{(n)} \cdot p_{jk}^{(m)} > 0,$$

dostáváme, že stav a_k je dosažitelný ze stavu $a_i.k$ □

Pojmy k zapamatování

- V této kapitole jsme si nejdříve znovu připomenuli $\mathbb{Z}$-transformaci a její základní vlastnosti.
- Ukázali jsme si možnost využití $\mathbb{Z}$-transformace pro analýzu Markovských řetezců, tj. stanovení limitních stavů Markobského řetezce.
- Bez důkazu byl uveden způsob výpočtu mocniny matice přechodů pro obecný mocnitel n.
- Byla provedena klasifikaci stavů Markovského řetezce.

Kontrolní otázky

1. Co rozumíme pojmem zpětná transformace?
2. Jaká existují omezení na výpočet mocniny matice přechodů?
3. Které stavy nazýváme navzájem dosažitelnými?

Cvičení

1. Mějme přístroj, který je zapojen do sítě. Při zvýšení napětí v elektrické rozvodné síti sítí s pravděpodobností $\frac{1}{3}$ dojde k vyřazení zabezpečovacího zařízení a s pravděpodobností $\frac{1}{2}$ přestane přístroj pracovat. Jestliže je vyřazeno zabezpečovací zařízení, potom při následném zvýšení napětí přestane přístroj pracovat s pravděpodobností $\frac{2}{3}$. Určete pravděpodobnost bezchybného chodu přístroje a pravděpodobnost vyřazení jeho zabezpečovacího zařízení, jestliže došlo ke zvýšení napětí n krát po sobě.

Výsledky

1. $p_{11}^{(n)} = \left(\frac{1}{6}\right)^n, \quad n = 1, 2, \ldots,$

   $p_{22}^{(n)} = \left(\frac{1}{3}\right)^n, \quad n = 1, 2, \ldots.$

Maplety

V následujících mapletech si můžete některé studované pojmy přiblížit, případně si sestavit vlastní zadání příkladů.

1. $\mathcal{Z}$–transformace

8 Markovské řetězce se spojitým časem

Průvodce studiem

V této kapitole se budeme zabývat Markovskými řetezci se spojitým časem. Nadefinujeme si základní pojmy a odvodíme si hlavní vlastnosti spojitých Markovských řetezců.

Dále si znovu připomeneme Laplaceovu transformaci a ukážeme si její použití pro klasifikaci spojitých Markovských řetezců.

Cíle

Po prostudování této kapitoly budete schopni:

- Chápat spojíté Markovské řetezce.
- Umět pracovat s Laplaceovou transformací.
- Provádět klasifikaci spojitých Markovských řrtezců pomocí Laplaceovy transformace.

8.1 Obecné vlastnosti procesů se spojitým časem.

Budeme předpokládat že se přechody mezi jednotlivými stavy mohou uskutečnit v libovolných krátkých časových intervalech. Potom můžeme hovořit o změnách ve spojitém čase.

V tomto případě náhodné proměnné $\mathbb{X}(t)$ nabývají hodnoty, který jsou přiřazeny určitým stavům (jako u MŘ). V okamžiku t_i se může vyskytnout jeden ze stavu $i_1, i_2 ... i_N$. Přitom se okamžiky t_i a t_{i+1} liší o Δt, neboli $t_{i+1} = t_i + \Delta t$, kde $\lim \Delta t \to 0$.

Dochází-li ke změnám v okamžicích, které se blíži k nule (liší se jen o Δt, které je velmi malé), potom musíme na stejném intervalu sledovat i pravděpodobnosti přechodu.

Budeme předpokládat, že existují limity měnících se pravděpodobností, které znamenají pravděpodobnosti přechodu v době od t do $t + \Delta t$ a které jsou podmíněny situací v době

t. Takže budeme předpokládat, že platí

$$\lim_{\Delta t \to 0} p_{ij}(t, t + \Delta t) = 0, \quad i \neq j. \tag{8.1}$$

$$\lim_{\Delta t \to 0} p_{ij}(t, t + \Delta t) = 1, \quad i = j. \tag{8.2}$$

Odtud plyne, že symbol

$$p_{ii}(t, t + \Delta t) = 1, \quad i = 1, 2, \ldots \tag{8.3}$$

označuje pravděpodobnost toho, že jestliže je systém ve stavu a_i v čase t, potom v tomto stavu setrvá i v čase $t + \Delta t$. Symbol

$$1 - p_{ii}(t, t + \Delta t) = 0, \quad i = 1, 2, \ldots \tag{8.4}$$

označuje pravděpodobnost výstupu ze stavu a_i za dobu Δt.

Protože pravděpodobnost přechodu $p_{ij}(t, t + \Delta t)$ ze stavu a_i do stavu a_j se v daném časovém okamžiku rovná nule, budeme místo této pravděpodobnosti používat intenzitu (hustotu) pravděpodobnosti přechodu.

Budeme předpokládat exitenci následujících limit

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{p_{ij}(t, t + \Delta t)}{\Delta t} = a_{ij}(t) \geqslant 0, \tag{8.5}$$

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{1 - p_{ii}(t, t + \Delta t)}{\Delta t} = a_{ii}(t) \geqslant 0. \tag{8.6}$$

Definice 8.1. Funkci $a_{ij}(t)$, $i \neq j$, nazveme intenzitou pravděpodobnosti přechodu ze stavu a_i do stavu a_j za čas t. Funkci $a_{ii}(t)$ nazveme intenzitou výstupu ze stavu a_i za čas t.

Při dostatečně malém Δt platí vztah

$$p_{ij}(t, t + \Delta t) = a_{ij}(t) \cdot \Delta t, \quad i \neq j. \tag{8.7}$$

Ve většině případů vystačíme s požadavkem, že hodnoty $a_{ij}(t) = a_{ij}$, tedy, že jsou konstantní a nezávisí na čase.

Matice pravděpodobnosti přechodu, která popisuje podmínky pravděpodobnosti výskytu stavu a_i, $i = 1, 2 ... N$ v době $t + \Delta t$ a které jsou podmíněný stavem v době t, má potom tvar:

$$\mathbb{P}(t, t + \Delta t) = \begin{pmatrix} 1 - a_{11}(t)\Delta t & a_{12}(t)\Delta t & ... & a_{1N}(t)\Delta t \\ a_{21}(t)\Delta t & 1 - a_{22}(t)\Delta t & ... & a_{2N}(t)\Delta t \\ ... & ... & ... & ... \\ a_{N1}(t)\Delta t & a_{N2}(t)\Delta t & ... & 1 - a_{NN}(t)\Delta t \end{pmatrix},$$

kde $a_{ii}(t)\Delta t$ je přibližně pravděpodobnost výstupu ze stavu a_i za čas t a $1 - a_{ii}(t)\Delta t$ je přibližně pravděpodobnost setrvání ve stavu a_i za čas t.

Protože součty řádku matice $\mathbb{P}$, musí byt vždy rovny 1, máme

$$1 - a_{ii}(t)\Delta t + \sum_{j\neq i} a_{ij}(t)\Delta t = 1,$$

$$-a_{ii}(t)\Delta t + \sum_{j\neq i} a_{ij}(t)\Delta t = 0,$$

$$\sum_{j\neq 1} a_{ij}(t)\Delta t = a_{ii}(t). \tag{8.8}$$

Označme

$$A(t) = \begin{pmatrix} -a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1N} \\ a_{21} & -a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2N} \\ a_{31} & a_{32} & -a_{33} & \dots & a_{3N} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{N1} & a_{N2} & a_{N3} & \dots & -a_{NN} \end{pmatrix},$$

kde pro jednoduchost nejsou uvedeny argumenty, ale kde platí $a_{ij} = a_{ij}(t)$.

Z výše uvedených vztahů plyne, že součty prvků v řádcích matice $A(t)$ jsou rovny vždy nule. Proto je možné prvky v řádku vynásobit libovolným nenulovým číslem.

Potom můžeme psáte

$$\mathbb{P} = I + A(t)\Delta t.$$

Definice 8.2. Matici $A(t)$ nazýváme maticí intenzit pravděpodobností přechodu.

Pravděpodobnost toho, že se Markovský proces v čase $t = 0$ nachází ve stavu a_j označíme

$$p_j(0) = p(\mathbb{X}_0 = j), \quad j = 1, 2, \dots \tag{8.9}$$

Pravděpodobnost toho, že se Markovský proces v čase $t > 0$ nachází ve stavu a_j označíme

$$p_j(t) = p(\mathbb{X}_t = j), \quad j = 1, 2, \dots \tag{8.10}$$

Protože jevy $a_j = (\mathbb{X}_t = j)$, $j = 1, 2, \dots$ tvoří úplný systém jevů, potom musí platit

$$\sum_{j=1}^{N} p_j(0) = 1, \quad \sum_{j=1}^{N} p_j(t) = 1 \tag{8.11}$$

Definice 8.3. Pravděpodobnosti (8.9) nazveme počátečními a pravděpodobnosti (8.10) nazveme absolutními.

Počáteční i absolutní pravděpodobnosti se zapisují pomocí vektorů.

Věta 8.4. Chapman-Kolmogorovova *Pro absolutní pravděpodobnosti* (8.10) *platí rovnost*

$$p_j(t + \Delta t) = \sum_{\nu=1}^{N} p_\nu(t) \cdot p_{\nu j}(t, t + \Delta t), \quad j = 1, 2, \dots \tag{8.12}$$

Důkaz. Samostaně jako cvičení. □

Definice 8.5. Markovský proces se nazývá homogenním, jestliže platí

$$p_{ij}(t, t+\Delta t) = p_{ij}(\Delta t), \quad i, j = 1, 2, \ldots \tag{8.13}$$

tj. pravděpodobnost přechodu nezávisí na hodnotě t, ale pouze na délce časového intervalu.

Věta 8.6. Kolmogorovova *Pro absolutní pravděpodobnosti homogenního Markovského procesu platí*

$$p_i'(t) = \frac{\mathrm{d}p_i(t)}{\mathrm{d}t} = \sum_{j=1}^{N} p_j(t) a_{ij}, \quad i = 1, 2, \ldots \tag{8.14}$$

Důkaz. Vyjádříme-li si vektor absolutní pravděpodobnosti pomoci matice intenzit, potom

$$\vec{p}(t+\Delta t) = \vec{p}(t) \cdot \mathbb{P}(t, t+\Delta t) = \vec{p}(t) \cdot (I + A(t)\Delta t).$$

Upravíme a dostaneme

$$\frac{\vec{p}(t+\Delta t) - \vec{p}(t)}{\Delta t} = \vec{p}(t) \cdot A(t).$$

v limitě pro $\Delta t \to 0$ máme

$$(\vec{p}(t))' = \vec{p}(t) \cdot A(t). \tag{8.15}$$

Jestliže nyní přejdeme ke složkám, dostaneme tvrzení věty. □

Věta 8.7. *Jestliže je Markovský proces v čase t ve stavu a_i, potom pravděpodobnost setrvání v tomto stavu je po dobu Δt je*

$$1 - p_{ii}(t) = a_{ii}\Delta t + o(\Delta t) \tag{8.16}$$

kde $o(\Delta t)$ je Landauův symbol, ketrý znamená, že Δt konverguje k nule mnohem rychleji než lineárně, tj.

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{o(\Delta t)}{\Delta t} = 0$$

Věta 8.8. *Pravděpodobnost přechodu ze stavu a_i v čase t do stavu a_j v čase $t + \Delta t$ je rovna*

$$p_{ij}(\Delta t) = a_{ij} \cdot \Delta t + o(\Delta t).$$

Definice 8.9. Jestliže existuje limita

$$\lim_{t \to \infty} p_j(t) = p_j > 0, \quad j = 1, 2, \ldots \tag{8.17}$$

a jestliže toto limitní rozdělení nezávisí na počátečním rozdělení, potom je Markovský proces regulární a pravděpodobnosti (8.17) nazýváme stacinárními.

Vektor stacionárních pravděpodobností si označíme jako

$$\vec{p} = (p_1, p_2, \ldots, p_N)$$

Věta 8.10. *Vektor stacionárních pravděpodobností $\vec{p}$ homogenního Markovského procesu je určen vztahem*

$$\vec{p} \cdot A = \mathcal{O}$$

a podmínkami

$$p_j > 0, \quad \sum_{j=1}^{N} p_j = 1,$$

kde A je matice intenzit pravděpodobností přechodu a $\mathcal{O}$ je nulová matice.

Důkaz. Protože stacionární pravděpodobnosti nezávisí na čase, potom ze (8.15) dostáváme

$$(\vec{p}(t))' = \mathcal{O} = \vec{p}(t) \cdot A(t).$$

□

Pro klasifikaci Markovských procesů platí stejná pravidla jako pro Markovské řetezce.

Stav a_j je dosažitelný ze stavu a_i, jestliže existuje takové $t \geq 0$, že platí

$$p_{ij}(t) > 0, \quad i \neq j.$$

Stavy navzájem dosažitelné nazýváme souslednými.

Stav a_i nazýváme přechodným, jestliže

$$\int_0^\infty p_{ii}(t)\mathrm{d}t < \infty,$$

a trvalým, jestliže

$$\int_0^\infty p_{ii}(t)\mathrm{d}t = \infty,$$

Věta 8.11. *V homogenním Markovském procesu neexistují periodické stavy.*

Důkaz. Stačí si uvědomit, že podle (8.16) jsou všechny diagonální prvky matice pravděpodobnosti přechodu kladné. □

Definice 8.12. Jestliže průběh procesu nezávisí na době která uplynula od začátku, potom jde o homogenní proces. V opačném případě jde o nehomogenní proces.

Mějme homogenní proces s konečným počtem stavů. Potom matice intenzit $A(t)$ má prvky a_{ij}, které nezávisí na čase t. Potom ze vztahu (8.15) plyne

$$\vec{p}'(t) = \vec{p}(t) \cdot A. \tag{8.18}$$

Pokud si tento vztah rozepíšeme, tak dostaneme soustavu lineárních diferenciálních rovnic s konstantní maticí A

$$\frac{(\vec{p}(t))'}{p(t)} = A,$$

$$\frac{d}{dt}\ln\left(\vec{p}(t)\right) = A,$$
$$\ln\left(\vec{p}(t)\right) = At + \ln k,$$
$$\vec{p}(t) = k \cdot \mathrm{e}^{At},$$
$$\vec{p}(t) = \vec{p}(0) \cdot \mathrm{e}^{At},$$

kde $k-$ je vektor konstant a $e^{At}-$ je exponenciála matice , což je matice téhož řádu jako A, která je definovaná předpisem:

$$\mathrm{e}^{At} = I + At + \frac{A^2t^2}{2!} + \cdots + \frac{A^nt^n}{n!} + \ldots$$

Jestliže existuje limitní (stacionární) rozdělení pravděpodobnosti, potom platí, že

$$\lim_{\Delta t \to 0^+} \left(p\left(t + \Delta t\right)\right) = p\left(t\right)$$

a proto platí, že

$$p'\left(t\right) = 0,$$

ze vztahu (8.15) potom vyplývá, že

$$\vec{p} \cdot A = \vec{0}.$$

Protože je až na konstantu $A = \mathbb{P} - I$, je limitní rozdělení stejné jako v případě diskrétního času.

8.2 Laplaceova transformace

Markovský proces můžeme popsat analogicky jako MŘ, jen místo $\mathbb{Z}$-transformace použijeme Laplaceovu transformaci.

Připomeneme si základní vlastnosti Laplaceovy transformace:

Funkci $f(t)$ nazveme vzorem a jejím obrazem je funkce $F(s)$, která je definovaná vztahem

$$F\left(s\right) = \int_0^\infty f\left(t\right) \cdot \mathrm{e}^{-st} dt.$$

Pro funkci $f\left(t\right)$ musí platit:

- po částech spojitá,
- pro záporná t je nulová,
- je nejvýše exponenciálního růstu.

V tabulce jsou uvedeny vzory a obrazy funkcí, které budeme potřebovat dále:

$f(t)$	1	t	e^{-at}
$F(s)$	$\frac{1}{s}$	$\frac{1}{s^2}$	$\frac{1}{s+a}$

Jestliže použijeme Laplaceovu transformaci na každý prvek vektoru a nebo matice, získáme tím transformaci celého vektoru a nebo celé matice.

Ze vztahu $\vec{p}(t) = \vec{p}(0) \cdot e^{At}$ potom dostaneme

$$\vec{F}(s) = \vec{p}(0) \cdot \int\limits_0^\infty \mathrm{e}^{At} \cdot \mathrm{e}^{-st} dt = \vec{p}(0) \cdot \int\limits_0^\infty \mathrm{e}^{-t(sI-A)} dt.$$

Jde o souhrné vyjádření pomocí matic a vektorů, ve kterém integrujeme člen po členu.

Protože platí

$$\int_0^\infty \mathrm{e}^{-t\mathbb{K}} dt = \mathbb{K}^{-1},$$

tak potom můžeme psát

$$\vec{F}(s) = \vec{p}(0) \, (sI - A)^{-1}.$$

Příklad 8.13. Sestavte vektor absolutních pravděpodobností $\vec{p}(t)$ pro homogenní proces s maticí intenzit A, kde

$$A = \begin{pmatrix} -5 & 5 \\ 4 & -4 \end{pmatrix}.$$

Řešení. Sestavíme si matici

$$(sI - A) = \begin{pmatrix} s+5 & -5 \\ -4 & s+4 \end{pmatrix}.$$

Inverzní matice má potom tvar

$$(sI - A)^{-1} = \frac{1}{(s+4)(s+5) - 20} \begin{pmatrix} s+4 & 5 \\ 4 & s+5 \end{pmatrix} = \frac{1}{s(s+9)} \begin{pmatrix} s+4 & 5 \\ 4 & s+5 \end{pmatrix}.$$

Provedeme rozklad na parciální zlomky

$$(sI - A)^{-1} = \frac{1}{s} \begin{pmatrix} \frac{4}{9} & \frac{5}{9} \\ \frac{4}{9} & \frac{5}{9} \end{pmatrix} + \frac{1}{s+9} \begin{pmatrix} \frac{5}{9} & -\frac{5}{9} \\ -\frac{4}{9} & \frac{4}{9} \end{pmatrix}.$$

Zpětnou transformací dostaneme:

$$\vec{p}(t) = \vec{p}(0) \left[1 \cdot \begin{pmatrix} \frac{4}{9} & \frac{5}{9} \\ \frac{4}{9} & \frac{5}{9} \end{pmatrix} + \mathrm{e}^{-9t} \cdot \begin{pmatrix} \frac{5}{9} & -\frac{5}{9} \\ -\frac{4}{9} & \frac{4}{9} \end{pmatrix} \right].$$

A nebo rozepsáno po složkách:

$$p_1(t) = p_1(0)\frac{4}{9} + p_2(0)\frac{4}{9} + \mathrm{e}^{-9t}\left(p_1(0)\frac{5}{9} - p_2(0)\frac{4}{9}\right),$$

$$p_2(t) = p_1(0)\frac{5}{9} + p_2(0)\frac{5}{9} + \mathrm{e}^{-9t}\left(-p_1(0)\frac{5}{9} + p_2(0)\frac{4}{9}\right).$$

Systém se nachází ve stacionární situaci dané limitním vektorem $\vec{a} = \left(\frac{4}{9}; \frac{5}{9}\right)$. Rychlost stabilizace je dána členem e^{-9t} a rychlostí její konvergence k nule. $\square$

Pojmy k zapamatování

- V této kapitole jsme se začali zabývat Markovskými řetezci se spojitým časem. Nadefinovali jsme si základní pojmy a odvodili jsme si hlavní vlastnosti spojitých Markovských řetezců.
- Připomenuli jsme si definici a hlavni vlastnosti Laplaceovu transformaci a zpětné Laplaceovy transformace.
- Ukázali jsme si využití Laplaceovy transformace pro klasifikaci spojitých Markovských řetezců.

Kontrolní otázky

1. Co rozumíme pojmem intenzita pravděpodobnosti?
2. Jak je definována Laplaceova transformace?
3. Jaké vlastnosti musí mít funkce, ketrou chceme zobrazit pomocí Laplaceovy transformace?

Maplety

V následujících mapletech si můžete některé studované pojmy přiblížit, případně si sestavit vlastní zadání příkladů.

1. Laplaceova transformace

9 Modely procesů

Průvodce studiem

V této kapitole se budeme zabývat aplikacemi Markovských procesů na konkrétní situace.

Postupně si popíšeme Poissonův proces, lineární proces růstu, lineární proces zániku a lineární proces růstu i zániku současně.

Ukážeme si, že ve všech případech jsme schopni daný proces popsat a odvodit jeho vlastnosti.

Cíle

Po prostudování této kapitoly budete schopni:

- Sestrojit matice pravděpodobností přechodů pro různé typy konkrétních jevů.
- Odvodit charakteristiky jednotlivých procesů.
- Získat představu o celkovém chování daného procesu.

9.1 Poissonův proces

Označme $\mathbb{X}(t)$ počet výskytů nějakého jevu v čase $\langle 0; t\rangle$.

Jestliže přitom jde jen o samotný výskyt jevů, které se navzájem liší pouze různým umístěním v čase, potom se jedná o bodový proces.

Jde o posloupnost jevů, které se vyskytují v určitých časových okamžicích, které jsou náhodné. Předpokládejme, že počet výskytu jevů, tj. hodnoty $\mathbb{X}(t)$, mohou být pouze celočíselné a nezáporné 0,1,2, $\ldots$. Přírůstek $\mathbb{X}(t_2) - \mathbb{X}(t_1)$ pro všechna $t_1, t_2 : t_1 < t_2$ taktéž může nabývat jen nezáporných celočíselných hodnot.

Příklad 9.1. Poissonův proces popisuje například:

- Tok nakupujících v nějakém obchodě.
- Počet hovorů na určité telefonní lince, na nějaké spojovatelně.

- Počet poruch nějakého zařízení.

Poissonův proces má následující vlastnosti:

1. Proces $\mathbb{X}(t)$ má nezávislé přírůstky.
   Jevy, které se vyskytnou v navzájem disjunktních časových intervalech, jsou navzájem nezávislé náhodné veličiny. Počet jevů, které připadnou na interval I_1 nezávisí na počtu jevů, které případnou na interval I_2 , jestliže $I_1 \cap I_2 = \emptyset$.

2. Proces $\mathbb{X}(t)$ má homogenní přírůstky.
   Intenzita vyskytujících se jevů, tzn. střední hodnota počtu jevů za časovou jednotku je konstantní a značíme jí λ, potom mluvíme o homogenním Poissonově procesu. V případě, že $\lambda = \lambda(t)$ jde o nehomogenní Poissonův proces.

3. Pro dostatečně malý přírůstek Δt a při konstantní hodnotě parametru λ platí, že pravděpodobnost přechodu ze stavu „n“ do stavu „$n+1$“ během intervalu $(t; t + \Delta t)$ je roven

   (a) $p_{n,n+1}(t; t + \Delta t) = \lambda \cdot \Delta t + o(\Delta t)$,
   kde funkce $o(\Delta t)$ obsahuje veličiny řádu $(\Delta t)^2$ a vyšších a proto pro ni platí:
   $$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{o\,(\Delta t)}{\Delta t} = 0.$$

   (b) Pravděpodobnost setrvání v témže stavu „n“ v daném časovém intervalu $(t; t+ + \Delta t)$ je rovna
   $$p_{n,n}\,(t; t + \Delta t) = 1 - \lambda \cdot \Delta t + o\,(\Delta t)\,.$$

   (c) Pravděpodobnosti ostatních přechodu jsou zanedbatelné
   $$\sum_{j=i+2}^{\infty} p_{ij}\,(t; \Delta t) = o\,(\Delta t).$$

   Poissonův proces je tedy takový, že umožňuje pouze setrvání v daném stavu nebo přechod do nejbližšího vyššího stavu.

Matice intenzit pravděpodobnosti přechodu má potom pro konečný počet stavů tvar:

$$A = \begin{pmatrix} -\lambda & \lambda & 0 & 0 & ... & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda & \lambda & 0 & ... & 0 & 0 \\ ... & ... & ... & ... & ... & ... & ... \\ ... & ... & ... & ... & ... & ... & ... \\ ... & ... & ... & ... & ... & ... & ... \\ ... & ... & ... & ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & 0 & 0 & ... & 0 & -\lambda \end{pmatrix}.$$

Při nekonečném počtu stavů budeme mít matici nekonečného řádu, která bude mít na hlavní diagonále prvek $-\lambda$ a rovnoběžně nad hlavní diagonálou prvek λ, ostatní prvky budou nulové.

Pro pravděpodobnost p_n, tj. pravděpodobnost, že systém bude v době $(t; t + \Delta t)$ ve stavu „n“, proto bude platit:

Pro $n = 0$:

$$p_0\left(t + \Delta t\right) = \left[1 - \lambda \cdot \Delta t + o\left(\Delta t\right)\right] \cdot p_0\left(t\right),$$

Pro $n > 0$:

$$p_n\left(t + \Delta t\right) = \left[1 - \lambda \cdot \Delta t + o\left(\Delta t\right)\right] \cdot p_n\left(t\right) + \left[\lambda \cdot \Delta t + o\left(\Delta t\right)\right] \cdot p_{n-1}\left(t\right) + o\left(\Delta t\right).$$

Upravíme a dostaneme:

$$\frac{p_0(t + \Delta t) - p_0(t)}{\Delta t} = -\lambda \cdot p_0(t) + \frac{o(\Delta t)}{\Delta t}, \tag{9.1}$$

$$\frac{p_n\left(t + \Delta t\right) - p_n\left(t\right)}{\Delta t} = -\lambda \cdot p_n\left(t\right) + \lambda \cdot p_{n-1}\left(t\right) + \frac{o\left(\Delta t\right)}{\Delta t}. \tag{9.2}$$

V limitě potom odtud dostaneme

$$\frac{d}{dt} p_0(t) = -\lambda p_0(t), \tag{9.3}$$

$$\frac{d}{dt} p_n(t) = -\lambda p_n(t) + \lambda_{n-1}(t). \tag{9.4}$$

Přitom musí platit počáteční podmínky

$p_n(0) = 1$ pro $n = 0$,

$p_n(0) = 0$ pro $n > 0$.

Potom (9.1) až (9.4) představují rekurentní soustavy diferenčních a diferenciálních rovnic a jejich řešením potom dostaneme

$$p_n(t) = \frac{(\lambda t)^n}{n!} \mathrm{e}^{-\lambda t}$$

Poissonovo rozdělení je rozdělení počtu změn za dobu t. Člen

$$\mathrm{e}^{-\lambda t} = p_0(t)$$

udává pravděpodobnost, že během doby t nedojde ke změně.

U Poissonova procesu pro pravděpodobnosti přechodu ze stavu i do stavu j za dobu t platí

$$p_{ij}(t) = \begin{cases} \mathrm{e}^{-\lambda t} \dfrac{(\lambda t)^{j-i}}{(j-i)!}, & j \geq i, \\ 0, & j < i. \end{cases}$$

$i = 1, 2, \ldots$

$$\int_0^\infty p_{ii}(t)\mathrm{d}t = \int_0^\infty \mathrm{e}^{-\lambda t}\mathrm{d}t = \frac{1}{\lambda} < \infty,$$

takže dostáváme, že u Poissonova procesu jsou všechny stavy přechodné.

9.2 Lineární proces růstu

V praxi se často vyskytují procesy při nichž je intenzita pravděpodobnosti přechodu funkcí stavu, ve kterém se systém nacházel v předešlý moment. Nejjednodušším příkladem je proces lineárního růstu.

Mějme konečný počet částic, jejichž počet postupně narůstá. Budeme předpokládat, že platí:

1. Pravděpodobnost přechodu ze stavu a_i do stavu a_{i+1} v průběhu časového intervalu $(t, t + \Delta t)$ je
$$p_{i,i+1}(\Delta t) = \lambda i \Delta t + o(\Delta t),$$
tj. pravděpodobnost přechodu je přímo úměrná okamžitému počtu částic i, kde $\lambda > 0$ je koeficient úměrnosti.
2. Pravděpodobnost setrvání ve stavu a_i v průběhu časového intervalu $(t, t + \Delta t)$ je
$$p_{ii}(\Delta t) = 1 - \lambda i \Delta t + o(\Delta t),$$
3. Pravděpodobnost přechodu během časového intervalu $(t, t+\Delta t)$ze stavu a_i do stavu $a_j, j \neq i, j \neq i + 1$ je
$$p_{ij}(\Delta t) = o(\Delta t),$$
tj. jde o pravděpodobnost toho, že se během časového intervalu $(t, t + \Delta t)$ zvýší počet částic o více než jednu.

Jestliže X_t je počet částic v čase t, potom posloupnost náhodných proměnných $\{X_t, t \geq \geq 0\}$ tvoří Markovský homogenní proces s množinou stavů $S = \{1, 2, \ldots\}$ a počátečnám rozdělením

$$p_1(0) = 1,\ p_i(0) = 0,\ i \neq 1$$

a intenzitami pravděpodobností přechodu

$$a_{ij} + \begin{cases} i\lambda, & j = i,\ j = i + 1, \\ 0, & \text{v ostatních případech}, \end{cases}$$

kde $i = 1, 2, \ldots$ Matice intenzit pravděpodobností přechodu je

$$A = \begin{pmatrix} -\lambda & \lambda & 0 & 0 & 0 & \ldots \\ 0 & -2\lambda & 2\lambda & 0 & 0 & \ldots \\ 0 & 0 & -3\lambda & 3\lambda & 0 & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \end{pmatrix}.$$

Pro vektor absolutních pravděpodobností $\vec{p}(t) = (p_1(t), p_2(t), \dots)$ platí (8.15). Rozepsáním do složek dostaneme soustavu diferenciálních rovnic

$$
\begin{aligned}
p_1'(t) &= \quad -\lambda p_1(t) \\
p_2'(t) &= \quad \lambda p_1(t) - 2\lambda p_2(t) \\
p_3'(t) &= \quad 2\lambda p_2(t) - 3\lambda p_3(t) \\
\dots & \quad \dots\dots \\
p_n'(t) &= \quad (n-1)\lambda p_{n-1}(t) - n\lambda p_n(t) \\
\dots & \quad \dots\dots
\end{aligned}
\tag{9.5}
$$

Vyřešíme první rovnici soustavy

$$
\begin{aligned}
p_1'(t) &= -\lambda p_1(t), \\
\frac{\mathrm{d}p_1(t)}{p_1(t)} &= -\lambda \mathrm{d}t, \\
\ln(p_1(t)) &= -\lambda t + \ln c, \\
p_1(t) &= c\mathrm{e}^{-\lambda t}.
\end{aligned}
$$

Z počáteční podmínky $p_1(0) = 1$ dostaneme $c = 1$, takže nakonec máme

$$p_1(t) = \mathrm{e}^{-\lambda t}, \quad \lambda > 0, \quad t > 0.$$

Získaný výsledek dosadíme do druhé rovnice a opět řešíme diferenciální rovnici.

$$p_2'(t) = -2\lambda p_2(t) + \mathrm{e}^{-\lambda t}.$$

Máme lineární nehomogenní diferenciální rovnici, kterou můžeme řešit například metodou variace konstanty. A obdobně dále. Na konec dojdeme k souhrnému výsledku

$$p_n(t) = \mathrm{e}^{-\lambda t}\left(1 - \mathrm{e}^{-\lambda t}\right)^{n-1}, \quad t > 0, \quad n = 1, 2, \dots \tag{9.6}$$

Toto rozdělení, pro které platí podmínka (8.11), vyjadřuje pravděpodobnost, že v čase t bude systém obsahovat n částic.

Střední hodnota náhodné veličiny X_t s rozdělením (9.6) je

$$E(X_t) = \sum_{n=1}^{\infty} n\mathrm{e}^{-\lambda t}\left(1 - \mathrm{e}^{-\lambda t}\right)^{n-1}.$$

Označmě $v = 1 - \mathrm{e}^{-\lambda}t$, potom dostaneme

$$E(X_t) = \mathrm{e}^{-\lambda t}\sum_{n=1}^{\infty} nv^{n-1} = \mathrm{e}^{-\lambda t}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}v}v^n = \mathrm{e}^{-\lambda t}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}v}\sum_{n=1}^{\infty}v^n = \mathrm{e}^{-\lambda t}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}v}\frac{v}{1-v} = \mathrm{e}^{-\lambda t}\frac{1}{(1-v)^2}.$$

Po zpětném dosazení dostaneme

$$E(X_t) = \mathrm{e}^{\lambda t}.$$

Obdobně dostaneme pro rozptyl

$$D(X_t) = \mathrm{e}^{\lambda t}\left(\mathrm{e}^{\lambda t} - 1\right).$$

Pravděpodobnost přechodu ze stavu i do stavu j během doby t je

$$p_{ij}(t) = \begin{cases} \binom{j-1}{i-1}\mathrm{e}^{-i\lambda t}\left(1 - \mathrm{e}^{-\lambda t}\right)^{j-1}, & j \geq 1, \\ \\ 0, & j < i. \end{cases}$$

Je to pravděpodobnost toho, že se náš systém v čase t nachází ve stavu a_j, jestliže na počátku v čase $t = 0$ byl ve stavu a_i. V tomto případě máme pro střední hodnotu a rozptyl vztahy:

$$E(X_t) = i\mathrm{e}^{\lambda t}, \quad D(X_t) = i\mathrm{e}^{\lambda t}\left(\mathrm{e}^{\lambda t} - 1\right)$$

Protože pro $i = 1, 2, \ldots$ platí, že

$$\int_0^\infty p_{ii}(t)\mathrm{d}t = \int_0^\infty \mathrm{e}^{-i\lambda t}\mathrm{d}t = \frac{1}{i\lambda} < \infty,$$

proto všechny stavy vyšetřovaného systému jsou přechodné.

Příklad 9.2. Sprška kosmických částic je vyvolaná tím, že se v počáteční moment dostane do atmosféry i částic. Určete pravděpodobnost, že po čase t bude existovat celkem n částic, jestliže každá částice může v časovém intervalu $(t, t + \delta t)$ s pravděpodobností $\lambda\Delta t + o(\Delta t)$ vyvolat vznik nové částice, která má prakticky okamžitě stejné schopnosti.

Řešení. Protože v čase $t = 0$ bude v atmosféře i částic, proto podle (9.10) budou absolutní pravděpodobnmosti určeny soustavou diferenciálních rovnic

$$p_n'(t) = (n-1)\lambda p_{n-1}(t) - n\lambda p_n(t), \quad n \geq i$$

a počátečními podmínkami

$$p_i(0) = i, \;\; p_n(0) = 0, \;\; n \neq i.$$

Vyřešením této rovnice dostaneme

$$p_n(t) = \binom{n-1}{n-i}\mathrm{e}^{-\lambda t}\left(1 - \mathrm{e}^{-\lambda t}\right)^{n-i}, \quad n \geq i.$$

□

9.3 Lineární proces zániku

Jde o proces, jehož intenzity pravděpodobností přechodu jsou lineární funkcí stavu, ve kterém se systém nacházel v předešlém okamžiku. Je podobný předchozímu procesu, ale je opačně orientovaný.

Mějme určitý počet částic, jejichž počet se bude úměrně času postupně snižovat. Budeme přitom vycházet z toho, že platí:

1. Pravděpodobnost přechodu ze stavu a_i, $i = 0, 1, 2, \dots, r$, do stavu a_j, $j = i - 1$, v průběhu časového intervalu $(t, t + \Delta t)$ je
$$p_{ij}(\Delta t) = \mu i \Delta t + o(\Delta t),$$
tj. pravděpodobnost přechodu je úměrná okamžitému počtu částic i, kde $\mu > 0$ je koeficient úměrnosti.

2. Pravděpodobnost setrvání ve stavu a_i v průběhu časového intervalu $(t, t + \Delta t)$ je
$$p_{ii}(\Delta t) = 1 - \mu i \Delta t + o(\Delta t).$$

3. Pravděpodobnost přechodu ze stavu a_i do stavu a_j, kde $j \neq i$, $j \neq i - 1$ v průběhu časového intervalu $(t, t + \Delta t)$ je
$$p_{ij}(\Delta t) = o(\Delta t),$$
tj. pravděpodobnost, že se počet částic sníží v průběhu časového intervalu $(t, t+\Delta t)$ o více než jednotku nebo vzroste o libovolný počet častic je prakticky nulová.

Jestliže označíme X_t počet částic v čase t, potom posloupnost diskrétních náhodných proměnných $\{X_t\}$, $t \geq 0$ tvoří Markovský homogenní proces s množinou stavů $S = \{0, 1, 2, \dots, r\}$ a počátečním rozdělením
$$p_r(0) = 1, \quad p_n(0) = 0, \forall n \neq r,$$
a intenzitami pravděpodobností přechodu
$$a_{ii} = i\mu, \quad i = 0, 1, 2, \dots, r,$$
$$a_{ij} = \begin{cases} i\mu, & j = i - 1, \quad i = 0, 1, 2, \dots, r \\ 0, & j \neq i - 1. \end{cases}$$
Matice intenzit pravděpodobností přechodu bude potom maticí řádu $r + 1$ ve tvaru
$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \mu & -\mu & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 2\mu & -2\mu & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 3\mu & -3\mu & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & -r\mu \end{pmatrix}.$$
Pro vektor absolutních pravděpodobností $\vec{p}(t) = (p_0(t), p_1(t), \dots, p_r(t))$ platí vztah (8.15). Rozepsáním na jednotlivé složky dostaneme soustavu diferenciálních rovnic
$$\begin{aligned} p_0'(t) &= \mu p_1(t) \\ p_1'(t) &= -\mu p_1(t) + 2\mu p_2(t) \\ p_2'(t) &= -2\mu p_2(t) + 3\mu p_3(t) \end{aligned} \tag{9.7}$$

$$\begin{aligned} \dots & \qquad \dots\dots \\ p'_{r-1}(t) = & \; -(r-1)\mu p_{r-1}(t) + r\mu p_r(t) \\ p'_r(t) = & \qquad -r\mu p_r(t). \end{aligned} \tag{9.8}$$

Vyřešíme poslední rovnici soustavy

$$p'_r(t) = \mu p_r(t),$$

$$\frac{\mathrm{d}p_r(t)}{p_r(t)} = -\mu \mathrm{d}t,$$

$$\ln(p_r(t)) = -\mu t + \ln c,$$

$$p_r(t) = c\mathrm{e}^{-\mu t}.$$

Z počáteční podmínky pro $t = 0$ dostaneme $c = 1$, takže nakonec máme

$$p_r(t) = \mathrm{e}^{-\mu t}, \;\; \mu > 0, \;\; t > 0.$$

Získaný výsledek dosadíme do druhé rovnice od konce a opět řešíme diferenciální rovnici.

$$p'_{r-1}(t) = -(r-1)\mu p_{r-1}(t) + r\mu p_r(t).$$

Máme lineární nehomogenní diferenciální rovnici, kterou můžeme řešit například metodou variace konstanty. A obdobně dále. Na konec dojdeme k souhrnému výsledku

$$p_n(t) = \binom{r}{n} \mathrm{e}^{-r\mu t} \left(\mathrm{e}^{\mu t} - 1\right)^{r-n}, \;\; t > 0, \;\; n = 0, 1, 2, \dots, r. \tag{9.9}$$

Toto rozdělení, pro které platí podmínka (8.11), vyjadřuje pravděpodobnost, že v čase t bude systém obsahovat n částic.

9.4 Lineární proces růstu a zániku

Je zřejmé, že složením předchozích dvou procesů je možné konstruovat model růstu i zániku současně. Předpokládejme, že se jedná o proces, při kterém intenzity růstu i zániku jsou úměrné počtu částic v systému.

Budeme přitom vycházet z následujících předpokladů:

1. Pravděpodobnost přechodu ze stavu a_i do stavu a_{i+1} v průběhu časového intervalu $(t, t + \Delta t)$ je
$$p_{i,i+1}(\Delta t) = \lambda i \Delta t + o(\Delta t),$$
tj. pravděpodobnost přechodu je přímo úměrná okamžitému počtu částic i, kde $\lambda > 0$ je koeficient úměrnosti.

2. Pravděpodobnost přechodu ze stavu a_i, $i = 0, 1, 2, \dots$, do stavu a_j, $j = i-1$, v průběhu časového intervalu $(t, t + \Delta t)$ je
$$p_{ij}(\Delta t) = \mu i \Delta t + o(\Delta t),$$
tj. pravděpodobnost přechodu je úměrná okamžitému počtu částic i, kde $\mu > 0$ je koeficient úměrnosti.

3. Pravděpodobnost setrvání ve stavu a_i v průběhu časového intervalu $(t, t + \Delta t)$ je
$$p_{ii}(\Delta t) = 1 - (\lambda + \mu) i \Delta t + o(\Delta t),$$

4. Pravděpodobnost přechodu během časového intervalu $(t, t+\Delta t)$ ze stavu a_i do stavu $a_j, j \neq i, j \neq i+1, j \neq i-1$ je
$$p_{ij}(\Delta t) = o(\Delta t),$$
tj. jde o pravděpodobnost toho, že se během časového intervalu $(t, t + \Delta t)$ zvýší, popřípadě sníží, počet částic o více než jednu.

5. Stav $a = 0$ je absorpční.

Jestliže X_t je počet částic v čase t, potom posloupnost náhodných proměnných $\{X_t, t \geq \geq 0\}$ tvoří Markovský homogenní proces s množinou stavů $S = \{1, 2, \dots\}$ a počátečnám rozdělením
$$p_n(0) = 1, \; n = r,$$
$$p_n(0) = 0, \; n \neq r.$$
a intenzitami pravděpodobností přechodu
$$a_{ii} = i(\lambda + \mu), \quad i = 0, 1, 2, \dots$$
$$a_{ij} = \begin{cases} i\lambda, & j = i+1, \; i = 0, 1, 2, \dots \\ i\mu, & j = i-1, \; j = i-1, \; i = 1, 2, \dots \\ 0, & \text{v ostatních případech,} \end{cases}$$
Matice intenzit pravděpodobností přechodu je
$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \mu & -(\lambda +) & \lambda & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 2\mu & -2(\lambda + \mu) & 2\lambda & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 3\mu & -3(\lambda + \mu) & 3\lambda & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}.$$
Pro vektor absolutních pravděpodobností $\vec{p}(t) = (p_1(t), p_2(t), \dots)$ platí (8.15). Rozepsáním do složek dostaneme soustavu diferenciálních rovnic
$$p_0'(t) = \qquad \mu p_1(t)$$

$$\begin{aligned}
p_1'(t) &= && -(\lambda+\mu)p_1(t)+\mu p_2(t) \\
p_2'(t) &= && \lambda p_1(t)-2(\lambda+\mu)p_2(t)+3p_3(t) \\
\dots & && \dots\dots \\
p_n'(t) &= && (n-1)\lambda p_{n-1}(t)-n(\lambda+\mu)p_n(t)+(n+1)p_{n+1}(t) \\
\dots & && \dots\dots
\end{aligned}$$

Vyřešením soustavy dostaneme
a) Pro $\lambda \neq \mu$

$$p_0(t) = \mu B,$$

$$p_n(t) = (1-\lambda B)(1-\mu B)(\lambda b)^{n-1},$$

kde

$$B = \frac{1-\mathrm{e}^{(\lambda-\mu)t}}{\mu-\lambda\mathrm{e}^{(\lambda-\mu)t}}.$$

b) Pro $\lambda = \mu$

$$p_0(t) = \frac{\lambda t}{1+\lambda t,}$$

$$p_n(t) = \frac{(\lambda t)^{n-1}}{(1+\lambda t)^{n+1}}, \quad t>0, \ \ n=1,2,\dots$$

Přitomm musí platit

$$p_0(t)+\sum_{n=1}^{\infty} p_n(t) = 1, \quad t>0.$$

V lineárním procesu růstu i zániku je určitý počet částic. Jestliže tento počet klesne na nulu, potom se už žádná částice nemůže obnovit, tj. stav $a=0$ je stavem absorpčním.

Pravděpodobnost, že počet částic v systému se někdy sníží na nulu, tj. pravděpodobnost že částice zcela zaniknou je:

$$p = \lim_{t\to\infty} p_0(t) = \begin{cases} 1 & \text{pro } \lambda \le \mu, \\ \frac{\mu}{\lambda} & \text{pro } \lambda > \mu. \end{cases}$$

Pojmy k zapamatování

- V této kapitole jsme se zabývali aplikacemi teorie Markovských retězců na konkrétní situace.
- Byly popsány Poissonův proces, lineární proces růstu, lineární proces zániku a lineární proces růstu i zániku současně.

Kontrolní otázky

1. Co rozumíme pojmem lineární?
2. Kde se v praxi můžeme setkat s lineárním procesem?
3. Existují i nelineární procesy?

10 Markovovy rozhodovací procesy

Průvodce studiem

Zatím jsme se zabývali při studiu MŘ pouze pravděpodobnosti přechodů mezi jednotlivými stavy. Nezajímalo nás zda jsou jednotlivé přechody spojeny určitými náklady čí výnosy.

Těmito otázkami se bydeme zabývat v této kapitole. Budeme předpokládat, že přechod je spojen s nějakým ohodnocením a budeme hledat maximální hodnotu, dosažitelnou při daném procesu.

Ukážeme si, že přímým výpočtem dostaneme postupně řadu číselných údajů, ale ne vždy jsme schopni z nich odvodit další očekávaný vývoj. K tomu je nutné znát a využívat asymptotické vlastnosti Markovských řetezců.

Těmi se i budem také zabývat v této kapitole. Pro jejich studium budeme opět používat Z-transformaci (přímou i zpětnou) a rozklad na parciální zlomky.

Cíle

Po prostudování této kapitoly budete schopni:

- Řešit otázky spojené s oceňováním přechodů mezj jednotlivými stavy.
- Rozhodovat o výhodnosti či nevýhodnosti danného postupi.
- Sestavit nejen matici pravděpodobnosti přechodů, ale i matici ohodnocení přechodů.
- Využívat Z-transformaci pro rozbor asymptotických vlastností Markovského řetezce.
- Pracovat s přímou Z-transformaci i zpětnou, tj. inverzní Z-transformaci.
- Řešit konkrétní úlohy o chování Markovských řetezců.

10.1 Ocenění přechodů mezi stavy

Jestliže dovedeme popsat průběh určitého procesu tak, že jej umíme rozložit na řadu jednotlivých stavů, jimiž systém prochází v řadě okamžiků, potom se můžeme pokusit i o ocenění každého stavu nebo přechodu. Potom bude mít smysl hledat optimální řešení, tj. takové, které přináší maximální zisk nebo minimální náklady (záleží na úhlu pohledu, neboli na ocenění jednotlivých přechodů).

Předpokládejme, že s přechodem ze stavu „i“ do stavu „j“ je spojena hodnota výnosu „r_{ij}“ (zisk, náklady na skladování, ztráta apod.)

Tyto výnosy „r_{ij}“, kde $i, j = 1, 2 ... N$ tvoří dohromady matici ohodnocení (ocenění) přechodů

$$\mathbb{R} = \begin{pmatrix} r_{11} & r_{12} & \dots & r_{1N} \\ r_{21} & r_{22} & \dots & r_{2N} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ r_{N1} & r_{N2} & \dots & r_{NN} \end{pmatrix}$$

Ocenění „r_{ij}“ může být konstantní pro všechny přechody nebo může být rostoucí nebo klesající funkcí v závislosti na růstu nebo klesání některého z indexů.

Specifický případ tvoří **diskontované** ocenění jednotlivých přechodů. Toto ocenění jednotlivých přechodů, jímž jsme přiřadili určité pravděpodobnosti přechodů nám potom mohou dát určité informace. Navíc dovolují i provádět odhady dalšího vývoje a hledání alternativ.

Označme „$v_i(n)$“ střední hodnotu celkového očekávaného výnosu procesu, který je na počátku ve stavu „i“ a uskuteční „n“ přechodů. Potom pro tuto hodnotu „$v_i(n)$“ bude platit rekurentní vztah

$$v_i(n) = \sum_{j=1}^{N} p_{ij}(r_{ij} + v_j(n-1)),$$

a po úpravě dostaneme

$$v_i(n) = \sum_{j=1}^{N} p_{ij} r_{ij} + \sum_{j=1}^{N} p_{ij} v_j(n-1), \tag{10.1}$$

zde je první člen - střední hodnota výnosu spojená s jedním přechodem ze stavu „i“ a druhý člen je střední hodnota výnosu procesu ve kterém do konce zbývá $(n-1)$ přechodu a který je s pravděpodobnosti p_{ik} ve stavu „k“, kde $k = 1, 2, \dots, N$.

Označme střední hodnotu výnosů $\sum\limits_{j=1}^{N} P_{ij} r_{ij} = q_i$ (označení je korektní, protože zde není závislost na počtu přechodů)

Potom si lze rovnici (10.1) zapsat ve tvaru

$$v_i(n) = q_i + \sum_{j=1}^{N} p_{ij} v_j(n-1) \tag{10.2}$$

a nebo maticově

$$\vec{v}(n) = \vec{q} + \mathbb{P} \cdot \vec{v}(n-1),$$

kde $\vec{v}$ je řádkový vektor.

Pro použití vztahu (10.2) pro výpočet je třeba znát hodnoty „$v_i(n)$“ pro $n = 0$ a $i = 1, 2, \dots, N$. Z definice „$v_i(n)$“ plyne, že „$v_i(0)$“ je střední hodnota celkového výnosu procesu, který je ve stavu „i“ a už nedělá žádný další přechod, tj. skončil ve stavu „i“.

Odtud vyjdeme při určování hodnoty „$v_i(0)$“, protože ji můžeme chápat jako jednorázový výnos, který plyne z toho, že proces skončí ve stvu „i“. Jestliže nezáleží na tom, v jakém stavu proces končí, je možné položit, že $v_i = 0$ pro $\forall i$.

Rovnice (10.1)je typickou rovnicí dynamického programování. Při výpočtu střední hodnoty očekávaného výnosu „$\vec{v}(n)$“ postupujeme zpětně od posledního kroku k počátku „$v_i(0)$“.

Příklad 10.1. Máme linku, která se může nacházet v provozu (stav 1) a nebo v opravě (stav 2). Sledováním po dostatečně dlouhou dobu byly získány pravděpodobnosti přechodu mezi jednotlivými stavy, tj. matice $\mathbb{P}$, a ocenění jednotlivých přechodů, tj. matice $\mathbb{R}$.

$$\mathbb{P} = \begin{pmatrix} 0,5 & 0,5 \\ 0,4 & 0,6 \end{pmatrix}, \quad \mathbb{R} = \begin{pmatrix} 10 & 4 \\ 5 & -5 \end{pmatrix}.$$

Dále budeme předpokládat, že nezáleží na tom, v jakém stavu proces skončí, neboli $v_i = = 0, i = 1, 2$.

Řešení. Potom máme podle vztahu (10.2)

$$v_i(n) = q_i + \sum_{1}^{2} p_{ij} v_j(n-1),$$

kde $i = 1, 2$, $q_i = \sum_{j=1}^{2} p_{ij} r_{ij}$, neboli v našem případě máme

$$q_1 = 0,5 \cdot 10 + 0,5 \cdot 4 = 7,$$

$$q_2 = 0,4 \cdot 10 + 0,6 \cdot (-5) = -1.$$

Střední hodnota očekávaného výnosů procesu, který uskutečnil právě jeden přechod, bude záviset na výchozím stavu.

$$v_1(1) = 7 + \sum_{j-1}^{2} p_{ij} \cdot v_j(0) = 7 + 0,5 \cdot 0 + 0,5 \cdot 0 = 7,$$

$$v_2(1) = -1 + \sum_{j=1}^{2} p_{ij} \cdot v_j(0) = -1$$

Při uskutečnění dvou přechodů budeme mít

$$v_1(2) = 7 + \sum_{j=1}^{2} p_{ij} \cdot v_j(1) = 7 + 0,5 \cdot 7 + 0,5 \cdot (-1) = 10,$$

$$v_2(2) = -1 + \sum_{j=1}^{2} p_{ij} \cdot v_j(1) = -1 + 0,4 \cdot 7 + 0,6 \cdot (-1) = 1,2.$$

Výsledky si zapíšeme do tabulky

n	0	1	2	3	4	5	...
$v_1(n)$	0	7	10	12,6	15,2	17,7	...
$v_2(n)$	0	-1	1,2	3,7	6,3	8,8	...

□

Někdy není přesně vidět závislost mezi těmito čísly.

10.2 Asymptotické vlastnosti Markovských řetězců

Mějme konstantní ocenění přechodů, tj. matice $\mathbb{R}$ je konstantní. Opět použijeme $\mathbb{Z}$-transformaci. Celkový očekávaný výnos pak bude.

$$\vec{F}(z,v) = \sum_{n=0}^{\infty} \vec{v}(n) \cdot z^n$$

Protože podle (10.2) pro vektor $\vec{v}$ platí

$$\vec{v}(n+1) = \vec{q} + \mathbb{P} \cdot \vec{v}(n),$$

můžeme psát

$$\sum_{n=0}^{\infty} \vec{v}(n+1) \cdot z^n = \sum_{n=0}^{\infty} \vec{q} \cdot z^n + \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P} \cdot \vec{v}(n) \cdot z^n, \tag{10.3}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \vec{v}(n+1) \cdot z^n = \frac{1}{z} \left(\sum_{n=0}^{\infty} \vec{v}(n+1) \cdot z^{n+1} - \vec{v}(0) \right)$$

Po dosazení do (10.3) máme

$$\frac{1}{z} \left(F(z,v) - \vec{v}(0) \right) = \frac{1}{1-z} \vec{q} + \mathbb{P} \cdot F(z,v).$$

Po úpravě dostaneme

$$\left(I - z\mathbb{P} \right) F(z,v) = \frac{z}{1-z} \vec{q} + \vec{v}(0)$$

a odtud

$$F(z,v) = \frac{z}{1-z} \left(I - z\mathbb{P} \right)^{-1} \vec{q} + \left(I - z\mathbb{P} \right)^{-1} \vec{v}(0). \tag{10.4}$$

Jestliže jsme si analýzou původního Markovského řetězce určili funkci $(I - z\mathbb{P})^{-1}$, dostaneme F vynásobením veličinami $\vec{q}$ a $\vec{v}(0)$. . Protože navíc většinou platí, že $\vec{v}(0) = 0$, potom máme jednodušší tvar rovnice (10.4) a sice

$$F(z,v) = \frac{z}{1-z} \left(I - z\mathbb{P} \right)^{-1} \vec{q}. \tag{10.5}$$

Zpětnou transformací se dostaneme zpět na vektor celkového očekávaného výnosu.

Příklad 10.2. Použijeme zadání z předchozího příkladu

$$\mathbb{P} = \begin{pmatrix} 0,5 & 0,5 \\ 0,4 & 0,6 \end{pmatrix}, \quad \mathbb{R} = \begin{pmatrix} 10 & 4 \\ 5 & -5 \end{pmatrix}, \quad q = \begin{pmatrix} 7 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Řešení. Potom budeme mít

$$(I - z\mathbb{P})^{-1} = \frac{z}{1-z} \begin{pmatrix} \frac{4}{9} & \frac{5}{9} \\ \frac{4}{9} & \frac{5}{9} \end{pmatrix} + \frac{1}{1-0,1z} \begin{pmatrix} \frac{5}{9} & -\frac{5}{9} \\ -\frac{4}{9} & \frac{4}{9} \end{pmatrix}.$$

Předpokládali jsme dříve $\vec{v}(0) = 0$, proto z (10.5), bez násobení $\vec{q}$,

$$F_0(z,i) = \frac{z}{1-z} (I - z\mathbb{P})^{-1} =$$

$$\frac{z}{(1-z)^2} \begin{pmatrix} \frac{4}{9} & \frac{5}{9} \\ \frac{4}{9} & \frac{5}{9} \end{pmatrix} + \frac{z}{(1-z)(1-0,1z)} \begin{pmatrix} \frac{5}{9} & -\frac{5}{9} \\ -\frac{4}{9} & \frac{4}{9} \end{pmatrix}.$$

Zpětnou transformací dostaneme

$$\left(\frac{z}{(1-z)^2}\right)^{-1} = n,$$

$$\left(\frac{z}{(1-z)(1-0,1z)}\right)^{-1} = \frac{10}{9}\left(1 - 0,1^n\right),$$

zde jsme opět použili rozklad na parciální zlomky. Takže dostáváme

$$f_0(n) = n \cdot \begin{pmatrix} \frac{4}{9} & \frac{5}{9} \\ \frac{4}{9} & \frac{5}{9} \end{pmatrix} + \frac{10}{9}\left(1 - 0,1^n\right) \begin{pmatrix} \frac{5}{9} & -\frac{5}{9} \\ -\frac{4}{9} & \frac{4}{9} \end{pmatrix}.$$

Dále jsme si odvodili, že přímý výnos je

$$q = \begin{pmatrix} 7 \\ -1 \end{pmatrix}$$

a proto máme

$$\vec{v}(n) = \vec{f_0}(n) \cdot \vec{q} = n \cdot \begin{pmatrix} \frac{23}{9} \\ \frac{23}{9} \end{pmatrix} + \frac{10}{9}\left(1 - 0,1^n\right) \begin{pmatrix} \frac{40}{9} \\ -\frac{32}{9} \end{pmatrix}.$$

Nyní si můžeme vyjádřit jednotlivé složky, takže dostaneme

$$v_1(n) = \frac{23}{9}n + \frac{400}{81}\left(1 - 0,1^n\right),$$

$$v_2(n) = \frac{23}{9}n - \frac{320}{81}\left(1 - 0,1^n\right).$$

Stejným způsobem můžeme pokračovat dále. Protože $0,1^n \to 0$, tak pro dostatečně velké n máme asymptotické vyjádření složek vektoru $\vec{v}(n)$

$$v_1(n) = \frac{23}{9}n + \frac{400}{81}$$

$$v_2(n) = \frac{23}{9}n - \frac{320}{81}$$

□

Asymptotické vlastnosti (chování) vektoru $\vec{v}(n)$ můžeme studovat i rozkladem matice $(I - z\mathbb{P})^{-1}$ na stacionární a tranzientní část.

$$(I - z\mathbb{P})^{-1} = \frac{1}{1-z}S + F_z(T)$$

kde S je stacionární matice (vzorem pro $\frac{1}{1-z}$ je prvek 1) a $F_z(T)$ je výsledek $\mathbb{Z}$-transformace tranzientní složky.

V našem případě dostaneme

$$S = \begin{pmatrix} \frac{4}{9} & \frac{5}{9} \\ \frac{4}{9} & \frac{5}{9} \end{pmatrix}, \quad F_z(T) = \frac{1}{1-0,1z}\begin{pmatrix} \frac{5}{9} & -\frac{5}{9} \\ -\frac{4}{9} & \frac{4}{9} \end{pmatrix}.$$

Dosazením do rovnice (10.4)

$$F(z,v) = \frac{z}{(1-z)^2}S \cdot \vec{q} + \frac{z}{(1-z)}F_z(T) \cdot \vec{q} + \frac{1}{(1-z)}S \cdot \vec{v}(0) + F_z(T) \cdot \vec{v}(0).$$

My jsme předpokládali, že máme $\vec{v}(0) = 0$, současně platí, že $S \cdot \vec{q}$ a $S \cdot \vec{v}(0)$ jsou konstanty. Člen $\dfrac{z}{1-z}F_z(T)$ bude obsahovat konstantní část

$$F_1(T) = \frac{1}{1-0,1}\begin{pmatrix} \frac{5}{9} & -\frac{5}{9} \\ -\frac{4}{9} & \frac{4}{9} \end{pmatrix}.$$

Výrazy, které obsahují vyšší mocniny $0,1$ můžeme zanedbat a potom dostáváme

$$\vec{v}(n) = n \cdot S \cdot \vec{q} + F_1(T)\vec{q}.$$

Přitom vektor $S \cdot \vec{q}$ si označíme jako $\vec{g}$, přitom jeho souřadnice dostaneme ve tvaru

$$g_i = \sum_{i=1}^{N} s_{ij}q_j.$$

Jsou to přímá ocenění přechodů, vážená limitními pravděpodobnostmi s_{ij}, které udávají pravděpodobnost výskytu jednotlivých stavů při provozu trvajícím dostatečně dlouhou dobu.

Je-li matice pravděpodobnosti přechodů $\mathbb{P}$ regulární, potom jsou všechny řádky matice S stejné.

Označíme-li si řádky matice S jako vektor $\vec{\pi}$, potom

$$\vec{g} = \sum_{j=1}^{N} \pi_j q_j.$$

Sloupcový vektor $F_1(T) \cdot \vec{q}$ nezávisí na n a obsahuje prvky, které zavisí pouze na i.

Jestliže předpokládáme, že systém funguje dostatečně dlouho, potom máme

$$\vec{v}(n) = n\vec{g} + \vec{v},$$

neboli ve složkách

$$v_i(n) = n \cdot g_i + v_i,$$

kde veličina v_i obsahuje konstantní členy. Při regulární matici pravděpodobnosti přechodů $\mathbb{P}$ je $g_i = g$.

V našem případě

$$\vec{g} = S \cdot \vec{q} = \begin{pmatrix} \frac{4}{9} & \frac{5}{9} \\ \frac{4}{9} & \frac{5}{9} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 7 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{23}{9} \\ \frac{23}{9} \end{pmatrix},$$

$$\vec{v} = F_1(T) \cdot \vec{q} = \frac{1}{1-0.1} \begin{pmatrix} \frac{5}{9} & -\frac{5}{9} \\ -\frac{4}{9} & \frac{4}{9} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 7 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{400}{81} \\ -\frac{320}{81} \end{pmatrix}.$$

Po dosazení dostaneme stejný výsledek jako v předchozím případě.

$$v_1(n) = \frac{23}{9}n + \frac{400}{81}$$

$$v_2(n) = \frac{23}{9}n - \frac{320}{81}$$

Pojmy k zapamatování

- V předchozích kapitolách jsme se při studiu MŘ zabývali pouze pravděpodobnostmi přechodů mezi jednotlivými stavy. Nezajímalo nás zda jsou jednotlivé přechody spojeny určitými náklady či výnosy.
- Protože se tyto problémy velmi často vyskytují v praxi, věnovali jsme se jim v této kapitole.
- Předpokládali jsme, že přechod mezi stavy je spojen s určitým ohodnocením a hledali jsme jakou maximální hodnotu může dosáhnout v průběhu daného procesu.
- Věnovali jsme se rozboru asymptotických vlastnosti Markovských řetezců.
- Pro jejich studium jsme opět používali Z-transformaci (přímou i zpětnou) a rozklad na parciální zlomky.

Kontrolní otázky

1. Co rozumíme pojmem ohodnocení přechodů?

2. Může ohodnocení přechodů mezi jednotlivými stavy nabývat libovolné hodnoty?
3. Bude matice ohodnocení přechodů stochastická?
4. Múže ohodnocení přechodů nabýt i záporných hodnot?
5. Co znamená záporné ohodnocení?

11 Rozhodovací procesy s alternativami

Průvodce studiem

Dosud jsme předpokládali neměnící se matici ocenění $\mathbb{R}$. V této kapitole budeme studovat situaci, kdy matice ocenění nebude konstantní, ale bude proměnná. Ukážeme si jak pracovat s tkovými maticemi a jak postupovat při řešení úloh s alternativami, tj. tehdy, kdy se na každém kroku můžeme, či musíme, rozhodnout, jak budeme pokračoavt dále.

Cíle

Po prostudování této kapitoly budete schopni:

- Chápat podstatu měnících se ocenění.
- Umět zpracovat náhodný proces s měnícím se oceněním.
- Řešit praktické úkoly rekurentní a nebo iterační metodou.
- Umět si vybrat vhodnou metodu pro řešení konkrétní úlohy.

11.1 Měnící se ocenění

V minulé kapitole jsme předpokládali, že matice ocenění $\mathbb{R}$ se nemění a je tedy konstantní.

Předpokládejme nyní, že ocenění nebude konstantní. Matici ocenění $\mathbb{R}$, která zůstává konstantní, vynásobíme koeficientem $\beta = \dfrac{1}{i+1}$, který máme nejčastěji vyjádřený pomocí úrokové míry. Z toho důvodu se β označuje jako diskontní faktor, a vyjadřuje počáteční hodnotu výnosu, který je splatný ke konci určitého období. Nemusí ovšem sloužit jen k výpočtům diskontních hodnot, lze mu přiřadit i pravděpodobnostní význam. Může například označovat prodlení, s nímž dojde k dalšímu opakování procesu.

Užiti koeficientu β bude účelné tam, kde můžeme očekávat, že proces skončí, ale nevíme přesně kdy.

Výpočet:

Užijeme-li úrokové míry, poskytuje diskontní faktor β některé informace, s tím, že β patří do intervalu $\beta \in \langle 0; 1\rangle$, neboli $0 \leq \beta \leq 1$.

Předpokládejme dále, že okamžitý výnos se bude vyplácet vždy na začátku přechodu ze stavu „i“ do stavu „j“.

Veličina $v_i(n)$ - hodnota celkového očekávaného výnosu daného procesu, který vychází ze stavu „i“ a který uskuteční „n“ přechodů, je potom rovna

$$v_i(n) = \sum_{j=1}^{N} p_{ij} \left(r_{ij} + \beta \cdot v_j(n-1)\right),$$

odkud po úpravě dostaneme

$$v_i(n) = \sum_{j=1}^{N} p_{ij} r_{ij} + \beta \sum_{j=1}^{N} p_{ij} v_j(n-1).$$

Protože první sume nezávisí na n, označíme si

$$q_i = \sum_{j=1}^{N} p_{ij} r_{ij}$$

a dostaneme

$$v_i(n) = q_i + \beta \sum_{j=1}^{N} p_{ij} v_j(n-1) \tag{11.1}$$

Vektorové

$$\vec{v}(n) = \vec{q} + \beta \cdot \mathbb{P} \cdot \vec{v}(n-1)$$

Pro asymptotické vyjádření můžeme použít $\mathbb{Z}$-transformaci, jako u konstantního ocenění, a potom dostaneme

$$\frac{1}{z}\left(F(z,v) - \vec{v}(0)\right) = \frac{1}{1-z} q + \beta \cdot \mathbb{P} \cdot F(z,v),$$

odkud po úpravě dostáváme

$$F(z,v) = \frac{1}{1-z}\left(I - \beta \cdot z \cdot \mathbb{P}\right)^{-1} \vec{q} + \left(I - \beta \cdot z \cdot \mathbb{P}\right)^{-1} \vec{v}(0). \tag{11.2}$$

Většinou opět volíme $\vec{v}(0) = 0$ pro zjednodušení výpočtu. Dostáváme potom

$$F(z,v) = \frac{1}{1-z}\left(I - \beta \cdot z \cdot \mathbb{P}\right)^{-1} \vec{q}.$$

Příklad 11.1. Ponecháme zadání stejné jako v předchozím případě. Navíc budeme předpokládat, že diskontní faktor $\beta = 0,5$ označuje pravděpodobnost, že proces bude dále pokračovat.

Řešení. Potom z (11.2) dostaneme pro $F_0(z,v)$, jako složku funkce $F(z,v)$, která ještě není vynásobená $\vec{q}$, vyjádření

$$F(z,v) = \frac{z}{1-z}\left(I - 0,5\cdot z\cdot \mathbb{P}\right)^{-1} = \frac{z}{1-z}\begin{pmatrix} 1-\dfrac{1}{4z} & -\dfrac{1}{4z} \\ -\dfrac{1}{5z} & 1-\dfrac{3}{10z}\end{pmatrix}^{-1}$$

Provedeme rozklad na parciální zlomky a dostaneme

$$F_0(z,v) =$$

$$= \frac{1}{1-z}\begin{pmatrix} \dfrac{28}{19} & \dfrac{10}{19} \\ \dfrac{8}{19} & \dfrac{30}{19}\end{pmatrix} + \frac{1}{1-0,5z}\begin{pmatrix} -\dfrac{8}{9} & -\dfrac{10}{9} \\ -\dfrac{8}{9} & -\dfrac{10}{9}\end{pmatrix} + \frac{1}{1-0,05z}\begin{pmatrix} -\dfrac{100}{171} & \dfrac{100}{171} \\ \dfrac{80}{171} & -\dfrac{80}{171}\end{pmatrix}.$$

Provedeme zpětnou transformaci

$$f_0 = (F_0)^{-1}$$

$$f_0(n) = \begin{pmatrix} \dfrac{28}{19} & \dfrac{10}{19} \\ \dfrac{8}{19} & \dfrac{30}{19}\end{pmatrix} + (0,5)^n\begin{pmatrix} -\dfrac{8}{9} & -\dfrac{10}{9} \\ -\dfrac{8}{9} & -\dfrac{10}{9}\end{pmatrix} + (0,05)^n\begin{pmatrix} -\dfrac{100}{171} & \dfrac{100}{171} \\ \dfrac{80}{171} & -\dfrac{80}{171}\end{pmatrix}$$

Vynásobíme vektorem $q = \begin{pmatrix} 7 \\ -1 \end{pmatrix}$ a dostaneme

$$\vec{v}(n) = f_0(n)\vec{q} = \begin{pmatrix} \dfrac{180}{19} \\ \dfrac{26}{19}\end{pmatrix} + (0,5)^n\begin{pmatrix} -\dfrac{46}{9} \\ -\dfrac{46}{9}\end{pmatrix} + (0,05)^n\begin{pmatrix} -\dfrac{800}{171} \\ \dfrac{640}{171}\end{pmatrix}$$

Odtud plyne, že pro dostatečně velké „n“ budou složky $v_i(n)$, $i = 1,2...N$ stabilní a bude platit $v_1(n) = \dfrac{186}{19}$, $v_2(n) = \dfrac{26}{19}$ a tedy nezávisí na počtu kroků n. □

Také v tomto případě můžeme asymptotické chování tohoto vektoru $\vec{v}(n)$ studovat na základě rozkladu na stacionární a tranzientní část (opět pomocí $\mathbb{Z}$-transformace)

$$(I - \beta\cdot z\cdot\mathbb{P})^{-1} = \frac{1}{1-\beta\cdot z}S + F_{\beta\cdot z}(T)$$

$$\vec{v} = \vec{q} + \beta\cdot\mathbb{P}\cdot\vec{v} \tag{11.3}$$

Což je soustava N rovnic o N neznámých, kterou umíme řešit.

Pro náš příklad to vede na soustavu

$$v_1 = 7 + 0,25v_1 + 0,25v_2,$$

$$v_2 = -1 + 0,2v_1 + 0,3v_2,$$

která má řešení $v_1 = \dfrac{186}{19}, v_2 = \dfrac{26}{19}$.

11.2 Rozhodovací proces s alternativami

Předpokládejme, že existuje nějaké rozhodovací centrum, které v souladu s určitým cílem vždy v každém kroku, volí jeden z konečného počtu možností. Tím řídí průběh celého procesu. Je zřejmý požadavek, aby tato volba byla optimální, a to pro dosti dlouho probíhající proces. Potom mluvíme o řízení M procesů nebo o procesech sekvenčního rozhodování (dynamického programování na M procesech). Ocenění jednotlivých přechodů (tj. stanovení pravděpodobností přechodů a určení jejich výnosů) jsou důležité pro srovnávání jednotlivých alternativ, pro možnost volby mezi nimi a tím i pro možnost výběru optimálního řešení.

Příklad 11.2. Studium

- Průběžné - vyžaduje hodně času, ale poznatky jsou trvalejší.
- Nárazové - Vyžadují málo času, ale důsledkem je rychlé zapomínání a tedy velké riziko.

Příklad 11.3. Bludiště - na každé křižovatce se mohu rozhodnout kam půjdu dále.

Příklad 11.4. Pacient má žaludeční vředy. Lékař se musí rozhodnout, zda jej bude léčit medikamenty a dietou a nebo zda je už nutná operace, která ale bývá mnohem dražší.

11.3 Rekurentní metoda řešení rozhodovacího procesu s alternativami

Označme alternativu (možnost) pro každý stav „k“. Počet alternativ v i-tém stavu označme „k_i“. V jednotlivých stavech vyvolá každá možnost obecně jiné rozložení pravděpodobnosti přechodu p_{ij}^k a jiné ocenění příslušných přechodů r_{ij}^k. Zde k není mocnina, ale horní index. Zápis je tak přehlednějšíve srovnání se zápisem $r_{i,j,k}$.

Naším úkolem je najít takový vektor alternativ $\vec{d}(n)$ se složkami $d_i(n)$, který bude optimalizovat celkové očekávané výnosy $\vec{v}\,(n)$. Posloupnost vektorů $\vec{d}(n), \quad n = 1, 2...$ udává počet období, které zbývají do konce toho daného procesu. Tím si definujeme strategii, tj. postup takého MP, který vede k optimu.

Pokud tento postup existuje a je nezávislý na čase, pak mluvíme o stacionárním procesu. Budeme předpokládat, že existuje taková stacionární strategie. Při postupném zkoumání jednotlivých alternativ se ukazuje, že optimální strategie „n“ kroků před koncem je možná pokud budeme vycházet a optima v $(n-1)$ kroku před koncem procesu. Můžeme to vyjádřit jako

$$v_i(n) = \max_k \sum_{j=1}^{N} p_{ij}^k \left(r_{ij}^k + v_j(n-1)\right) \tag{11.4}$$

zde $v_i(n)$, $v_i(n-1)$ jsou očekávané výnosy při zvoleném optimálním postupu. Index „k“ není mocninou, ale označuje k-tou alternativu příslušného stavu.

Výběr možnosti „k“ má za následek přechod do jiného stavu, který se řídí pravděpodobnostními pravidly, které charakterizují hodnoty „p_{ij}^k, $i, j = 1, 2, \ldots, N$“.

Přičemž p_{ij}^k udává pravděpodobnost přechodu ze stavu „i“ do stavu „j“, při výběru možnosti „k“.

Přechod ze stavu „i“ do stavu „j“ při výběru možnosti „k“ je spojen s vytvořením nějakého výnosu „r_{ij}^k“.

Zde je třeba zdůraznit, že r_{ij}^k nemusí být pouze kladné číslo, čili zisk, může se jednat o nulovou hodnotu i o ztrátu a potom budeme mít zápornou hodnotu.

Rozepíšeme si rovnici (11.4) a označíme $q_i^k = \sum\limits_{j=1}^{N} p_{ij}^k r_{ij}^k$, potom dostaneme

$$v_i(n) = \max_k \left(q_i^k + \sum_{j-1}^{N} p_{ij}^k \cdot v_j(n-1) \right). \tag{11.5}$$

q_i^k je přímý výnos za pobyt ve stavu „i“ v jednom období (tj. mezi dvěma přechody).

Při výpočtu sledujeme jednak vektor vybraných alternativ $\vec{d}(n)$ a jednak celkový výnos při optimálním postupu. Právě popsaný postup je vhodný pro procesy, které budou končit po malém počtu kroků.

Příklad 11.5. Máme výrobní linku, která může být v provozu (tj. ve stavu 1) a nebo v opravě (tj. ve stavu 2). Ve stavu 1 (v provozu) je možný plně automatizovaný provoz (bez jakékoliv kontroly) = možnost 1, nebo provoz s namátkovou kontrolou = možnost 2, nebo provoz s pravidelnou kontrolou = možnost 3. Ve stavu 2 je možná oprava linky bez výměny komponent = možnost 1, nebo linky s výměnou komponent = možnost 2,

Za dostatečně dlouhý interval byly získány pravděpodobnosti přechodu a jednotlivé hodnoty ocenění.

Stav	Možnost	Pravděpodobnosti přechodu		Ocenění	
„i“	„k“	„p_{i_1}“	„p_{i_2}“	„r_{i_1}“	„r_{i_2}“
1	1	0,4	0,6	16	4
	2	0,7	0,3	11	2
	3	0,9	0,1	8	1
2	1	0,5	0,5	4	-6
	2	0,6	0,4	2	-10

Řešení. Vyjdeme ze stavu (11.5). Určíme se hodnoty q_i^k

$$q_1^1 = 0,4 \cdot 16 + 0,6 \cdot 4 = 8,8.$$

$$q_1^2 = 0,7 \cdot 11 + 0,3 \cdot 2 = 8,3.$$

$$q_1^3 = 0,9 \cdot 8 + 0,1 \cdot 1 = 7,3.$$
$$q_2^1 = 0,5 \cdot 4 + 0,5 \cdot (-6) = -1.$$
$$q_2^2 = 0,6 \cdot 2 + 0,4 \cdot (-10) = -2,8.$$

Budeme předpokládat, že nám nezáleží na tom, v jakém stavu proces skončí a proto budeme brát, že složky $v_i(0)$ jsou všechny nulové, tj. $v_i(0) = 0,\ i = 1,2$.

Potom vektor $\vec{v}_1$ bude mít tvar

$$v_1(1) = \max_k \left[q_1^1 + \sum_{j=1}^{N} p_{1j}^1 \cdot 0; q_1^2 + \sum_{j=1}^{N} p_{1j}^2 \cdot 0; q_1^3 + \sum_{j=1}^{N} p_{1j}^3 \cdot 0 \right] = \max_k [8,8; 8,3; 7,3] = 8,8.$$

$$v_2(1) = \max_k \left[q_2^1 + \sum_{j=1}^{N} p_{2j}^1 \cdot 0; q_1^2 + \sum_{j=1}^{N} p_{2j}^2 \cdot 0 \right] = \max_k [-1; -2,8] = -1.$$

v obou případech (při výběru maxima) je výhodnější první možnost, neboli jsme dostali $\vec{d} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Analogicky pro vektor $\vec{v}(2)$ budeme mít

$$\vec{v}_1(2) = \max_k \left[q_1^1 + \sum_{j=1}^{N} p_{1j}^1 \cdot v_j(1); q_1^2 + \sum_{j=1}^{N} p_{1j}^2 \cdot v_j(1); q_1^3 + \sum_{j=1}^{N} p_{1j}^3 \cdot v_j(1) \right] =$$
$$= \max_k [8,8 + (0,4 \cdot 8,8 + 0,6 \cdot (-1)); 8,3 + (0,7 \cdot 8,8 + 0,3 \cdot (-1));$$
$$7,3 + (0,9 \cdot 8,8 + 0,1 \cdot (-1))] =$$
$$= \max_k [11,72; 14,16; 15,12] = 15,12.$$

$$\vec{v}_2(2) = \max_k \left[q_2^1 + \sum_{j=1}^{N} p_{2j}^1 \cdot v_j(1); q_2^2 + \sum_{j=1}^{N} p_{2j}^2 \cdot v_j(1) \right] =$$
$$\max_k [-1 + (0,5 \cdot 8,8 + 0,5 \cdot (-1); -2,8 + (0,6 \cdot 8,8 + 0,4 \cdot (-1)]$$
$$= \max_k [2,9; 2,08] = 2,9.$$

Takže vektor optimálních alternativ je dva kroky před koncem tvaru

$$\vec{d}(2) = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Podobně můžeme pokračovat dále. Výnosy 3 kroky před koncem, který je na počátku sledování v prvním nebo druhém stavu potom budou složky vektoru $\vec{v}(3)$:

$$\vec{v}_1(3) = \max_k \left[q_3^1 + \sum_{j=1}^{N} p_{3j}^1 \cdot v_j(2); q_3^2 + \sum_{j=1}^{N} p_{3j}^2 \cdot v_j(2); q_3^3 + \sum_{j=1}^{N} p_{3j}^3 \cdot v_j(2) \right] =$$

$$= \max_k [8,8 + (0,4 \cdot 15,12 + 0,6 \cdot 2,9); 8,3 + (0,7 \cdot 15,12 + 0,3 \cdot 2,9);$$

$$7,3 + (0,9 \cdot 15,12 + 0,1 \cdot 2,9)] =$$

$$= \max_k [16,59; 19,75; 21,2] = 21,2.$$

$$\vec{v}_2(3) = \max_k \left[q_3^1 + \sum_{j=1}^{N} p_{3j}^1 \cdot v_j(2); q_3^2 + \sum_{j=1}^{N} p_{3j}^2 \cdot v_j(2) \right] =$$

$$\max_k [-1 + (0,5 \cdot 15,12 + 0,5 \cdot 2,9; -2,8 + (0,6 \cdot 15,12 + 0,4 \cdot 2,9] =$$

$$= \max_k [8,01; 7,43] = 8,01.$$

Dostali jsme, že nejvýdodnější pro nás bude použít třetí možnost u prvního stavu a první možnost u druhého stavu, neboli máme vektor alternativ ve tvaru $\vec{d} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Opět jsme dostali stejný vektor $\vec{d}$ pro dva po sobě jdoucí stavy, tzn. dosáhli jsme optima.

□

Nevýhodou této metody je, že neznáme pro určitý počet období přesné kriterium pro to, zda jsme dosáhli optima či nikoliv.

11.4 Iterační metoda řešení rozhodovacího procesu s alternativami

Pro procesy, které jsou dlouhodobější, nebo jejíchž doba trvání není přesně ohraničena, je vhodnější použit metod, které využívají asymptotických vlastností MP s rozhodováním.

Místo hledání veličin $v_i(n)$ postupným hodnocením alternativ v každém kroku, se snažíme o určení $v_i(n)$ na základě jejich asymptotických vlastností. Až poté budeme posuzovat alternativy jednotlivých stavů. Nejdříve určíme vztah mezi $v_i(n)$ a $v_j(n-1)$ pomocí asymptotického vyjádření. Protože platí

$$v_i(n) = q_i + \sum_{j=1}^{N} p_{ij} \cdot v_j(n-1)$$

a dále

$$v_i(n) = n \cdot g + v_i,$$

můžeme psát

$$n \cdot g + v_i = q_i + \sum_{j=1}^{N} p_{ij}[(n-1)g + v_j].$$

Po úpravě, s využitím toho, že

$$\sum p_{ij} = 1,$$

dostáváme

$$g + v_i = q_i + \sum_{j=1}^{N} p_{ij} \cdot v_j.$$

Máme tak soustavu N rovnic o $N+1$ neznámých

$$g, v_1, \ldots, v_N,$$

tzn. tato soustava může být řešitelná, ale pouze s parametrem. Nemůžeme přesně určit hodnoty v_j.

Pro posouzení alternativ nám však bude stačit znát relace mezi v_i. Takové relace můžeme dostat, když budeme požadovat stálost rozdílů mezi těmito prvky, tj. $v_i - v_r$. Systém rovnic doplníme o rovnici $v_N = 0$. Vypočtené hodnoty v_i se budou lišit od původních o stejnou konstantu.

Stanovením veličin $g, v_1, v_2 \ldots v_N$ jsme získali i hodnoty $v_i(n)$ a pomocí těchto hodnot můžeme rozhodovat i o optimální alternativě. Kriteriem pro volbu alternativy je výraz

$$q_i + \sum_{j=1}^{N} p_{ij}^k \cdot v_j(n)$$

Pro dostatečně velké n jej můžeme psát ve tvaru

$$q_i^k + \sum_{j=1}^{N} p_{ij}^k \cdot (ng + v_j) = q_i^k + ng \sum_{j=1}^{N} p_{ij}^k + \sum_{j=1}^{N} p_{ij}^k \cdot v_j$$

a opět hledáme maximum pro některou z k možných alternativ a tedy $ng \sum_{j=1}^{N} p_{ij}^k$ je konstatna a můžeme ji vynechat. Z toho plyne, že alternativy posuzujeme podle vztahu

$$q_i^k + \sum_{j=1}^{N} p_{ij}^k \cdot v_j$$

POSTUP:

1. Pomocí veličin p_{ij}, q_iřešíme soustavu

$$g + v_j = q_i + \sum_{j=1}^{N} p_{ij} \cdot v_j, \quad i = 1, 2 \ldots N \tag{11.6}$$

$$v_N = 0$$

2. Pro každý stav najdeme alternativu k, která maximalizuje výnos

$$q_i^k + \sum_{j=1}^{N} p_{ij}^k \cdot v_j, \tag{11.7}$$

kde používáme hodnoty v_j určené v bodě 1.

1. Nalezená alternativa „k“ nám současně poskytuje i hodnoty q_i^k,p_{ij}^k a opakujeme body 1,2.
2. Výpočet končí nalezením vektoru $\vec{d}(n)$ alternativ, který je ve dvou po sobě jdoucích krocích stejný.

V případě užití diskontního faktoru vyjdeme z rovnice (11.1). Nás zajímají limitní výnosy „v_i“, které jsou nezávislé na počtu kroků, a proto můžeme rovnici (11.1) přepsat na tvar

$$v_i = q_i + \beta \sum_{j=1}^{N} p_{ij} \cdot v_j, \tag{11.8}$$

kde $i = 1, 2...N$

Máme soustavu N rovnic o N neznámých, kterou lze řešit.

Určíme si tedy hodnoty v_j a pak hledáme vektor alternativ, který budeme maximalizovat

$$q_i^k + \beta \sum_{j=1}^{N} p_{ij}^k \cdot v_j, \tag{11.9}$$

kde $i = 1, 2...N$.

Získáme vektor alternativ $\vec{d}(n)$

Příklad 11.6. Výrobní linka (předchozí příklad)

$$\mathbb{P} = \begin{pmatrix} 0,4 & 0,6 \\ 0,5 & 0,5 \end{pmatrix}, \quad q = \begin{pmatrix} 8,8 \\ -1 \end{pmatrix}$$

ze vztahu (11.6)

$$\begin{aligned} g + v_1 &= 8,8 + 0,4 \cdot v_1 + 0,6 \cdot v_2 \quad & g = 3,43 \\ g + v_2 &= -1 + 0,5 \cdot v_1 + 0,5 \cdot v_2 \quad => & v_1 = 8,9 \\ v_2 &= 0 \quad & v_2 = 0 \end{aligned}$$

i	k	$q_i^k + \sum_{j=1}^{N} p_{ij}^k \cdot v_j$
1	1	$8,8 + 0,4 \cdot 8,9 + 0,6 \cdot 0 = 12,36$
	2	$8,3 + 0,7 \cdot 8,9 + 0,3 \cdot 0 = 14,53$
	3	$7,3 + 0,9 \cdot 8,9 + 0,1 \cdot 0 = 15,31$
2	1	$-1 + 0,5 \cdot 8,9 + 0,5 \cdot 0 = 3,45$
	2	$-2,8 + 0,6 \cdot 8,9 + 0,4 \cdot 0 = 2,54$

$$\vec{d} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\mathbb{P} = \begin{pmatrix} 0,9 & 0,1 \\ 0,5 & 0,5 \end{pmatrix}, \quad q = \begin{pmatrix} 7,3 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$=>\quad q + v_1 = 7,3 + 0,9 \cdot v_1 + 0,1 \cdot v_2 \quad q = 5,915$

$$q + v_2 = -1 + 0,5 \cdot v_1 + 0,5 \cdot v_2 \quad => \quad v_1 = 13,83$$

$$v_2 = 0 \quad v_2 = 0$$

i	k	$q_i^k + \sum_{j=1}^{N} p_{ij}^k \cdot v_j$
1	1	$8,8 + 0,4 \cdot 13,83 + 0,6 \cdot 0 = 14,33$
	2	$8,3 + 0,7 \cdot 13,83 + 0,3 \cdot 0 = 17,98$
	3	$7,3 + 0,9 \cdot 13,83 + 0,1 \cdot 0 = 19,75$
2	1	$-1 + 0,5 \cdot 13,83 + 0,5 \cdot 0 = 5,92$
	2	$-2,8 + 0,6 \cdot 13,83 + 0,4 \cdot 0 = 5,5$

$=> \vec{d} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$

Příklad 11.7. Stejné zadání, jen přidáme $\beta = 0,9$

$$\vec{d} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbb{P} = \begin{pmatrix} 0,4 & 0,6 \\ 0,5 & 0,5 \end{pmatrix}, \quad v_2 = 30,46$$

dosadíme do (15)

$$v_1 = 8,8 + 0,9(0,4 \cdot v_1 + 0,5 \cdot v_2) \quad v_1 = 39,45$$

$$v_2 = -1 + 0,9\,(0,5 \cdot v_1 + 0,5 \cdot v_2) \quad => \quad v_2 = 30,46$$

i	k	$q_i^k + \beta \sum_{j=1}^{N} p_{ij}^k \cdot v_j$
1	1	$8,8 + 0,9\,(0,4 \cdot 39,45 + 0,6 \cdot 30,46) = 39,45$
	2	$8,3 + 0,9\,(0,7 \cdot 39,45 + 0,3 \cdot 30,46) = 41,38$
	3	$7,3 + 0,9\,(0,9 \cdot 39,45 + 0,1 \cdot 30,46) = 42$
2	1	$-1 + 0,9\,(0,5 \cdot 39,40 + 0,5 \cdot 30,46) = 30,46$
	2	$-2,8 + 0,9\,(0,6 \cdot 39,40 + 0,4 \cdot 30,46) = 29,47$

$$\vec{d} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\mathbb{P} = \begin{pmatrix} 0,9 & 0,1 \\ 0,5 & 0,5 \end{pmatrix}, \quad q = \begin{pmatrix} 7,3 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$v_1 = 7,3 + 0,9(0,9 \cdot v_1 + 0,1 \cdot v_2) \quad v_1 = 61,33$$

$$v_2 = -1 + 0,9\,(0,5 \cdot v_1 + 0,5 \cdot v_2) \quad => \quad v_2 = 48,36$$

i	k	$q_i^k + \beta \sum_{j=1}^{N} p_{ij}^k \cdot v_j$
1	1	57
	2	60
	3	61,33
2	1	48,36
	2	47,73

$$\vec{d} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Pojmy k zapamatování

- V předešlých kapitolách jsme pracovali s konstatní maticí ocenění. Zde jsme se seznámili s proměnnou maticí ocenění a práci s ní.
- Ukázali jsme si rekurentní a iterační metodu řešení úloh s nekonstantní maticíocenění.
- Seznámili jsme se s úlahami s alternativami a ukázali si postup při hledání optimálního řešení.

Kontrolní otázky

1. Co rozumíme pojmem alternativa u rozhodovacích procesů?
2. Čím je omezen počet možných alternativ?
3. Uveďte příklad ze své praxe, kdč se setkáváte s alternativními možnostmi řešení problémů.

12 Skryté Markovské modely

Průvodce studiem

V této kapitole se seznámíme se skrytými Markovskými procesy. Bude se ale jednat jen o úvod do tématiky. Zavedeme si pojem skrytého Markovského řetězce, ukážeme si jaké jsou jeho možnosti a příklady. Dále budou zformulovány tři základní otázky, kterými se teorie skrytých Markovských procesů zabývá. V závěru si ukážeme jednu z možností řešení jedné z úloh.

Cíle

Po prostudování této kapitoly budete schopni:

- Vysvětlit pojem skrytého Markovského řetězce.
- Popsat možnosti použití skrytého Markovského řetězce
- Zvládat řešení třetí úlohy z teorie skrytých Markovských řetězců

12.1 Úvod

Skryté Markovské procesy (Skryté Markovské modely) se v literatuře běžně označují zkratkou HMM, tj. Hinden Markov Models.

Je to "zlatý standard" pro analýzu časových řad, protože jde o statistický model, který je ještě zvládnutelný algoritmy s polynomiální složitostí.

Aplikace:

- Rozpoznávání řečových signálů (x signál z mikrofonu, k fonémy).
- Vyhledávání slov v promluvě (x slova, k označené kusy promluvy).
- Rozpoznávání rukopisných znaků (x tahy pera, k podpisy).
- Rozpoznávání v obrazech, např. dopravní značky (x sloupce registrační značky, k znaky značky).

- Biomedicínské inženýrství - analýza signálů EKG a EEG (x signál, k charakteristiky signálu).
- Bioinformatika, analýza DNA sekvencí (x odezva fluorescenčně označených molekul, $k \in \{A, C, G, T\}$) nebo ($x \in \{A, C, G, T\}$, k interpretačně významné posloupnosti).
- Mobilní robotika (x body pohybu robota, k interpretace pohybu).

Definice 12.1. Konečný automat je uspořádaná šestice $(K, V, X, \delta, K_0, F)$, kde
K je konečná množina stavů automatu,
V je konečná abeceda vstupních symbolů,
X je konečná abeceda výstupních symbolů,
K_0 je počáteční stav, přičemž $K_0 \subset K$,
F je množina cílových stavů, přičemž $F \subset K$,
$\delta : K \times V \to K \times X$ je přechodová funkce.

Fungování automatu.
Automat funguje ve shodě s rozdělením pravděpodobnosti

$$p(x, k) = p(x_1, x_2, \ldots, x_n, k_0, k_1, \ldots, k_n) = p(k_0) \cdot \prod_{i=1}^{n} p\left(x_i, k_i / k_{i-1}\right).$$

To znamená, že automat na počátku generuje náhodný stav k_0 s pravděpodobností $p(k_0)$ a přejde do něj. V i-tém okamžiku generuje dvojici (x_i, k_i) s pravděpodobnností $p(x_i, k_i/k_{i-1})$. Na výstupu dává automat symbol x_i a přechází do stavu k_i.

Příklad 12.2. Statistický zjednodušený model počasí.
Mějme stavy:
k_1 - dešťové nebo sněhové srážky,
k_2 - zataženo,
k_3 - slunečno.
Nechť přechodová matice má tvar

$$P = \begin{pmatrix} 0.4 & 0.3 & 0.3 \\ 0.2 & 0.6 & 0.2 \\ 0.1 & 0.1 & 0.8 \end{pmatrix}.$$

Jedná se o příklad automatu a současně i o Markovský proces.

Náhodné posloupnosti

Pozorování $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in X^n$.

Skryté stavy $k = (k_0, k_1, k_2, \ldots, k_n) \in K^{n+1}$.

Zavedeme si označení $(x_a, x_{a+1}, \ldots, x_b) = x_a^b$.

Potom pozorování $x = x_1^n$, skryté stavy $k = k_0^n$.

Markovské posloupnosti se skrytými stavy.

Statistický model

$$p(x,k) = X^n \times K^{n+1} \to \mathbb{R}.$$

Markovský řetězec: Předpokládáme, že pro všechny posloupnosti $x = (x_1^i, x_{i+1}^n)$ a $k = (k_0^{i-1}, k_i, k_{i+1}^n)$ platí

$$p(x,k) = p(k_i) \cdot p\left(x_1^i, k_0^{i-1}/k_0\right) \cdot p\left(x_{i+1}^n, k_{i+1}^n/k_i\right). \tag{12.1}$$

Budeme se nyní věnovat pouze skrytým stavům. Vyjdeme přitom z (12.1). Pro skryté stavy po sčítání přes všechna možná pozorování x vyplývá Markovská vlastnost pro posloupnosti

$$p(k) = k(k_i) \cdot p\left(k_0^{i-1}/k_i\right) \cdot p\left(p_{i+1}^n/k_i\right). \tag{12.2}$$

V rovnici (12.1) budeme sčítat přes posloupnosti skrytých stavů k_{i+2}^n a potom přes posloupnosti pozorování x_{i+2}^n. Dostaneme

$$\begin{aligned} p\left(x_1^{i+1}, k_0^{i+1}\right) &= \sum_{x_{i+2}^n} \sum_{k_{i+2}^n} p(x,k) = p\left(x_1^i, k_0^i\right) \sum_{x_{i+2}^n} \sum_{k_{i+2}^n} p\left(x_{i+1}^n, k_{i+1}^n/k_i\right) \\ &= p\left(x_1^i, k_0^i\right) p\left(x_{i+1}, k_{i+1}/k_i\right). \end{aligned}$$

Využijeme předchozí vztah rekurzivně a dostaneme

$$p(x,k) = p(x_1, \ldots, x_n, k_0, \ldots, k_n) = p(k_0) \prod_{i=1}^{n} p(x_i, k_i/k_{i-1}).$$

Tím se nám výpočet složité funkce o $(2n+1)$ proměnných zjednodušil na výpočet n funkcí $p(x_i, k_i/k_{i-1})$ o 3 proměnných a jedné funkce $p(k_0)$ o jedné proměnné.

Definice 12.3. Skrytý Markovský model je stochastický automat $HMM = (N, M, A, B, \pi)$, který je charakterizován následujícími vlastnostmi:

1. N označuje počet stavů HMM v množině $S = \{S_1, S_2, \ldots, S_N\}$ s hodnotami q_t v čase t.

2. M označuje počet navzájem různých pozorovaných symbolů $v_1, v_2, \ldots, v_M$ s hodnotou Q_t v čase t. Pozorované symboly odpovídají fyzickému výstupu automatu. Vždy je budeme označovat jako jednotlivá písměna abecedy.

3. A je čtvercová matice řádu N, kde $A = \{a_{ij}\}$ označuje pravděpodobnost rozdělení přechodů mezi jednotlivými stavy, tj.

   $$a_{ij} = P(q_{t+1} = S_j/q_i = S_i), \quad 1 \leq i, j \leq N.$$

   znamená, že automat, který se v čase q_t nachází ve stavu S_i přejde s pravděpodobností a_{ij} do stavu S_j.

4. B je matice typu $N \times M$, kde $B = \{b_j(k)\}$ označuje pravděpodobnostní rozdělení pozorovaných symbolů v jednotlivých stavech. Pravděpodobnost

$$b_j(k) = P(v_k \text{ v čase } t/q_t = S_i), \quad 1 \leq j \leq N,\ 1 \leq k \leq M,$$

znamená, že automat generuje v čase q_t pozorovaný symbol v_k a nachází se ve stavu S_i

5. π je N-dimenzionální vektor takový, že $\pi = \{\pi_i\}$ označuje počáteční rozdělení pravděpodobností jednotlivých stavů, kde

$$\pi_i = P(q_1 = S_i), \quad 1 \leq i \leq N,$$

tj. prvděpodobnost, že automat se v čase q_1 nachází ve stavu S_i

Daný HMM s příslušnými hodnotami $N, M, A.M, \pi$ lze použít jako generátor pozorovací posloupnosti

$$O = O_1 O_2 \ldots O_T \tag{12.3}$$

kde každé pozorování O_i je jedním z možnách pozorovaných symbolů $v_1, v_2, dots, v_M$ a T je celkový počet pozorování v posloupnosti, tj. délka pozorované posloupnosti.

Algoritmus pro generování pozorovací posloupnosti

1. Vybereme počáteční stav $q_1 = S_i$ podle počátečního rozdělení pravděpodobností jednotlivých stvů π.

2. Nastavíme $t = 1$.

3. Vybereme $O_t = v_k$ podle pravděpodobnostního rozdělení pozorovaných symbolů ve stavu S_i, tj. $b_i(k)$.

4. Přesuneme se do nového stavu $q_{t+1} = S_j$ podle pravděpodobnostního rozdělení přechodů mezi stavy S_i a S_j, tj. a_{ij}.

5. Pokud je $t < T$, potom nastavíme $t = t + 1$ a jdeme zpět na krok 3. a opakujeme postup. V případě $t = T$ ukončujeme proces.

Zatímco u běžného Markovského procesu odpovídá každému stavu konkrétní pozorovatelná událost (konkrétní technický jev), tak u skrytých Markovských modelů jsou jednotlivá pozorování pravděpodobnostní funkcí každého stavu. Neboli skrytý Markovský model je vlastně vnořený náhodný proces, kdy jeden náhodný proces je vnořený, tj. není možné jej přímo pozorovat, tj. je **skrytý**, ale můžeme jej pozorovat pomocí další množiny náhodných stvů, které tvoří pozorovací posloupnost (12.3).

Příklad 12.4. Mějme skrytý Markovský model se třemi stavy a dvěma pozorovanými stavy.

$$N = 2,\ s = \{S_1, S_2, S_2\},\ M = 2,\ V = \{v_1, v_2\},$$

$$A = \{a_{ij}\} = \begin{pmatrix} 0.8 & 0.1 & 0.1 \\ 0.2 & 0.5 & 0.3 \\ 0.2 & 0.2 & 0.6 \end{pmatrix},$$

$$B = \{b_j(k)\} = \begin{pmatrix} 0.5 & 0.5 \\ 0 & 0.5 \\ 0.5 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\pi = \{\pi_i\} = \{0.5, 0.5, 0\}.$$

Pozorovaná posloupnost potom bude ve tvaru

$$O = v_1 v_1 v_2 v_2 v_1 v_2 v_1 v_2 v_1 v_1 v_2 v_2 v_1 v_2 \ldots$$

Pokud použijeme jiné označení pro pozorované stavy dostaneme například pro volbu $v_1 = = 1, v_2 = 0$ posloupnost

$$O = 110010110010\ldots$$

Pro volbu $v_1 = \spadesuit, v_2 = \clubsuit$ dostaneme

$$O = \spadesuit\spadesuit\clubsuit\clubsuit\spadesuit\clubsuit\spadesuit\clubsuit\spadesuit\spadesuit\clubsuit\clubsuit\spadesuit\clubsuit\ldots$$

Stále se jedná o stejný výsledek, který nezávisí na použitém označení.

12.2 Základní úkoly řešené u HMM

- **Úloha č. 1: Vyhodnocení.**
  Jak efektivně spočítat pro konkrétní pozorovanou posloupnost (12.3) a daný HMM model $\lambda = (N, M, A, B, \pi)$ pravděpodobnost $P(O/\lambda)$?
  Neboli určit pravděpodobnost, že je pozorovaná posloupnost (12.3) generována zvoleným modelem λ.

- **Úloha č. 2: Dekódování**
  K zadanému modelu λ a zadané pozorovací posloupnosti (12.3) jak co nejlépe vybrat posloupnost stavů $Q = q_1 q_2 \ldots q_T$, která by co nejlépe odpovídala pozorované posloupnosti.
  Neboli pokusit se odkrýt skrytou část modelu a najít správnou posloupnost stavů.

- **Úloha č. 3: Učení.** Někdy se používá i označení „trénování“.
  Jakým způsobem můžeme odhadnout parametry modelu $\lambda = (N, M, A, B, \pi)$ při zadané pozorovací posloupnosti (12.3) tak, aby pravděpobodnost $P(O/\lambda)$ byla maximální.
  Neboli k daným pozorováním sestavit co nejpřesnější model.

12.2.1 Řešení třetí úlohy

Zatím není znám žádný analytický postup, který by vedl k řešení úlohy č. 3, tj. neumíme sestavit postup, který by maximalizoval pravděpodobnost pozorované posloupnosti. Jinými slovy k libovolné konečné pozorované posloupnosti neexistuje optimální způsob, který by umožňoval odhadovat parametry modelu.

Z druhé strany jsme schopni vybrat model $\lambda = (N, M, A, B, \pi)$ tak, že pravděpodobnost $P(O/\lambda)$ bude lokálně maximalizovaná numerickými iterativními metodami. Jedním z nejčastěji používaných postupů je algoritmus Baum-Welch, který je mimo jiné i součástí Toolboxu pro MATLAB. Budeme se nyní věnovat tomuto algoritmu podrobněji.

Označmě

$$\xi_t(i,j) = P(q_t = S_i, q_{t+1} = S_j/O, \lambda), \tag{12.4}$$

neboli pro daný model λ a pro pozorovanou posloupnost O je $\xi_t(i,j)$ pravděpodobnost toho, že se v čase t nalézáme ve stavu S_i a v čase $t+1$ ve stavu S_j.

Jako dopřednou proměnnou $\alpha_t(i)$ nazveme pro $t \leq T$ pravděpodobnost částečné pozorované posloupnosti $O = O_1O_2\dots O_t$ a stavu S_i v čase t pro daný model λ, která je definována vztahem

$$\alpha_t(i) = P(O_1O_2\dots O_t, q_t = S_i/\lambda). \tag{12.5}$$

Obdobně jako zpětnou proměnnou $\beta_t(i)$ nazveme pro čas $t+1,\dots,T$ pravděpodobnost částečné pozorované posloupnosti $O = O_{t+1}O_{t+2}\dots O_T$ a stavu S_i v čase t pro daný model λ, která je definována vztahem

$$\beta_t(i) = P(O_{t+1}O_{t+2}\dots O_T, q_t = S_i/\lambda). \tag{12.6}$$

S využitím právě zavedených označení můžeme psát:

$$\xi_t(i,j) = \frac{P(q_t = S_i, q_{t+1} = S_j/O, \lambda)}{P(O, \lambda)} = \frac{\alpha_t(i)a_{ij}b_j(O_{t+1})\beta_{t+1}(j)}{\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N}\alpha_t(i)a_{ij}b_j(O_{t+1})\beta_{t+1}(j)} \tag{12.7}$$

Pojmy k zapamatování

- Seznámili jsme se podstatou sktrytých Markovských procesů.
- Vysvětlili jsme si rozdíl mezi výsledkem přechodu do daného stavu a pozorováním, které mezi sebou nemusí mít jednoznačnou vazbu.
- Byly zformulovánu tři základní úkoly, které řeší teorie skrytých Markovských procesů.
- Ukázali jsme si postup při řešení třetí úlohy.

Kontrolní otázky

1. Co rozumíme pojmem pozorování?

2. Co je konečný automat?
3. Které úlohy se řeší v teorii skrytých Markovských procesů?
4. Jaké parametry musíme znát pro určení skrytého Markovského modelu?

Literatura

[1] J.Anděl: *Matematická statistika*, Praha, SNTL, 1978

[2] J.Anděl: *Statistiské metody*, Praha, Matfyzpress, 1993

[3] Nicole Bäuerle, Ulrich Rieder: Markov Decision Processes with Applications to Finance. Springer 2011, ISBN 978-3-642-18323-2.

[4] L.Bican: *Lineární algebra,* SNTL 1979, rozšířené vydání 2001

[5] G.Birkhoff, T.C.Bartee: *Aplikovaná algebra,* Alfa, Bratislava 1981

[6] G.Birkhoff, S.MacLane: *Algebra,* Alfa,Bratislava 1973

[7] M. Budíková, Š. Mikoláš, P. Osecký: *Teorie pravděpodobnosti a matematická statistika*, Brno, MU – Př.fak, 1998

[8] M. Capiński, T. Zastawniak: *Probability Through Problems.* Springer 2003, ISBN 0-387-950063-X.

[9] M.Demlová, J.Nagy: *Algebra,* MVšT —III, SNTL 1982

[10] J.Diblík, A.Haluzíková, J.Baštinec: *Numerické metody a matematická statistika.* VUT Brno, 1987 (skriptum)

[11] J.Diblík, J.Baštinec *Matematika IV.* Nakladatelství VUT v Brně, 1991 (skriptum)

[12] N. Dudorkin: *Operační analýza,* FEL ČVUT, Praha, 1997.

[13] I.A. Dzhalladova: *Optimization of stochastic systems.* Kiev, KNEU Press, 2005, 284 pp. (in Ukrainien)

[14] F.Fabian, Z.Kluiber: *Metoda Monte Carlo a možnosti jejího uplatnění*, Prospektrum, Praha, 1998

[15] udolf J. Freund, Donna Mohr, Wiliam J. Wilson: Statistical Methods.3rd Edition, Elzevir 2010. ISBN 978-0-12-374970-3.

[16] L.E.Garner: *Calculus and analytic geometry*, London, 1988

[17] D. Gusak, A, Kukush, A. Kulik, Y. Mishura, A. Pilipenko: *Theory of Stochastic Processes.* Springer, 2010, ISBN 978-0-387-87861-4.

[18] A.Haluzíková *Numerické metody.* Redakce VN MON VUT Brno, 1989 (skriptum)

[19] A.Haluzíková, V.Kudláček, B. Zástěra: *Numerické metody a matematická statistika.* SNTL Brno, 1983 (skriptum)

[20] V.Havel,J.Holenda: *Linaární algebra,* SNTL 1984

[21] Z.Horský: *Množiny a matematické struktury,* MVšT — I, SNTL 1980

[22] Z.Horský: *Vektorové prostory,* MVšT — II, SNTL 1980

[23] Z. Horský: *Diferenciální počet*, MVŠT - V., Praha 1982

[24] C.W. CHurchman, R.L. Ackoff, E.L. Arnoff: *Úvod do operačného výskumu.* ALFA, Bratislava 1968.

[25] O. Ibe: Markov Processes for Stochastic Modeling. Elsevir 2009, ISBN 978-0-12-374451-7.

[26] K. Itô: *Stochastic Processes*, Springer, Berlin, New York 2004

[27] V. Jarník: *Diferenciální počet I, II.*, Nakladatelství ČSAV, Praha 1963

[28] V. Jarník: *Integrální počet I, II.*, Nakladatelství ČSAV, Praha 1963

[29] O. Kallenberg: *Foundations of Modern Probabiluty.* Springer, 2001. ISBN 0-387-95313-2.

[30] P.E. Kloeden, E. Platen: *Numerical solution of stochastic Differential Equations.* Springer1999. ISBN 3-540-54062-8.

[31] V. Kořenář: *Stochastické procesy.* VŠE Praha, 1998. ISBN 80-7079-813-0.

[32] J.Kuben: Diferenciální rovnice. VA Brno 2000.

[33] L.Kučera, J.Nešetřil *Algebraické metody diskretní matematiky* SNTL, Praha 1988

[34] A. Laščiak a kol.: *Dynamické modely.* ALFA, Bratislava 1985.

[35] Zenghu Li: Measure-Valued Branching Markov Processes. Springer 2011, ISBN 978-3-642-15003-6.

[36] J.Likeš, J. Machek: *Počet pravděpodobnosti*, SNTL, Praha 1981

[37] J.Likeš, J. Machek: *Matematická statistika*, SNTL, Praha 1983

[38] G.I.Marčuk *Metody numerické matematiky.* Academia Praha 1987

[39] S.Míka: *Numerické metody algebry,* MVŠT — IV, SNTL 1982

[40] J.Nagy, E.Nováková, M.Vacek *Integrální počet*, MVŠT — VI, SNTL Praha 1984

[41] J.Nagy, E.Nováková, M.Vacek: *Vektorová analýza*, MVŠT - VIII., Praha 1984

[42] M.Nekvinda, J.Šrubař, J.Vild *Úvod do numerické matematiky.* SNTL 1976

[43] Ľ. Piatka: Markovove procesy. Alfa, Bratislava, 1981

[44] M. Pinsky, S. Karlin: An Introduction to Stochastic Modeling, 4th Edition. Elzevir 2011. ISBN: 978-0-12-381416-6.

[45] P.Pták: Diferenciální rovnice, Laplaceova transformace. ČVUT Praha 1999

[46] P.Přikryl *Numerické metody matematické analýzy.* MVŠT — XXIV, SNTL 1985

[47] C. R. Rao, Dipak K. Dey: Essential Bayesian Models. Elzevir 2010. ISBN: 978-0-444-53732-4.

[48] C.R.Rao, J. Philip Miller, D.C.Rao: Essential Statistical Methods for Medical Statistic. Elsevir 2010. ISBN: 978-0-444-53732-4.

[49] Karel Rektorys a kol.: Přehled užité matematiky. SNTL Praha

[50] Z.Riečanová a kol. *Numerické metódy a matematická štátistika.* Alfa Bratislava 1987

[51] V. Savchuk, Ch. P. Tsokos: Bayeasian Theory and Methods with Applications. Springer 2011, ISBN 978-94-91216-13-8.

[52] J.Seger, R. Hindls: *Statistické metody v tržním hospodářství*, Victoria Publishing, Praha 1995, ISBN 80-7187-058-7

[53] T.Šalát: *Metrické priestory,* Alfa, Bratislava 1981

[54] M.Šikulová, Z.Karpíšek: *Matematika IV – Pravděpodobnost a matematická statistika.*VUT Brno, 1987 (skriptum)

[55] O. Tyc: *Operační analýza.* MZLU Brno 2002.

[56] T.H.Wonnacot, R.J.Wonnacot *Statistika pro obchod a hospodářství.* Victoria Publishing, Praha, ISBN 80-85605-09-0

[57] Brani Vikovic: Statistics for Bioengineering Science with MATLAB and WinBUGS Support. Springer 2011, ISBN 978-1-4614-0393-7.

[58] J. Zapletal: *Operační analýza.* Kunovice 1995.

[59] J. Zapletal: *Úvod do analýzy ekonomických časových řad.* FEKT VUT, Brno, 2000,ISBN80-214-1719-6