VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ V BRNĚ
FAKULTA ELEKTROTECHNIKY A KOMUNIKAČNÍCH TECHNOLOGIÍ
ÚSTAV MATEMATIKY

Diskrétní procesy v elektrotechnice

(Elektrotechnika a komunikační technologie)

Josef Diblík

evropský sociální fond v ČR
EVROPSKÁ UNIE
MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ, MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY
OP Vzdělávání pro konkurenceschopnost
VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ V BRNĚ
INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Ústav matematiky FEKT VUT v Brně, 2014
http://www.umat.feec.vutbr.cz

Obrázky pomocí METAPOSTu a METAFONTu: Jaromír Kuben

Tento text byl vytvořen v rámci realizace projektu CZ.1.07/2.2.00/15.0156,
Inovace výuky matematických předmětů v rámci studijních programů FEKT a FIT VUT v Brně.

Součástí tohoto učebního textu jsou odkazy na tzv. maplety, tj. programy vytvořené v prostředí Maple. Tyto odkazy jsou v textu zvýrazněny barvou, příp. uvozeny slovem *maplet*. Maplety ke svému běhu nevyžadují software Maple – je však nutné mít na klientském počítači nainstalováno prostředí Java a nastavenou vhodnou úroveň zabezpečení prohlížeče i prostředí Java. Po kliknutí na odkaz mapletu se v závislosti na softwarovém prostředí klientského počítače zobrazí různá hlášení o zabezpečení – všechny dialogy je třeba povolit a spouštění požadovaných prvků neblokovat.

Doplňující součástí tohoto učebního textu jsou příklady zpracované v elektronické bance příkladů.

Obsah

1 Dynamika diferenčních rovnic prvního řádu

1.1 Úvod

Diferenční rovnice obvykle popisují vývoj určitých jevů v průběhu času. Například jestliže určitá populace je popsána diskrétně, pak hodnota $(n+1)$-té generace $x(n+1)$ je funkcí n-té generace $x(n)$. Tento vztah lze vyjádřit pomocí **diferenční rovnice**

$$x(n+1) = f(x(n)). \tag{1.1}$$

Na tuto problematiku se můžeme podívat i z jiného úhlu pohledu. Začněme od bodu x_0, od kterého je tvořena následující posloupnost

$$x_0, f(x_0), f(f(x_0)), f(f(f(x_0))), \ldots$$

Pro zjednodušení můžeme použít zápis

$$f^2(x_0) = f(f(x_0)), f^3(x_0) = f(f(f(x_0))), \ldots.$$

$f(x_0)$ je nazývána **první iterací** bodu x_0, $f^2(x_0)$ je nazývána druhou iterací bodu x_0 a obecněji $f^n(x_0)$ je n-tou iterací bodu x_0. Množina všech (kladných) iterací $\{f^n(x_0); n \geq 0\}$ je nazývána **(kladnou) orbitou** bodu x_0, a je označována jako $O^+(x_0)$. Tento iterační postup je příkladem **diskrétního dynamického systému**. Nechť $x(n) = f^n(x_0)$, pak platí, že

$$x(n+1) = f^{n+1}(x_0) = f\left(f^n(x_0)\right) = f\left(x(n)\right)$$

a tím se opět dostáváme k rovnici (1.1). Všimněme si, že $x(0) = f^0(x_0) = x_0$.

Je-li funkce f v rovnici (1.1) nahrazena funkcí g dvou proměnných, potom je $g : \mathbb{Z}^+ + \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, kde $\mathbb{Z}^+$ je množina kladných celých čísel a $\mathbb{R}$ je množina reálných čísel. Pak platí, že

$$x(n+1) = g(n, x(n)). \tag{1.2}$$

Rovnice (1.2) se nazývá **neautonomní** nebo časově závislá, zatímco rovnice (1.1) se nazývá **autonomní** nebo také časově neměnná. Studium rovnice (1.2) je mnohem složitější. Jestliže je dána počáteční podmínka $x(n_0) = x_0$, pak pro $n \geq n_0$ existuje jediné řešení $x(n) \equiv x(n, n_0, x_0)$ rovnice (1.2) takové, že $x(n_0, n_0, x_0) = x_0$. Toto může být snadno dokázáno pomocí iterací. Nyní

$$x(n_0+1, n_0, x_0) \quad = \quad g\left(n_0, x(n_0)\right)$$

$$
\begin{aligned}
& = g(n_0, x_0), \\
x(n_0+2, n_0, x_0) &= g\left(n_0+1, x(n_0+1)\right) \\
&= g\left(n_0+1, g(n_0, x_0)\right), \\
x(n_0+3, n_0, x_0) &= g\left(n_0+2, x(n_0+2)\right) \\
&= g\left(n_0+2, g\left(n_0+1, g(n_0, x_0)\right)\right).
\end{aligned}
$$

A induktivně dostáváme

$$x(n, n_0, x_0) = g\left(n-1, x(n-1, n_0, x_0)\right).$$

1.2 Lineární diferenční rovnice prvního řádu

V této části se budeme zabývat jednoduchými speciálními případy rovnic (1.1) a (1.2), konkrétně lineárními rovnicemi. **Lineární homogenní rovnice prvního řádu** je dána vztahem

$$x(n+1) = a(n)\,x(n), \quad x(n_0) = x_0, \quad n \geq n_0 \geq 0 \tag{1.3}$$

a přidružená **nehomogenní rovnice** je

$$y(n+1) = a(n)\,y(n) + g(n), \quad y(n_0) = y_0, \quad n \geq n_0 \geq 0 \tag{1.4}$$

přičemž pro obě dvě rovnice se předpokládá, že $a(n) \neq 0$, $a(n)$ a $g(n)$ jsou reálné hodnoty funkcí definované pro $n \geq n_0 \geq 0$.

Řešení rovnice (1.3) je možné získat jednoduchou iterací.

$$
\begin{aligned}
x(n_0+1) &= a(n_0)\,x(n_0) = a(n_0)\,x_0, \\
x(n_0+2) &= a(n_0+1)\,x(n_0+1) = a(n_0+1)\,a(n_0)\,x_0, \\
x(n_0+3) &= a(n_0+2)\,x(n_0+2) = a(n_0+2)\,a(n_0+1)\,a(n_0)\,x_0.
\end{aligned}
$$

Platí

$$
\begin{aligned}
x(n) &= x(n_0+n-n_0) \\
&= a(n-1)\,a(n-2)\cdots a(n_0)\,x_0 \\
&= \left(\prod_{i=n_0}^{n-1} a(i)\right) x_0.
\end{aligned} \tag{1.5}
$$

Jediné řešení nehomogenní rovnice (1.4) může být nalezeno jako:

$$
\begin{aligned}
y(n_0+1) &= a(n_0)\,y_0 + g(n_0), \\
y(n_0+2) &= a(n_0+1)\,y(n_0+1) + g(n_0+1) \\
&= a(n_0+1)\,a(n_0)\,y_0 + a(n_0+1)\,g(n_0) + g(n_0+1).
\end{aligned}
$$

Nyní pomocí matematické indukce ukážeme, že pro všechna $n \in \mathbb{Z}^+$,

$$y(n) = \left(\prod_{i=n_0}^{n-1} a(i)\right) y_0 + \sum_{r=n_0}^{n-1} \left(\prod_{i=r+1}^{n-1} a(i)\right) g(r). \tag{1.6}$$

Níže použijeme definiční vztahy $\prod_{i=k+1}^{k} a(i) = 1$ a $\sum_{i=k+1}^{k} a(i) = 0$.
K ověření správnost vzorce (1.6) předpokládáme, že platí $n = k$. Potom po dosazení do rovnice (1.4) dostaneme rovnici $y(k+1) = a(k)\,y(k) + g(k)$, kterou pomocí vztahu (1.6) nahradíme za

$$\begin{aligned} y(k+1) &= a(k)\left(\prod_{i=n_0}^{k-1} a(i)\right) y_0 + \sum_{r=n_0}^{k-1}\left(a(k)\prod_{i=r+1}^{k-1} a(i)\right) g(r) + g(k) \\ &= \left(\prod_{i=n_0}^{k} a(i)\right) y_0 + \sum_{r=n_0}^{k-1}\left(\prod_{i=r+1}^{k} a(i)\right) g(r) + \left(\prod_{i=k+1}^{k} a(i)\right) g(k) \\ &= \left(\prod_{i=n_0}^{k} a(i)\right) y_0 + \sum_{r=n_0}^{k}\left(\prod_{i=r+1}^{k} a(i)\right) g(r). \end{aligned}$$

Z toho důvodu vzorec (1.6) platí pro všechna $n \in \mathbb{Z}^+$.

1.2.1 Speciální případy

Zde jsou uvedeny dva speciální případy rovnic (1.4), které jsou důležité v mnoha aplikacích.
První rovnice je dána následujícím vztahem

$$y(n+1) = a\,y(n) + g(n), \quad y(0) = y_0. \tag{1.7}$$

Užitím vzorce (1.6) můžeme určit, že

$$y(n) = a^n\,y_0 + \sum_{k=0}^{n-1} a^{n-k-1} g(k). \tag{1.8}$$

Druhá rovnice je

$$y(n+1) = a\,y(n) + b, \quad y(0) = y_0. \tag{1.9}$$

Pomocí vztahu (1.8) získáme

$$y(n) = \begin{cases} a^n\,y_0 + b\left(\frac{a^n-1}{a-1}\right) & \text{if } a \neq 1, \\ y_0 + bn & \text{if } a = 1. \end{cases} \tag{1.10}$$

Nyní si uvedeme některé praktické příklady využívající výše uvedených vzorců.

Příklad 1.1. Řešte rovnici

$$y(n+1) = (n+1)\,y(n) + 2^n(n+1)!, \quad y(0) = 1, \quad n > 0.$$

Řešení.

$$\begin{aligned} y(n) &= \prod_{i=0}^{n-1}(i+1) + \sum_{k=0}^{n-1}\left(\prod_{i=k+1}^{n-1}(i+1)\right) 2^k\,(k+1)! \\ &= n! + \sum_{k=0}^{n-1} n!\,2^k = n! + n!\,\frac{2^n-1}{2-1} = 2^n\,n!\ . \end{aligned}$$

Příklad 1.2. Najděte řešení rovnice

$$x(n+1) = 2x(n) + 3^n, \quad x(1) = 0.5\,.$$

Řešení. Z (1.8) dostaneme

$$\begin{aligned} x(n) &= \tfrac{1}{2}\,2^{n-1} + \sum_{k=1}^{n-1} 2^{n-k-1}\,3^k \;=\; 2^{n-2} + 2^{n-1}\sum_{k=1}^{n-1}\left(\tfrac{3}{2}\right)^k \\ &= 2^{n-2} + 2^{n-1}\cdot\tfrac{3}{2}\left(\frac{\left(\frac{3}{2}\right)^{n-1}-1}{\frac{3}{2}-1}\right) = 2^{n-2} + 3\cdot 2^{n-1}\left(\left(\tfrac{3}{2}\right)^{n-1}-1\right) \\ &= 2^{n-2} + 3(3^{n-1}-2^{n-1}) \;=\; 3^n - 5\cdot 2^{n-2}\,. \end{aligned}$$

Příklad 1.3. Lék je podáván každé čtyři hodiny. Nechť $D(n)$ je množství léku v krevním systému v n-tém intervalu. Tělo vyloučí určitou část léku p v každém časovém intervalu. Je-li podávaná dávka léku označena jako D_0, najděte $D(n)$ a $\lim_{n\to\infty} D(n)$.

Řešení. Protože je dávka léku v pacientově krevním systému v čase $(n+1)$ rovna množství v čase n minus zlomek p, charakterizující vylučování z těla, plus nová dávka D_0, dostáváme následující rovnici:

$$D(n+1) = (1-p)D(n) + D_0.$$

Pomocí vztahu (1.10) dostáváme

$$D(n) = \left(D_0 - \frac{D_0}{p}\right)(1-p)^n + \frac{D_0}{p}\,.$$

Proto

$$\lim_{n\to\infty} D(n) = \frac{D_0}{p}\,. \tag{1.11}$$

Nechť $D_0 = 2\ cm^3$, $p = 0.25$.
Po dosazení do původní rovnice dostáváme

$$D(n+1) = 0.75\,D(n) + 2, \quad D(0) = 2.$$

Následující tabulka udává $D(n)$ pro $0 \le n \le 10$.

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$D(n)$	2	3.5	4.62	5.47	6.1	6.58	6.93	7.2	7.4	7.55	7.66

Z rovnice (1.11) vyplývá, že $\lim_{n\to\infty} D(n) = 8$, kde $D^* = 8$ cm^3 je rovnovážné množství léku v těle.

Příklad 1.4. **(Amortizace).** Amortizace je proces, při kterém je půjčka splácena v posloupnosti pravidelných plateb. Každá platba se skládá ze dvou částí, tj. z určité části nesplacené půjčky a z části vzniklého úroku.

Nechť $p(n)$ vyjadřuje zbytek nesplaceného dluhu n-té platby $g(n)$. Předpokládejme, že hodnota úroku činí část r za dané platební období.

Formulace našeho modelu je zde založena na skutečnosti, že nesplacená půjčka $p(n+1)$ po splacení $(n+1)$-té platby je rovna nesplacené půjčce $p(n)$ po n-té platbě plus úrok $rp(n)$ odpovídající $(n+1)$-té periodě minus n-tá platba $g(n)$. Potom

$$\begin{aligned} p(n+1) &= p(n) + rp(n) - g(n) \quad \text{nebo} \\ p(n+1) &= (1+r)p(n) - g(n), \quad p(0) = p_0, \end{aligned} \tag{1.12}$$

kde p_0 je počáteční dluh. Z rovnice (1.8) dostáváme

$$p(n) = (1+r)^n p_0 - \sum_{k=0}^{n-1} (1+r)^{n-k-1} g(k). \tag{1.13}$$

Ve skutečnosti částka $g(n)$ je konstantní a označme si ji T. Po úpravě dostaneme

$$p(n) = (1+r)^n p_0 - ((1+r)^n - 1) \left(\frac{T}{r} \right). \tag{1.14}$$

Pokud bychom chtěli splácet dluh v přesně stanovených n platbách, jak velká by byla měsíční částka platby T? Nejprve si všimněme, že $p(n) = 0$. Poté z rovnice (1.14) dostaneme

$$T = p_0 \cdot \frac{r}{1 - (1+r)^{-n}} \ .$$

1.3 Rovnovážný bod

Pojem rovnovážného bodu (stavu) je centrálním pojmem při studiu dynamiky jakéhokoliv dynamického systému. Využívá se v mnoha aplikacích jako v biologii, ekonomii, fyzice, strojírenství atd. Je žádoucí, aby všechny stavy (řešení) daného systému měly tendenci konvergovat k jejich rovnovážnému stavu (bodu). To je předmětem studie teorie stability. Jde o téma, které má velký význam pro vědce a inženýry. Nyní si formálně definujeme rovnovážný bod.

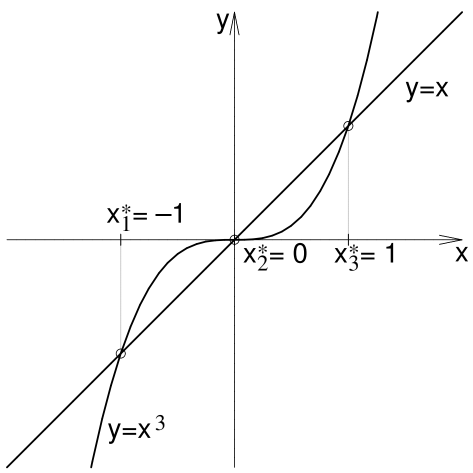
Definice 1.5. Bod x^* v oblasti f se nazývá **rovnovážný bod** rovnice (1.1) pokud je pevným bodem zobrazení f, tj., $f(x^*) = x^*$.

Vidíme, že x^* je konstantním rešením rovnice (1.1), protože pokud $x(0) = x^*$ je počáteční bod, potom $x(1) = f(x^*) = x^*$ a $x(2) = f(x(1)) = f(x^*) = x^*$, a tak dále.

Graficky je rovnovážný bod x vyjádřen souřadnicemi bodu, ve kterém křivka f protíná přímku $y = x$ (Obr. 1.1). Například následující rovnice má tři rovnovážné body:

$$x(n+1) = (x(n))^3.$$

Zde je $f(x) = x^3$. Abychom našli tyto rovnovážné body, řešíme vztah $f(x^*) = x^*$ tj., $x^3 = x$. Tři rovnovážné body jsou $-1, 0, 1$ (Obr. 1.1).



Obr. 1.1: Rovnovážné body funkce $f(x) = x^3$.

Nyní upozorněme na jev, který pro diferenciální rovnice nastat nemůže, ale může nastat v případě diferenčních rovnic. Jde o řešení, které nemusí být rovnovážným bodem, ale může do rovnovážného stavu přejít po několika iteracích. Jinými slovy, nerovnovážný stav může přejít nakonec v rovnovážný stav. To nás vede k následující definici.

Definice 1.6. Nechť je dáno x z definičního oboru f. Pokud existuje celé číslo r a rovnovážný bod x^* rovnice (1.1) tak, že

$$f^r(x) = x^*, \ f^{r-1}(x) \neq x^*,$$

pak x nazýváme **potenciálně rovnovážným bodem**.

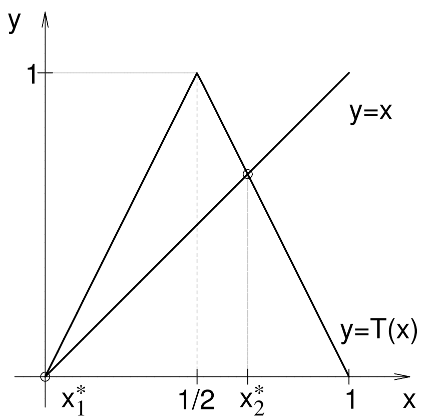
Příklad 1.7. **(Stanové zobrazení).** Uvažujme rovnici

$$x(n+1) = T(x(n))$$

kde

$$T(x) = \begin{cases} 2\,x & \text{for } \ 0 \leq x \leq \frac{1}{2} \\ 2(1-x) & \text{for } \ \frac{1}{2} < x \leq 1\,. \end{cases}$$

Rovnovážné body jsou 0, a 2/3. Hledání rovnovážného bodu algebraicky není jednoduché. Pokud $x(0) = \frac{1}{4}$, potom $x(1) = \frac{1}{2}$, $x(2) = 1$, a $x(3) = 0$. Tedy $\frac{1}{4}$ je potenciálně rovnovážným bodem. Můžeme si ukázat, že pokud $x = k/2^n$, kde k a n jsou kladná celá čísla, $0 < k/2^n \leq 1$, pak x je potenciálně rovnovážným bodem.



Obr. 1.2: Pevný bod stanového zobrazení (Př. 1.7)

Jedním z hlavních cílů teorie diskrétních rovnic je studium vlastností řešení v blízkosti rovnovážných bodů. Toto studium tvoří takzvanou teorii stability.

Definice 1.8. (a) Rovnovážný bod x^* rovnice (1.1) je **stabilním** (Obr. 1.3) pokud pro libovolné $\varepsilon > 0$, existuje $\delta > 0$ tak, že nerovnost $|x_0 - x^*| < \delta$ implikuje $|f^n(x_0) - x^*| < \varepsilon$ pro všechna $n > 0$. Pokud bod x^* není stabilní, pak je nazýván **nestabilním** (Obr. 1.4)

(b) Bod x^* se nazývá **odpuzujícím** rovnovážným bodem, pokud existuje $\varepsilon > 0$ tak, že nerovnost

$$0 < |x_0 - x^*| < \varepsilon \text{ implikuje } |f(x_0) - x^*| > |x_0 - x^*|$$

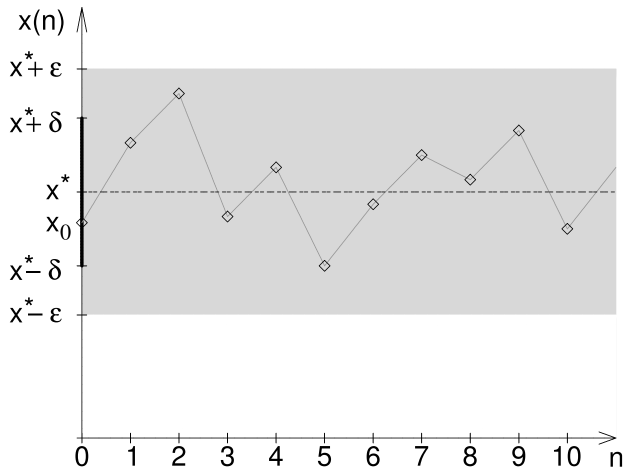
nebo

$$0 < |x_0 - x^*| < \varepsilon \text{ implikuje } |x(1) - x^*| > |x(0) - x^*| \text{ (Obr.1.5)}$$

(c) Bod x^* je **asymptoticky stabilním** rovnovážným bodem, pokud je stabilní a existuje $\eta > 0$ tak, že

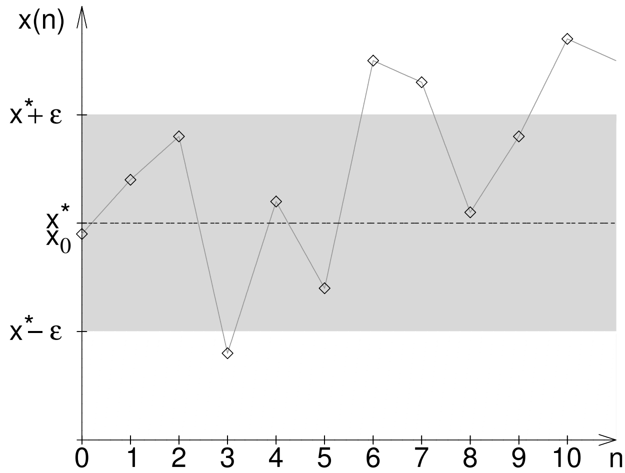
$$0 < |x_0 - x^*| < \eta \text{ implikuje } \lim_{n\to\infty} x(n) = x^* \text{ (Obr.1.6)}$$

Pokud $\eta = \infty$, pak je bod x^* **globálně asymptoticky stabilním** (Obr. 1.7).

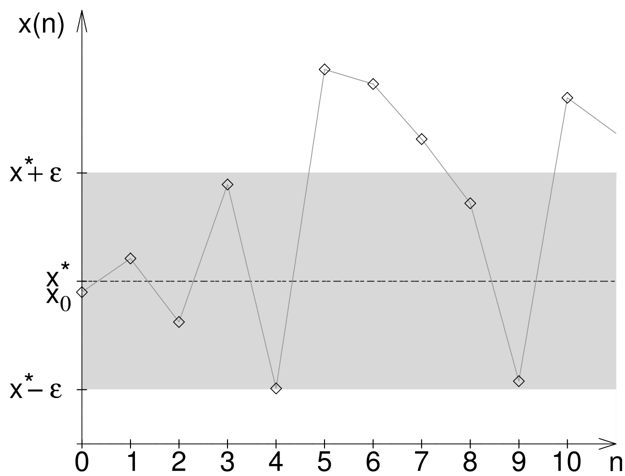


Obr. 1.3: Stabilní bod x^*. Pokud je $x(0)$ je v δ-okolí x^*, potom je $x(n)$ v ε-okolí x^* pro libovolné $n > 0$.

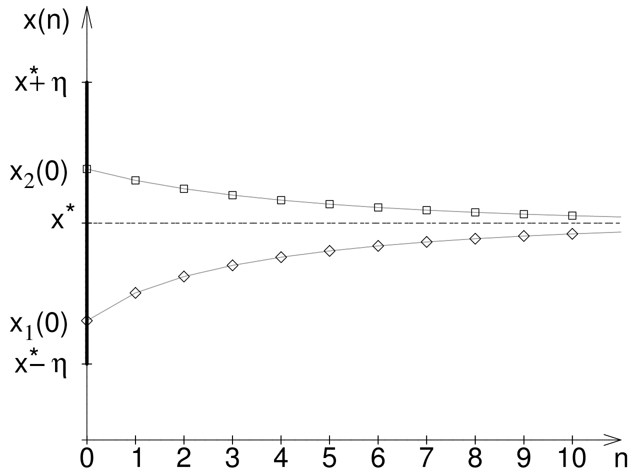
Určení stability rovnovážného bodu podle výše uvedené definice se v mnoha případech může ukázat jako nesplnitelný úkol. To je způsobeno tím, že nemusíme být schopni najít řešení v uzavřeném tvaru. V následující části ukážeme na příkladu chování řešení rovnice (1.1) v blízkosti rovnovážných bodů.



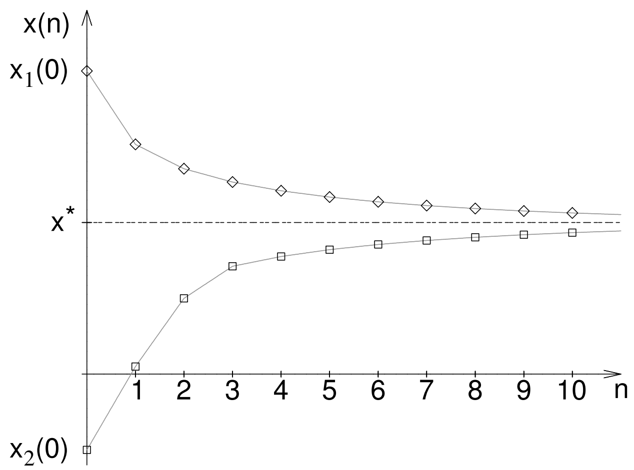
Obr. 1.4: Nestabilní bod x^*. Existuje-li $\varepsilon > 0$ takové, že bez ohledu na to jak blízko je $x(0)$ k x^*, bude existovat N takové, že $x(N)$, že vzdáleno alespoň o ε od x^*.



Obr. 1.5: Odpuzující bod x^*. Existuje-li $\varepsilon > 0$ takové, že pokud je $x(n)$ v ε-okolí x^*, potom je $x(n+1)$ více vzdáleno of x^* než $x(n)$.



Obr. 1.6: Asymptoticky stabilní bod x^*. Je stabilní a pokud $x(0)$ je v η-okolí x^*, potom $\lim_{n\to\infty} x(n) = x^*$.



Obr. 1.7: Globálně asymptoticky stabilní bod x^*. Je stabilní a $\lim_{n\to\infty} x(n) = x^*$ pro všechna $x(0)$.

1.3.1 Ekonomická aplikace

Příklad 1.9. **Pavučinový jev.** Studujme oceňování některých komodit. Nechť $S(n)$ je počtem jednotek dodaných v období n, $D(n)$ je počet jednotek požadovaných v období n, a $p(n)$ je cena jednotky v období n.

Pro zjednodušení, můžeme předpokládat, že $D(n)$ závisí pouze lineárně na $p(n)$ a

$$D(n) = -m_d\, p(n) + b_d, \quad m_d > 0, b_d > 0. \tag{1.15}$$

Tato rovnice je tzv. rovnicí poptávky. Konstanta m_d reprezentuje citlivost spotřebitele na cenu. Můžeme předpokládat, že dodávka komodity souvisí s poptávkou, např.,

$$S(n+1) = m_s p(n) + b_s, \quad m_s > 0, b_s > 0 \tag{1.16}$$

Konstanta m_s je citlivost dodavatele na zájem kupujících.

Tržní cena komodity je taková cena, při které nastává rovnost množství požadované komodity a množství prodané komodity. To nastává když $D(n+1) = S(n+1)$. Tedy

$$-m_d\, p(n+1) + b_d = m_s p(n) + b_s$$

nebo

$$p(n+1) = Ap(n) + B = f(p(n)), \tag{1.17}$$

kde

$$A = -\frac{m_s}{m_d}, \quad B = \frac{b_d - b_s}{m_d}\ . \tag{1.18}$$

Tato rovnice je lineární diferenční rovnicí prvního řádu. Rovnovážná cena p^* je definována ekonomicky jako cena, která vyústí v průnik nabídkové $S(n+1)$ a poptávkové $D(n)$ křivky. Analyzujme tři případy:

a) $-1 < A < 0$

b) $A = -1$

c) $A < -1$.

Tyto tři případy jsou zobrazeny graficky takzvaným pavučinovým diagramem.

(i) V případě a), ceny kolísají nahoru a dolů, ale konvergují k rovnovážné ceně p^*. V ekonomickém žargonu, cena p^* je považována za "stabilní"; v matematice hovoříme o "asymptotické stabilitě" (Obr. 1.8).

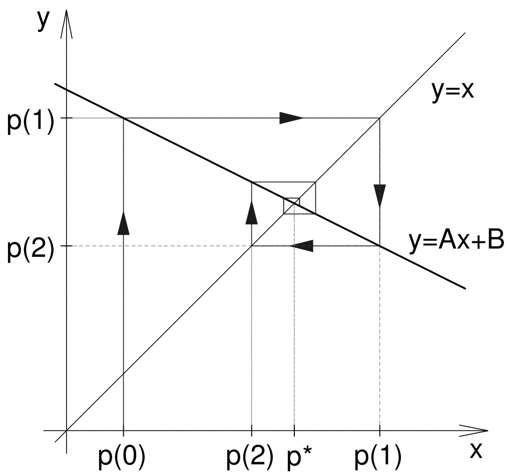
(ii) V případě b), cena osciluje pouze mezi dvěma hodnotami. Pokud $p(0) = p_0$, potom $p(1) = -p_0 + B$ a $p(2) = p_0$. Proto rovnovážný bod p^* je stabilní (Obr. 1.9).

(iii) V případě c), se ceny nepohybují kolem rovnovážného bodu p^* , ale postupně se přesouvají dál od ní. Tudíž je rovnovážný bod považován za nestabilní (Obr. 1.10).

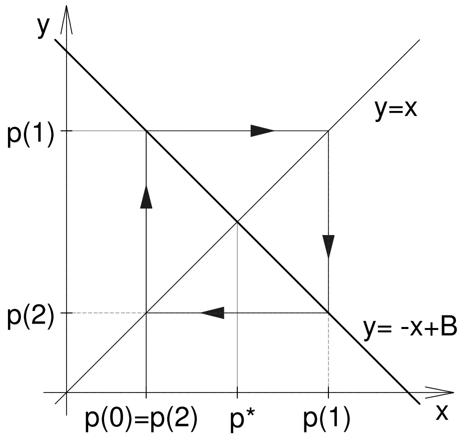
Jednoznačné řešení rovnice (1.17) s $p(0) = p_0$ je dáno vztahem

$$p(n) = \left(p_0 - \frac{B}{1-A}\right) A^n + \frac{B}{1-A}\ . \tag{1.19}$$

Toto jednoznačné řešení nám umožní ilustrovat případy a) - c) následovně.



Obr. 1.8: Asymptoticky stabilní rovnovážná cena ($-1 < A < 0$).

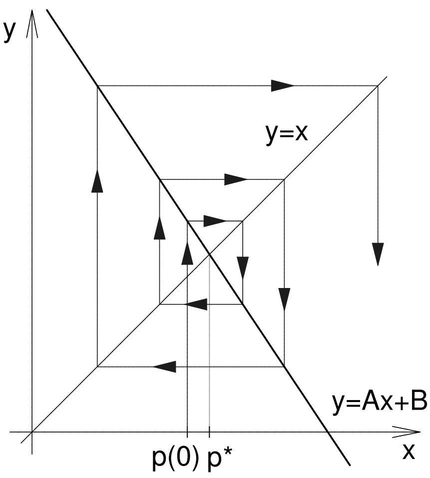


Obr. 1.9: Stabilní rovnovážná cena ($A = -1$).

1.3.2 Pavučinový diagram

V případě, že dodavatelé jsou méně citliví na cenu než spotřebitelé (např. $m_s < m_d$), trh bude stabilní. Pokud dodavatelé budou více citliví než spotřebitelé, potom bude trh nestabilní.

Můžeme také najít řešení (1.19) pomocí matematického software. Pomocí Maple, můžeme najít řešení diferenční rovnice s využitím příkazu



Obr. 1.10: Nestabilní rovnovážná cena ($A < -1$).

rsolve({ rovnice , počáteční stav }, funkce).
V našem případě

$$\text{rsolve}(\{p(n+1) = a * p(n) + b, p(0) = p[0]\}, p(n));$$

dává výsledek

$$p_0 a^n + \frac{ba^n}{-1+a} - \frac{b}{-1+a},$$

který můžeme snadno převést na (1.19).

1.4 Kritéria asymptotické stability rovnovážných bodů

V této části uvedeme jednoduché, ale silné kritérium asymptotické stability rovnovážných bodů.

Věta 1.10. *Nechť x^* je rovnovážným bodem pro diferenční rovnici*

$$x(n+1) = f(x(n)), \tag{1.20}$$

kde funkce f je spojitě diferencovatelná v okolí bodu x^*. Potom:

(i) je-li $|f'(x^*)| < 1$, pak x^* je asymptoticky stabilní rovnovážný bod.

(ii) je-li $|f'(x^*)| > 1$, pak x^* je nestabilní rovnovážný bod.

Důkaz. Dokážeme jen část (i).
Předpokládejme že $|f'(x^*)| < M < 1$. Pak existuje interval $J = (x^* - \gamma, x^* + \gamma)$ obsahující x^* takový, že $|f'(x)| \leq M < 1$ pro všechna $x \in J$. Pro $x(0) \in J$, máme

$$|x(1) - x^*| = |f(x(0)) - f(x^*)|.$$

Podle věty o střední hodnotě existuje ξ mezi body $x(0)$ a x^* takové, že

$$|f(x(0)) - f(x^*)| = |f'(\xi)||x(0) - x^*|.$$

Tudíž

$$|f(x(0)) - x^*| \leq M|x(0) - x^*|.$$

Odtud

$$|x(1) - x^*| \leq M|x(0) - x^*|. \tag{1.21}$$

Jestliže $M < 1$, z nerovnosti (1.21) vyplývá, že $x(1)$ je blíže k x^* nežli $x(0)$. V důsledku toho, $x(1) \in J$.
Odtud usuzujeme, že

$$|x(n) - x^*| \leq M^n|x(0) - x^*|.$$

Pro $\varepsilon > 0$ položme $\delta = \varepsilon$. Tudíž $|x(0) - x^*| < \delta$ implikuje, že

$$|x(n) - x^*| \leq M^n|x(0) - x^*| < |x(0) - x^*| < \delta = \varepsilon \quad \text{for all } n \leq 0.$$

Tento závěr dokazuje stabilitu. Dále pak $\lim_{n\to\infty} |x(n) - x^*| = 0$, a tudíž, $\lim_{n\to\infty} x(n) = x^*$; odtud plyne asymptotická stabilita.

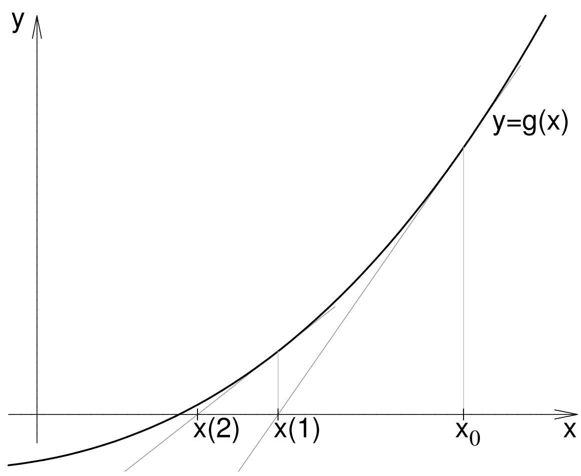
Příklad 1.11. Newtonova metoda
Newtonova metoda je jedním z nejznámějších numerických metod pro nalezení kořenů rovnice $g(x) = 0$. (Obr. 1.11)
Newtonovův algoritmus pro nalezení nulového bodu x^* funkce $g(x)$ je dán vztahem

$$x(n+1) = x(n) - \frac{g(x(n))}{g'(x(n))}\ , \tag{1.22}$$

kde $x(0) = x_0$ je prvním odhad kořene x^*. Zde $f(x) = x - \frac{g(x)}{g'(x)}$.
Bod x^* je také rovnovážným bodem rovnice (1.22). Chcete-li zjistit, zda Newtonův algoritmus poskytuje posloupnost $\{x(n)\}$ jenž konverguje k x^* použijeme Větu 1.10:

$$|f'(x^*)| = \left|1 - \frac{(g'(x^*))^2 - g(x^*)g''(x^*)}{(g'(x^*))^2}\right| = \left|\frac{g(x^*)g''(x^*)}{(g'(x^*))^2}\right| = 0,$$

protože $g(x^*) = 0$. Podle Věty1.10, $\lim_{n\to\infty} x(n) = x^*$ jestliže $x(0) = x_0$ je dostatečně blízko k x^* a $g'(x^*) \neq 0$.



Obr. 1.11: Newtonova metoda.

Všimněte si, že Věta 1.10 neřeší případ kdy $|f'(x^*)| = 1$. Zde je zapotřebí další analýza k určení stability rovnovážného bodu x^*.

Nejdříve se budeme zabývat případem kdy $f'(x^*) = 1$.

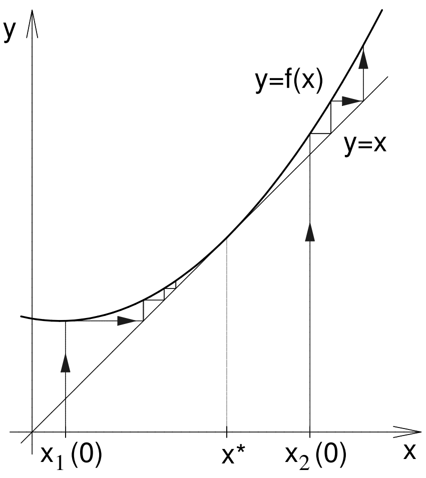
Věta 1.12. *Předpokládejme, že pro rovnovážný bod x^* z rovnice (1.20) platí $f'(x^*) = 1$. Potom:*

(i) Je-li $f''(x^*) \neq 0$, pak x^* je nestabilní.

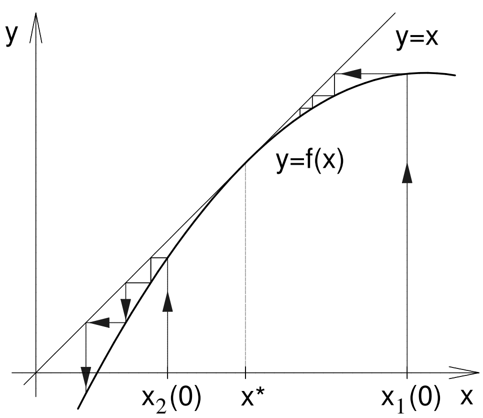
(ii) Je-li $f''(x^*) = 0$ a $f'''(x^*) > 0$, pak x^* je nestabilní.

(iii) If $f''(x^*) = 0$ a $f'''(x^*) < 0$, pak x^* je asymptoticky stabilní.

Důkaz. Dokážeme pouze část (i).
Pokud $f''(x^*) \neq 0$, pak $f''(x^*) > 0$ nebo $f''(x^*) < 0$, jak je uvedeno na obr. 1.12, 1.13. Pokud $f''(x^*) > 0$, pak $f'(x) > 1$ pro všechna x v malém intervalu $I = (x^*, x^* + \varepsilon)$. Použitím stejné metody důkazu jako ve Větě 1.10, je jednoduché ukázat, že x^* je nestabilní.



Obr. 1.12: Případ $f''(x^*) > 0$



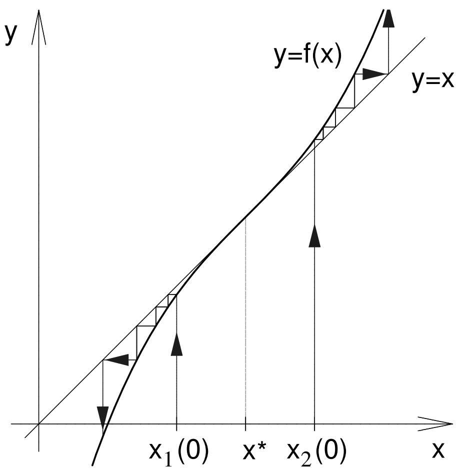
Obr. 1.13: Případ $f''(x^*) < 0$

Na druhou stranu, pokud $f''(x^*) < 0$, potom $f'(x) > 1$ pro všechna x v malém intervalu $I = (x^* - \varepsilon, x^*)$. Tedy x^* je opět nestabilní.

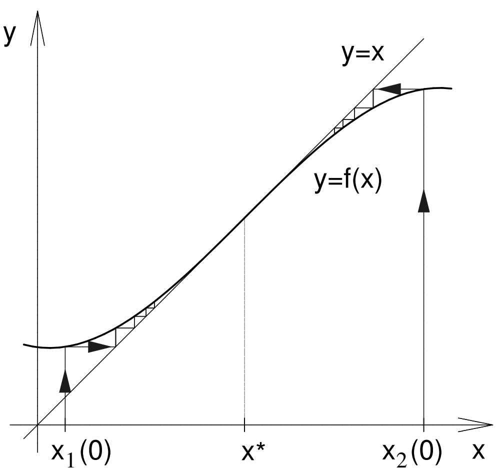
Nyní se podíváme na případ, kdy $f'(x^*) = -1$.

Věta 1.13. *Předpokládejme, že pro rovnovážný bod x^* rovnice (1.20) platí $f'(x^*) = -1$. Potom:*

(i) Je-li $-2f'''(x^*) - 3\,(f''(x^*))^2 < 0$, pak x^* je asymptoticky stabilní.



Obr. 1.14: Případ $f'(x^*) = 1$, $f''(x^*) = 0$ a $f'''(x^*) > 0$

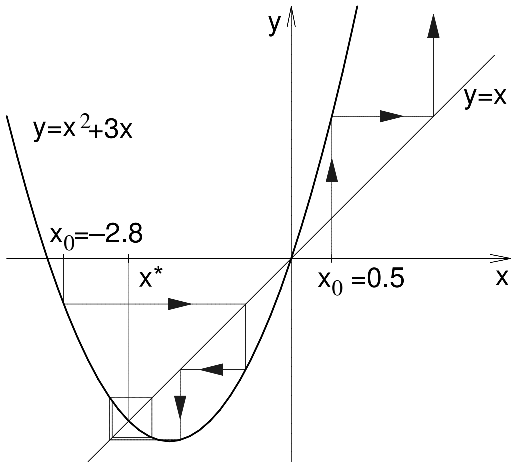


Obr. 1.15: Případ $f'(x^*) = 1$, $f''(x^*) = 0$ a $f'''(x^*) < 0$

(ii) Je-li $-2f'''(x^*) - 3\,(f''(x^*))^2 > 0$, *pak* x^* *je nestabilní.*

Příklad 1.14. Uvažujme diferenční rovnici $x(n+1) = x^2(n)+3x(n)$. Najděte rovnovážné body a určete jejich stabilitu.

Řešení. Máme $f(x) = x^2 + 3x$. Rovnovážné body jsou 0 a -2. Platí $f'(x) = 2x + 3$. Poněvadž $f'(0) = 3$, z Věty 1.10 vyplývá, že 0 je nestabilní. Je-li $f'(-2) = -1$, pak $-2f'''(-2) - 3\,(f''(-2))^2 = -12 < 0$. Tedy, podle Věty 1.13, rovnovážný bod -2 je asymptoticky stabilní. Na obrázku 1.16 je znázorněn pavučinový diagram.



Obr. 1.16: Pavučinový diagram pro $x(n+1) = x^2(n) + 3x(n)$.

1.5 Periodické body a cykly

Druhým nejvýznamnějším pojmem je pojem periodicity. Například pohyb kyvadla je periodický. V příkladu 1.9, platilo, že pokud citlivost m_s dodavatelů na cenu je shodná s citlivostí spotřebitelů na cenu, pak se ceny pohybují pouze mezi dvěma hodnotami.

Definice 1.15. Nechť b leží v definičním oboru funkce f. Potom

(i) b nazýváme **periodickým bodem** funkce f nebo rovnice (1.20), jestliže pro nějaké kladné číslo k, platí $f^k(b) = b$. Tedy bod je k periodický, je-li pevným bodem funkce f^k, tedy pokud je rovnovážným bodem diferenční rovnice

$$x(n+1) = g(x(n)), \tag{1.23}$$

kde $g = f^k$.
Periodická orbita bodu b, $O^+(b) = \{b, f(b), f^2(b), \ldots, f^{k-1}(b)\}$, je často nazývána k-**cyklem**.

(ii) bod b se nazývá **potenciálně** k-**periodickým** pokud pro nějaké kladné celé číslo m, je bod $f^m(b)$ k-periodickým bodem. Jinými slovy b je potenciálně k-periodickým bodem pokud

$$f^{m+k}(b) = f^m(b).$$

Graficky, k periodický bod je x-ová souřadnice bodu, ve kterém graf funkce f^k protíná přímku $y = x$.

Příklad 1.16. Uvažujme opět stanovou funkci

$$T(x) = \begin{cases} 2x & \text{pro } 0 \leq x \leq \frac{1}{2}\,, \\ 2(1-x) & \text{pro } \frac{1}{2} < x \leq 1\,. \end{cases}$$

Můžeme ji zapsat ve tvaru

$$T(x) = 1 - 2\left|x - \frac{1}{2}\right|.$$

Nejprve zkoumejme, zdali periodické body o periodě 2 jsou pevnými body T^2. Je jednoduché ověřit, že T^2 je dáno vztahem

$$T^2(x) = \begin{cases} 4x & \text{pro } 0 \leq x < \frac{1}{4}\,, \\ 2(1-2x) & \text{pro } \frac{1}{4} \leq x < \frac{1}{2}\,, \\ 4(x-\frac{1}{2}) & \text{pro } \frac{1}{2} \leq x < \frac{3}{4}\,, \\ 4(1-x) & \text{pro } \frac{3}{4} \leq x \leq 1\,. \end{cases}$$

Existují čtyři rovnovážné body (obr. 1.17): $0, 0.4, 2/3$, a 0.8, z nichž dva, 0 a $2/3$, jsou rovnovážné body zobrazení T. Tedy $\{0.4, 0.8\}$ jsou pouze 2-periodickými body T. Na obr. 1.18 vidíme, že bod $x^* = 0.8$ není stabilní pro T^2.
Obr. 1.19 znázorňuje graf T^3. Je jednoduché ověřit, že $\{\frac{2}{7}, \frac{4}{7}, \frac{6}{7}\}$ je 3-periodické (obr. 1.20). Nyní

$$T\left(\frac{2}{7}\right) = \frac{4}{7}\,, \quad T\left(\frac{4}{7}\right) = \frac{6}{7}\,, \quad T\left(\frac{6}{7}\right) = \frac{2}{7}\,.$$

Pomocí počítače nebo přenosného kalkulátoru můžeme ukázat (použitím pavučinového diagramu), že stanové zobrazení T má periodické body všech period. Tento jev sdílí všechny rovnice, které jsou mají body o periodě 3 (Objev byl učiněn Li a Yorke [40] v jejich slavném článku “Period Three Implies Chaos”.)

Nyní obraťme pozornost k prozkoumání stability periodických bodů.

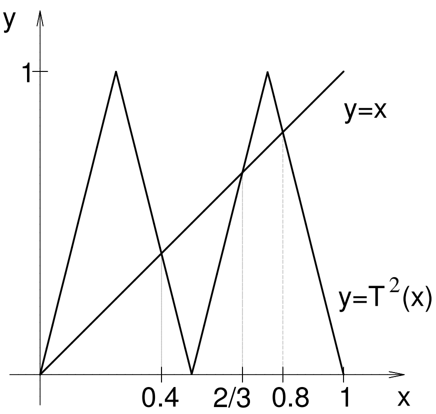
Definice 1.17. Nechť b je k-periodickým bodem funkce f. Pak je b

(i) **stabilní**, pokud je stabilním pevný bodem funkce f^k,

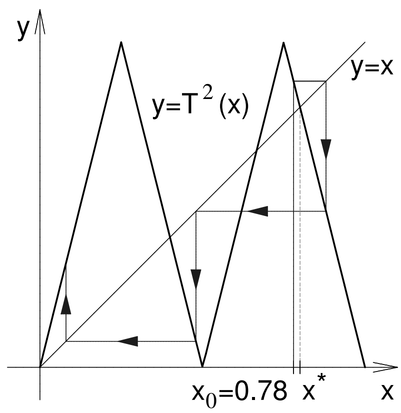
(ii) **asymptoticky stabilním**, pokud je asymptoticky stabilním pevným bodem funkce f^k.

Všimněme si, že pokud má b vlastnost stability, pak má tuto vlastnost v každém k-cyklu $\{x(0) = b, x(1) = f(b), x(2) = f^2(b), \ldots, x(k-1) = f^{k-1}(b)\}$. Proto se často hovoří o stabilitě k-cyklu nebo také o periodické oblasti. Obr. 1.18 ukazuje, že 2-periodický bod stanového zobrazení není stabilní, protože $x^* = 0.8$ je nestabilním pevným bodem zobrazení T^2.

Vzhledem k tomu, že k-periodický bod b rovnice (1.20) umožňuje převést studium jeho stability na stabilitu rovnovážného bodu rovnice (1.23), lze užít všech vět v předcházející části aplikovaných na f^k. Například Věta 1.10 může být upravena následovně.



Obr. 1.17: Rovnovážné body T^2.

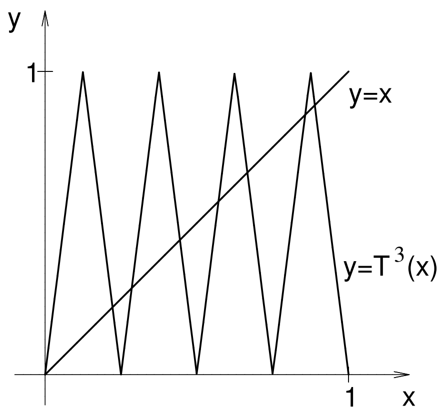


Obr. 1.18: Bod $x^* = 0.8$ není stabilním bodem pro T^2.

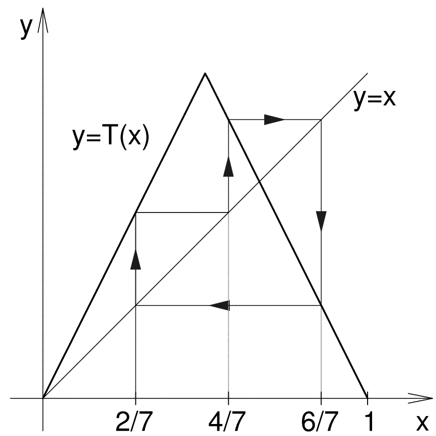
Věta 1.18. *Nechť* $O^+(b) = \{b = x(0), x(1), \ldots, x(k-1)\}$ *je* k*-cykl a* f *je spojitá diferencovatelná funkce. Pak platí.*

(i) k*-cykl* $O^+(b)$ *je asymptoticky stabilní, pokud*

$$|f'(x(0))f'(x(1)) \cdots f'(x(k-1))| < 1.$$



Obr. 1.19: Rovnovážné body T^3.



Obr. 1.20: 3-periodické body T.

(ii) k-cykl $O^+(b)$ je nestabilní, pokud

$$|f'(x(0))f'(x(1)) \cdots f'(x(k-1))| > 1.$$

Důkaz. Aplikujeme větu 1.10 na rovnici (1.23). Použitím řetězového pravidla můžeme ukázat

$$\left(f^k(x(r))\right)' = f'(x(0))f'(x(1)) \cdots f'(x(k-1)).$$

Odtud snadno plyne tvrzení věty.

2 Lineární diferenční rovnice vyšších řádů

V této kapitole budeme zkoumat lineární diferenční rovnice vyšších řádů, jmenovitě ty, které obsahují jednu závislou proměnnou. Tyto rovnice se objevují téměř ve všech oblastech vědeckého bádání, počínaje populační dynamikou, ekonomikou a konče fyzikou. Začneme tím, že zavedeme základy diferenčního počtu, které jsou nezbytné při studiu lineárních rovnic.

2.1 Diferenční počet

Diferenční počet je diskrétní analogie známého diferenciálního a integrálního počtu. Uvedeme některé základní vlastnosti dvou operátorů, které jsou nezbytné při studiu diferenčních rovnic. Jsou to **diferenční operátor**

$$\Delta x(n) = x(n+1) - x(n),$$

a **operátor posunu**

$$Ex(n) = x(n+1).$$

Snadno vidíme, že

$$E^k x(n) = x(n+k).$$

Nechť I je operátorem identity, tj, $Ix = x$. Pak můžeme psát $\Delta = E - I$ a $E = \Delta + I$. Proto

$$\begin{aligned} \Delta^k x(n) &= (E-I)^k x(n) \\ &= \sum_{i=0}^{k} (-1)^i \binom{k}{i} E^{k-i} x(n) \\ &= \sum_{i=0}^{k} (-1)^i \binom{k}{i} x(n+k-i). \end{aligned} \tag{2.1}$$

Stejně tak můžeme ukázat, že

$$E^k x(n) = \sum_{i=0}^{k} \tbinom{k}{i} \Delta^{k-i} x(n). \tag{2.2}$$

Měli bychom zdůraznit, že operátor Δ je protějškem operátoru derivace D v diferenciálním počtu. Oba operátory E a Δ jsou lineárními operátory.
Linearita těchto operátorů znamená, že $\Delta\left(ax(n)+by(n)\right) = a\Delta x(n) + b\Delta y(n)$ a $E\left(ax(n)+by(n)\right) = aEx(n)+bEy(n)$, pro všechna a a $b \in \mathbb{R}$.

Diskrétní obdobou základních vzorců diferenciálního kalkulu

$$\int_a^b df(x) = f(b) - f(a)$$

a

$$d\left(\int_a^x f(t)dt\right) = f(x)$$

jsou vztahy uvedené v následující větě.

Věta 2.1.

$$(i) \qquad \sum_{k=n_0}^{n-1} \Delta x(k) = x(n) - x(n_0), \tag{2.3}$$

$$(ii) \qquad \Delta\left(\sum_{k=n_0}^{n-1} x(k)\right) = x(n). \tag{2.4}$$

Nechť

$$p(n) = a_0\, n^k + a_1 n^{k-1} + \cdots + a_k$$

je polynom stupně k. Potom

$$\begin{aligned} \Delta p(n) &= \left(a_0\,(n+1)^k + a_1(n+1)^{k-1} + \cdots + a_k\right) \\ &\quad - \left(a_0\, n^k + a_1 n^{k-1} + \cdots + a_k\right) \\ &= a_0\, k\, n^{k-1} + \ldots. \end{aligned}$$

Stejně tak můžeme ukázat, že

$$\Delta^2 p(n) = a_0\, k(k-1)n^{k-2} + \ldots.$$

Provedeme-li tento proces k-krát, dostaneme

$$\Delta^k p(n) = a_0\, k! \tag{2.5}$$

Tedy,

$$\Delta^{k+i} p(n) = 0 \text{ for } i \geq 1. \tag{2.6}$$

Nechť

$$p(E) = a_0\, E^k + a_1 E^{k-1} + \cdots + a_k I \tag{2.7}$$

je polynomem stupně k pro operátor E.
Potom

$$\begin{aligned} p(E)\, b^n &= a_0\, b^{n+k} + a_1 b^{n+k-1} + \cdots + a_k\, b^n \\ &= \left(a_0\, b^k + a_1 b^{k-1} + \cdots + a_k\right)\, b^n \\ &= p(b)\, b^n. \end{aligned} \tag{2.8}$$

Zobecnění vzorce (2.8) je uvedeno v následující větě.

Věta 2.2. *Nechť $p(E)$ je polynomem (2.7) a nechť $g(n)$ je diskrétní funkcí. Potom*

$$p(E)\,(b^n g(n)) = b^n p(bE) g(n). \tag{2.9}$$

2.1.1 Faktoriálový polynom

Faktoriálový polynom $x^{(k)}$ je definován takto. Nechť $x \in \mathbb{R}$. Potom

$$\begin{aligned} x^{(k)} &= x(x-1)\cdots(x-k+1), \quad k \in \mathbb{Z}^+, \\ x^{(0)} &= 1. \end{aligned}$$

Jestliže $x = n \in \mathbb{Z}^+$ a $n \geq k$, pak

$$n^{(k)} = \frac{n!}{(n-k)!}$$

a

$$n^{(n)} = n!$$

Funkce $x^{(k)}$ hraje stejnou roli, jakou hraje polynom x^k v diferenciálním počtu. Následující Věta 2.3 tuto skutečnost demonstruje.

Definice operátorů Δ a E můžeme rozšířit i na spojité funkce $f(t)$, $t \in \mathbb{R}$ tak, že definujeme

$$\Delta f(t) = f(t+1) - f(t) \quad \text{a} \quad Ef(t) = f(t+1).$$

Toto rozšíření nám umožňuje najít $\Delta f(x)$ a $Ef(x)$, kde $f(x) = x^{(k)}$, podle vztahů

$$\Delta x^{(k)} = (x+1)^{(k)} - x^{(k)} \quad \text{a} \quad Ex^{(k)} = (x+1)^{(k)}.$$

Pak můžeme dokázat následující výsledek.

Věta 2.3. *Pro $k \in \mathbb{Z}^+$ a $x \in \mathbb{R}$ platí:*

$$(i) \qquad \Delta x^{(k)} = k\, x^{(k-1)} \tag{2.10}$$

$$(ii) \qquad \Delta^n x^{(k)} = k(k-1)\cdots(k-n+1)\, x^{(k-n)} \tag{2.11}$$

$$(ii) \qquad \Delta^k x^{(k)} = k! \tag{2.12}$$

Důkaz. (i)

$$\begin{aligned}
\Delta x^{(k)} &= (x+1)^{(k)} - x^{(k)} \\
&= (x+1)x(x-1)\cdots(x-k+2) \\
&\quad -x(x-1)\cdots(x-k+2)(x-k+1) \\
&= x(x-1)\cdots(x-k+2)\cdot k \\
&= k\,x^{(k-1)}.
\end{aligned}$$

Důkazy částí (ii) a (iii) jsou ponechány čtenáři.

Jestliže $k \in \mathbb{Z}^+$, pak definujeme

$$x^{(-k)} = \frac{1}{(x+1)(x+2)\cdots(x+k)}\ , \tag{2.13}$$

Takto můžeme rozšířit platnost Věty 2.3 pro všechna $k \in \mathbb{Z}$.

2.1.2 Diference součinu a podílu

Pravidla pro derivování součinu a podílu v diferenciálním počtu mají diskrétní protějšky. Diference součinu:

$$\Delta\,(x(n)y(n)) = \Delta x(n)\cdot y(n) + Ex(n)\cdot\Delta y(n). \tag{2.14}$$

Diference podílu:

$$\Delta\left(\frac{x(n)}{y(n)}\right) = \frac{\Delta x(n)\cdot y(n) - x(n)\cdot\Delta y(n)}{y(n)Ey(n)}\ . \tag{2.15}$$

2.1.3 Antidiferenční operátor

Uvedeme diskrétní analogii s neurčitým integrálem. Definujme tzv. antidiferenční operátor Δ^{-1}. Jestliže $\Delta F(n) = 0$, potom $\Delta^{-1}(0) = F(n) = c$ pro libovolnou konstantu c. Kromě toho, jestliže $\Delta F(n) = f(n)$ potom $\Delta^{-1}f(n) = F(n) + c$, pro libovolnou konstantu c. Proto

$$\begin{aligned}
\Delta\Delta^{-1}f(n) &= f(n) \\
\Delta^{-1}\Delta F(n) &= F(n) + c \\
\text{a}\qquad \Delta\Delta^{-1} = I \quad &\text{ale} \quad \Delta^{-1}\Delta \neq I.
\end{aligned}$$

Pomocí vzorce (2.4) můžeme dokázat

$$\Delta^{-1}f(n) = \sum_{i=0}^{n-1} f(i) + c. \tag{2.16}$$

Vzorec (2.16) je velmi užitečný při prokazování toho, že operátor Δ^{-1} je lineární.

Věta 2.4. *Operátor Δ^{-1} je lineární.*

Důkaz. Potřebujeme ukázat, že pro $a, b \in \mathbb{R}$,

$$\Delta^{-1}\left(ax(n) + by(n)\right) = a\Delta^{-1}x(n) + b\Delta^{-1}y(n).$$

Ze vzorce (2.16) dostaneme

$$\begin{aligned}
\Delta^{-1}\left(ax(n) + by(n)\right) &= \sum_{i=1}^{n-1}\left(ax(i) + by(i)\right) + c \\
&= a\sum_{i=1}^{n-1} x(i) + b\sum_{i=1}^{n-1} y(i) + c \\
&= a\Delta^{-1}x(n) + b\Delta^{-1}y(n).
\end{aligned}$$

Dále zapišme antidiference některých základních funkcí.

Věta 2.5. *Platí:*

$$(i) \qquad \Delta^{-k}0 = c_1 n^{k-1} + c_2 n^{k-2} + \cdots + c_k, \tag{2.17}$$

$$(ii) \qquad \Delta^{-k}1 = \frac{n^k}{k!} + c_1 n^{k-1} + c_2 n^{k-2} + \cdots + c_k, \tag{2.18}$$

$$(iii) \qquad \Delta^{-1}n^{(k)} = \frac{n^{(k+1)}}{k+1} + c, \quad k \neq -1. \tag{2.19}$$

Důkaz. Důkazy (i) a (ii) využívají aplikaci Δ^k na pravé strany vzorců (2.17) a (2.18). Pak jsou aplikovány vzorce (2.6) a (2.5). Důkaz části (iii) vyplývá ze vzorce (2.10).

Nakonec uveďme diskrétní analogií vzorce integraci po částech.

$$\sum_{k=0}^{n-1} y(k)\Delta x(k) = x(n)y(n) - x(0)y(0) - \sum_{k=0}^{n-1} x(k+1)\Delta y(k). \tag{2.20}$$

Chceme-li vzorec (2.20) dokázat, použijeme vztah (2.14) k získání

$$y(n)\Delta x(n) = \Delta\left(x(n)y(n)\right) - x(n+1)\Delta y(n).$$

Aplikací Δ^{-1} na obou stranách dostaneme (s pomocí vzorců (2.16))

$$\sum_{k=0}^{n-1} y(k)\Delta x(k) = x(n)y(n) - \sum_{k=0}^{n-1} x(k+1)\Delta y(k) + c.$$

Pro $n = 0$ určíme $c = -x(0)y(0)$.

2.2 Obecná teorie lineárních diferenčních rovnic

Normální tvar nehomogenní lineární diferenční rovnice rovnice k-tého řádu je

$$y(n+k) + p_1(n)y(n+k-1) + \cdots + p_k(n)y(n) = g(n), \tag{2.21}$$

kde $p_i(n)$ a $g(n)$ jsou reálné funkce definované pro $n \geq n_0$ a $p_k(n) \neq 0$ pro všechna $n \geq n_0$. Je-li funkce $g(n)$ identicky nulová, potom rovnice (2.21) je **homogenní** rovnicí. Rovnice (2.21) může být zapsána ve formě

$$\begin{aligned} y(n+k) \quad = \quad & -p_1(n)y(n+k-1) - p_2(n)y(n+k-2) - \cdots \\ & \cdots - p_k(n)y(n) + g(n). \end{aligned} \tag{2.22}$$

Dosadíme $n = 0$ do rovnice (2.22). Získáme

$$y(k) = -p_1(0)y(k-1) - p_2(0)y(k-2) - \cdots - p_k(0)y(0) + g(0).$$

Je-li nalezeno $y(k)$, můžeme přejít k dalšímu kroku a najít $y(k+1)$ tak, že položíme $n = 1$ v rovnici (2.22). Výsledek je

$$y(k+1) = -p_1(1)y(k) - p_2(1)y(k-1) - \cdots - p_k(1)y(1) + g(1).$$

Opakováním výše uvedeného postupu, je možné najít všechny hodnoty $y(n)$ pro $n \geq k$. Podívejme se nyní na ilustraci výše uvedeného postupu na příkladu.

Příklad 2.6. Uvažujme diferenční rovnici třetího řádu

$$y(n+3) - \frac{n}{n+1}\, y(n+2) + ny(n+1) - 3y(n) = n, \tag{2.23}$$

kde $y(1) = 0, y(2) = -1$, a $y(3) = 1$. Najděme hodnoty

$$y(4), y(5), y(6), y(7).$$

Řešení. Přepíšeme vztah (2.23) na tvar

$$y(n+3) = \frac{n}{n+1}\, y(n+2) - ny(n+1) + 3y(n) + n. \tag{2.24}$$

Nechť $n = 1$ ve vztahu (2.24), pak

$$y(4) = \frac{1}{2}\, y(3) - y(2) + 3y(1) + 1 = \frac{5}{2}\,.$$

Pro $n = 2$ je

$$y(5) = \frac{2}{3}\, y(4) - 2y(3) + 3y(2) + 2 = -\frac{4}{3}\,.$$

Pro $n = 3$ dostáváme

$$y(6) = \frac{3}{4}\, y(5) - 3y(4) + 3y(3) + 3 = -\frac{5}{2}\,.$$

Pro $n = 4$ je

$$y(7) = \frac{4}{5}\, y(6) - 4y(5) + 3y(4) + 4 = \frac{89}{6}\,.$$

2.2.1 Postup řešení

Vraťme se k rovnici (2.21) a formálně definujme její řešení. Posloupnost $\{y(n)\}_{n_0}^{\infty}$ nebo jednodušeji $y(n)$ nazveme řešením vztahu (2.21) jestliže tuto rovnici splňuje. Podotkněme, že pokud určíme počáteční podmínky rovnice, vede to k řešení odpovídajícímu daným počátečním podmínkám

$$y(n+k) + p_1(n)y(n+k-1) + \cdots + p_k(n)y(n) = g(n), \tag{2.25}$$
$$y(n_0) = a_0, y(n_0+1) = a_1, \ldots, y(n_0+k-1) = a_{k-1}, \tag{2.26}$$

kde a_i jsou reálná čísla. S ohledem na výše uvedené tvrzení vyplývá následující.

Věta 2.7. *Počáteční podmínky (2.25) a (2.26) určují právě jedno řešení $x(n)$.*

Důkaz. Důkaz vyplývá ze vztahu (2.22) pro

$$n = n_0, n_0+1, n_0+2, \ldots.$$

Všimněme si, že všechna $n \geq n_0 + k$ mohou být zapsána jako $n = n_0 + k + (n - n_0 - k)$. Jednoznačností řešení $y(n)$ máme na mysli, že jestli existuje jiné řešení $\tilde{y}(n)$ splňující počáteční podmínky (2.25) a (2.26), potom $\tilde{y}(n)$ musí být totožné s $y(n)$. To je vidět ze vztahu (2.22).

2.2.2 Obecná teorie lineárních homogenních diferenčních rovnic k-tého řádu

V této části se budeme věnovat obecné teorii lineárních homogenních diferenčních rovnic k-tého řádu ve tvaru

$$x(n+k) + p_1(n)x(n+k-1) + \cdots + p_k(n)x(n) = 0. \tag{2.27}$$

Výklad začneme uvedením základních definicí.

Definice 2.8. Funkce

$$f_1(n), f_2(n), \ldots, f_r(n)$$

jsou **lineárně závislé pro** $n \geq n_0$ jestliže existují konstanty

$$a_1, a_2, \ldots, a_r$$

z nichž alespoň jedna je nenulová a platí

$$a_1 f_1(n) + a_2 f_2(n) + \cdots + a_r f_r(n) = 0, \quad n \geq n_0. \tag{2.28}$$

Jestliže $a_j \neq 0$, potom můžeme dělením rovnice (2.28) číslem a_j získat

$$f_j(n) = -\frac{a_1}{a_j} f_1(n) - \frac{a_2}{a_j} f_2(n) - \cdots - \frac{a_r}{a_j} f_r(n)$$

$$= \ -\sum_{i\neq j, i=1}^{r} \frac{a_i}{a_j} f_i(n). \tag{2.29}$$

Vztah (2.29) jednoduše říká, že každá funkce s nenulovým koeficientem je lineární kombinaci ostatních funkcí. Tedy dvě funkce $f_1(n)$ a $f_2(n)$ jsou lineárně závislé jestliže jedna z nich je násobkem druhé, tj., $f_1(n) = af_2(n)$, kde a je konstanta.

Opakem lineární závislosti je **lineární nezávislost**. Funkce

$$f_1(n), f_2(n), \ldots, f_r(n)$$

jsou **lineárně nezávislé pro** $n \geq n_0$ jestliže vztah

$$a_1 f_1(n) + a_2 f_2(n) + \cdots + a_r f_r(n) = 0,$$

platí pro všechna $n \geq n_0$ pouze když

$$a_1 = a_2 = \cdots = a_r = 0.$$

Příklad 2.9. Dokažte, že funkce $3^n, n3^n$, a $n^2 3^n$ jsou lineárně nezávislé pro $n \geq 1$.

Řešení. Předpokládejme, že pro konstanty a_1, a_2, a a_3 máme

$$a_1 3^n + a_2 n 3^n + a_3 n^2 3^n = 0, \quad \text{for all } n \geq 1.$$

Po dělení 3^n dostaneme

$$a_1 + a_2 n + a_3 n^2 = 0, \quad \text{pro všechna } n \geq 1.$$

To není možné, protože rovnice druhého stupně vzhledem k n má nejvýše dvě řešení $n \geq 1$. Proto $a_1 = a_2 = a_3 = 0$ a funkce jsou lineárně nezávislé.

Definice 2.10. Množina k lineárně nezávislých řešení rovnice (2.27) se nazývá **fundamentální množinou** řešení.

Existuje jednoduchý způsob pro ověřování lineární nezávislosti množiny řešení pomoci tzv. Casoratiánu $C(n)$.

Definice 2.11. Casoratiánem (jde o diskrétní analogii Wronskiánu známého z teorie diferenciálních rovnic) $C(n)$ řešení $x_1(n), x_2(n), \ldots, x_r(n)$ nazýváme determinant

$$C(n) = \det \begin{pmatrix} x_1(n) & x_2(n) & \ldots & x_r(n) \\ x_1(n+1) & x_2(n+1) & \ldots & x_r(n+1) \\ \vdots & & & \vdots \\ x_1(n+r-1) & x_2(n+r-1) & \ldots & x_r(n+r-1) \end{pmatrix} \tag{2.30}$$

Příklad 2.12. Uvažujeme diferenční rovnici

$$x(n+3) - 7x(n+1) + 6x(n) = 0$$

(a) Ověřte, že posloupnosti $1, (-3)^n$, a 2^n jsou řešeními této rovnice.

(b) Najděte Casoratián posloupnosti z části (a)

Řešení.
(a) $x(n) = 1$ je řešením, protože $1 - 7 + 6 = 0$. $x(n) = (-3)^n$ je řešením, protože

$$(-3)^{n+3} - 7(-3)^{n+1} + 6(-3)^n = (-3)^n(-27 + 21 + 6) = 0.$$

Taktéž $x(n) = 2^n$ je řešením, protože

$$2^{n+3} - 7 \cdot 2^{n+1} + 6 \cdot 2^n = 2^n(8 - 14 + 6) = 0.$$

(b)
$$\begin{aligned} C(n) &= \det \begin{pmatrix} 1 & (-3)^n & 2^n \\ 1 & (-3)^{n+1} & 2^{n+1} \\ 1 & (-3)^{n+2} & 2^{n+2} \end{pmatrix} = \\ &= 1 \cdot (-3)^{n+1} \cdot 2^{n+2} + (-3)^n \cdot 2^{n+1} \cdot 1 + 2^n \cdot 1 \cdot (-3)^{n+2} - \\ &\quad -2^n \cdot (-3)^{n+1} \cdot 1 - (-3)^n \cdot 1 \cdot 2^{n+2} - 1 \cdot 2^{n+1} \cdot (-3)^{n+2} = \\ &= 2^n \cdot (-3)^n \cdot (-12 + 2 + 9 + 3 - 4 - 18) = -20 \cdot 2^n \cdot (-3)^n. \end{aligned}$$

Dále uvedeme tzv. Abelův vzorec pomocí kterého se najde Casoratián $C(n)$. Význam Abelova vzorce spočívá v jeho efektivitě při ověřování lineární nezávislosti řešení.

Věta 2.13. ***(Abelův vzorec)*** *Nechť $x_1(n), x_2(n), \ldots, x_k(n)$ jsou řešení rovnice (2.27) a $C(n)$ je jejich Casoratián. Potom pro $n \geq n_0$,*

$$C(n) = (-1)^{k(n-n_0)} \left(\prod_{i=n_0}^{n-1} p_k(i) \right) C(n_0). \tag{2.31}$$

Důkaz. Dokážeme tvrzení pro $k = 3$. Nechť $x_1(n), x_2(n)$, a $x_3(n)$ jsou tři nezávislá řešení rovnice (2.27). Ze vztahu (2.30) dostaneme

$$C(n+1) = \det \begin{pmatrix} x_1(n+1) & x_2(n+1) & x_3(n+1) \\ x_1(n+2) & x_2(n+2) & x_3(n+2) \\ x_1(n+3) & x_2(n+3) & x_3(n+3) \end{pmatrix}. \tag{2.32}$$

Z rovnice (2.27) dostaneme ($1 \leq i \leq 3$)

$$x_i(n+3) = -p_3(n)x_i(n) - (p_1(n)x_i(n+2) + p_2(n)x_i(n+1)). \tag{2.33}$$

Když použijeme vztah (2.33) pro nahrazení $x_1(n+3), x_2(n+3)$, a $x_3(n+3)$ v posledním řádku výrazu (2.32), dostaneme

$$C(n+1) = \det \begin{pmatrix} x_1(n+1) & x_2(n+1) & x_3(n+1) \\ x_1(n+2) & x_2(n+2) & x_3(n+2) \\ \begin{gathered} -p_3(n)x_1(n)- \\ -(p_2(n)x_1(n+1)+ \\ +p_1(n)x_1(n+2)) \end{gathered} & \begin{gathered} -p_3(n)x_2(n)- \\ -(p_2(n)x_2(n+1)+ \\ +p_1(n)x_2(n+2)) \end{gathered} & \begin{gathered} -p_3(n)x_3(n)- \\ -(p_2(n)x_3(n+1)+ \\ +p_1(n)x_3(n+2)) \end{gathered} \end{pmatrix} \tag{2.34}$$

Využitím vlastností determinantů ze vztahu (2.34) dostaneme

$$\begin{aligned} C(n+1) &= \det\begin{pmatrix} x_1(n+1) & x_2(n+1) & x_3(n+1) \\ x_1(n+2) & x_2(n+2) & x_3(n+2) \\ -p_3(n)x_1(n) & -p_3(n)x_2(n) & -p_3(n)x_2(n) \end{pmatrix} \\ &= -p_3(n)\det\begin{pmatrix} x_1(n+1) & x_2(n+1) & x_3(n+1) \\ x_1(n+2) & x_2(n+2) & x_3(n+2) \\ x_1(n) & x_2(n) & x_3(n) \end{pmatrix} \\ &= -p_3(n)(-1)^2\det\begin{pmatrix} x_1(n) & x_2(n) & x_3(n) \\ x_1(n+1) & x_2(n+1) & x_3(n+1) \\ x_1(n+2) & x_2(n+2) & x_3(n+2) \end{pmatrix}. \end{aligned} \tag{2.35}$$

Tedy

$$C(n+1) = (-1)^3 p_3(n) C(n). \tag{2.36}$$

Použitím vztahu (1.5) vidíme, že řešení rovnice (2.36) je

$$C(n) = \left(\prod_{i=n_0}^{n-1} (-1)^3 p_3(i)\right) C(n_0) = (-1)^{3(n-n_0)} \prod_{i=n_0}^{n-1} p_3(i) C(n_0)$$

Tím je důkaz pro $k = 3$ hotov.

Má-li rovnice (2.27) konstantní koeficienty p_k a $n_0 = 0$, potom

$$C(n) = (-1)^{kn} p_k^n C(0). \tag{2.37}$$

Poznámka 2.14. Předpokládejme, že $p_k(n) \neq 0$ pro všechna $n \geq n_0$. Potom Casoratián $C(n) \neq 0$ pro všechna $n \geq n_0$ tehdy a jen tehdy, pokud $C(n_0) \neq 0$.

Důkaz. Tento výsledek vyplývá ze vztahu (2.31).

Klíčovou vlastností výsledku je, že buď je Casoratián roven nule (tj. je nulový pro všechna $n \geq n_0$, pro některé n_0), nebo je pro všechna $n \geq n_0$ nenulový. Vlastnost $C(n) \neq 0$ pro všechna $n \in \mathbb{Z}^+$, vyplývá z vlastnosti $C(0) \neq 0$.

Dále uveďme vzájemný vztah mezi lineární nezávislostí řešení a jejich Casoratiánem. Zjednodušeně řečeno, ukážeme, že množina k řešení je fundamentální množinou (tj. lineárně nezávislá), když jejich Casoratián $C(n)$ je nenulový.

Uvažujeme k řešení $x_1(n), x_2(n), \ldots, x_k(n)$ rovnice (2.27). Předpokládejme, že pro některé konstanty $a_1, a_2, \ldots, a_k$ a $n_0 \in \mathbb{Z}^+$ platí

$$a_1x_1(n) + a_2x_2(n) + \cdots + a_kx_k(n) = 0, \quad \text{for all } n \geq n_0.$$

Pak můžeme odvodit $k-1$ vztahů

$$\begin{aligned} a_1x_1(n+1) + a_2x_2(n+1) + \cdots + a_kx_k(n+1) &= 0, \\ &\vdots \\ a_1x_1(n+k-1) + a_2x_2(n+k-1) + \cdots + a_kx_k(n+k-1) &= 0. \end{aligned}$$

Tyto vztahy lze zapsat ve tvaru

$$X(n)\xi = 0, \tag{2.38}$$

kde

$$X(n) = \begin{pmatrix} x_1(n) & x_2(n) & \dots & x_k(n) \\ x_1(n+1) & x_2(n+1) & \dots & x_k(n+1) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_1(n+k-1) & x_2(n+k-1) & \dots & x_k(n+k-1) \end{pmatrix}, \ \xi = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_k \end{pmatrix},$$

kde $C(n) = \det X(n)$.
Z lineární algebry víme, že vektorová rovnice (2.38) má triviální řešení (nulové řešení) (tj., $a_1 = a_2 = \cdots = a_k = 0$) tehdy a jen tehdy, když je matice $X(n)$ nesingulární (tj. $\det X(n) = C(n) \neq 0$ pro všechna $n \geq n_0$). Toto tvrzení nás vede k následujícímu závěru.

Věta 2.15. *Množina řešení $x_1(n), x_2(n), \dots, x_k(n)$ rovnice (2.27) je fundamentální množinou tehdy a jen tehdy, když pro některé $n_0 \in \mathbb{Z}^+$, je Casoratián $C(n_0) \neq 0$.*

Příklad 2.16. Ověřte, že $\{n, 2^n\}$ je fundamentální množinou řešení rovnice

$$x(n+2) - \frac{3n-2}{n-1}\, x(n+1) + \frac{2n}{n-1}\, x(n) = 0.$$

Řešení. Ověření, že n a 2^n jsou řešení rovnice vynecháme. Casoratián řešení $n, 2^n$ je daný vztahem

$$C(n) = \det \begin{pmatrix} n & 2^n \\ n+1 & 2^{n+1} \end{pmatrix}.$$

Tudíž

$$C(0) = \det \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = -1 \neq 0.$$

Na základě Věty 2.15 dostáváme, že řešení $n, 2^n$ jsou lineárně nezávislé a tak tvoří fundamentální množinu řešení.

Příklad 2.17. Budeme uvažovat diferenční rovnici

$$x(n+3) + 3x(n+2) - 4x(n+1) - 12x(n) = 0.$$

Ověřme, že funkce $2^n, (-2)^n$, a 3^n tvoří fundamentální množinu řešení rovnice.

Řešení. Ověříme, že 2^n je řešením. Substituce $x(n) = 2^n$ v rovnici vede ke vztahu

$$2^{n+3} + 3 \cdot 2^{n+2} - 4 \cdot 2^{n+1} - 12 \cdot 2^n = 2^n(8 + 12 - 8 - 12) = 0.$$

Podobně lze ověřit, že $(-2)^n$ a 3^n jsou také řešení rovnice.
Pro potvrzení lineární nezávislosti těchto řešení je potřebné sestavit Casoratian

$$C(n) = \det \begin{pmatrix} 2^n & (-2)^n & 3^n \\ 2^{n+1} & (-2)^{n+1} & 3^{n+1} \\ 2^{n+2} & (-2)^{n+2} & 3^{n+2} \end{pmatrix}.$$

Tedy

$$C(0) = \det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -2 & 3 \\ 4 & 4 & 9 \end{pmatrix} = -20 \neq 0.$$

Na základě Věty 2.15 tvrdíme, že řešení $2^n, (-2)^n$, a 3^n jsou lineárně nezávislá, a tak tvoří fundamentální množinu řešení.

Můžeme vyslovit základní (fundamentální) větu o tvaru řešení homogenních lineárních diferenčních rovnic.

Věta 2.18. *Jestliže $p_k(n) \neq 0$ pro všechna $n \geq n_0$, potom existuje fundamentální množina řešení rovnice (2.27) pro $n \geq n_0$.*

Důkaz. Víme, že existují řešení $x_1(n), x_2(n), \ldots, x_k(n)$ taková, že $x_i(n_0 + i - 1) = 1, x_i(n_0) = x_i(n_0 + 1) = \cdots = x_i(n_0 + i - 2) = x_i(n_0 + i) = \cdots = x_i(n_0 + k - 1) = 0$, $1 \leq i \leq k$. Proto $x_1(n_0) = 1$, $x_2(n_0 + 1) = 1$, $x_3(n_0 + 2) = 1$, atd. Odtud vyplývá, že

$$C(n_0) = \det I = 1.$$

Na základě Věty 2.15 platí, že množina $\{x_1(n), x_2(n), \ldots, x_k(n)\}$ je fundamentální množinou řešení rovnice (2.27).

Je potřebné poznamenat, že existuje nekonečně mnoho fundamentálních množin řešení rovnice (2.27).

Věta 2.19. *Jestliže jsou $x_1(n)$, a $x_2(n)$ dvě řešení rovnice (2.27), potom platí tvrzení:*

(i) $x(n) = x_1(n) + x_2(n)$ *je řešením rovnice (2.27).*

(ii) $\tilde{x}(n) = ax_1(n)$ *je řešením rovnice (2.27) pro libovolnou konstantu a.*

Z předcházejících tvrzení plyne následující.

Princip superpozice. Jsou-li $x_1(n), x_2(n), \ldots, x_r(n)$ řešením rovnice (2.27), potom

$$x(n) = a_1x_1(n) + a_2x_2(n) + \cdots + a_rx_r(n)$$

je také řešení rovnice (2.27).

Nechť je $\{x_1(n), x_2(n), \ldots, x_k(n)\}$ fundamentální množinou řešení rovnice (2.27) a nechť $x(n)$ je řešením rovnice (2.27). Potom existují konstanty $a_1, a_2, \ldots, a_k$ takové, že platí $x(n) = \sum_{i=1}^{k} a_ix_i(n)$. Píšeme $X(n)\xi = \hat{x}(n)$, kde

$$\hat{x}(n) = \begin{pmatrix} x(n) \\ x(n+1) \\ \vdots \\ x(n+k-1) \end{pmatrix}.$$

Jelikož $X(n)$ je nesingulární matice, platí

$$\xi = X^{-1}(n)\,\hat{x}(n),$$

a pro $n = n_0$

$$\xi = X^{-1}(n_0)\,\hat{x}(n_0).$$

Výše uvedené tvrzení nás vede k definici obecného řešení rovnice (2.27).

Definice 2.20. Nechť $\{x_1(n), x_2(n), \ldots, x_k(n)\}$ je fundamentální množinou řešení rovnice (2.27).
Potom **obecné řešení** rovnice (2.27) je dané vztahem $x(n) = \sum_{i=1}^{k} a_i x_i(n)$, kde a_i jsou libovolné konstanty.

Za zmínku stojí fakt, že libovolné řešení rovnice (2.27) můžeme získat z obecného řešení vhodnou kombinaci konstant a_i.

Předcházející výsledky mohou být formulovány následovně: Nechť S je množinou všech řešení rovnice (2.27) s operacemi $+, \cdot$ definovanými následovně:

(i) $(x + y)(n) = x(n) + y(n)$, for $x, y \in S, n \in \mathbb{Z}^+$,

(ii) $(ax)(n) = ax(n)$, for $x \in S$, a constant.

Věta 2.21. *Prostor $(S, +, \cdot)$ je lineární (vektorový) prostor dimenze k.*

3 Lineární homogenní diferenční rovnice s konstantními koeficienty

Uvažujeme diferenciální rovnici k-tého řádu

$$x(n+k) + p_1 x(n+k-1) + p_2 x(n+k-2) + \cdots + p_k x(n) = 0, \tag{3.1}$$

kde p_i jsou konstanty a $p_k \neq 0$. Našim cílem je nalezení základních množin řešení a následně nalezení obecného řešení rovnice (3.1). Postup je docela snadný. Předpokládejme, že řešení rovnice (3.1) je zapsáno ve tvaru λ^n, kde λ je komplexní číslo. Nahrazením této hodnoty do vztahu (3.1), dostaneme rovnici

$$\lambda^k + p_1 \lambda^{k-1} + \cdots + p_k = 0. \tag{3.2}$$

Tato rovnice je nazývána **charakteristickou rovnicí** rovnice (3.1) a její kořeny λ jsou nazývány **charakteristickými kořeny**. Pro $p_k \neq 0$ nebude žádný z kořenů roven nule.

Uvažme následující dvě situace:

Případ a: Předpokládejme, že **charakteristické kořeny**

$$\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$$

jsou různé. Nyní ukažme, že množina

$$\{\lambda_1^n, \lambda_2^n, \ldots, \lambda_k^n\}$$

je fundamentální množinou řešení.

Pro důkaz využijeme Větu 2.15, která postačuje, aby se ukázalo, že $C(0) \neq 0$, kde $C(n)$ je Casoratiánem řešení. Tedy

$$C(0) = \det \begin{pmatrix} 1 & 1 & \ldots & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \ldots & \lambda_k \\ \lambda_1^2 & \lambda_2^2 & \ldots & \lambda_k^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \lambda_1^{k-1} & \lambda_2^{k-1} & \ldots & \lambda_k^{k-1} \end{pmatrix}. \tag{3.3}$$

Tento determinant je tzv. Vandermondův determinant.
Lze ukázat, že

$$C(0) = \prod_{1 \le i < j \le k} (\lambda_j - \lambda_i).$$

V tomto případě $C(0) \neq 0$. Tato skutečnost dokazuje, že

$$\{\lambda_1^n, \lambda_2^n, \ldots, \lambda_k^n\}$$

je fundamentální množinou řešení rovnice (3.1). Proto obecné řešení rovnice (3.1) je

$$x(n) = \sum_{i=1}^{k} a_i \lambda_i^n, \quad a_i \text{ je komplexní číslo.} \tag{3.4}$$

Případ b: Předpokládejme, že **některé charakteristické kořeny** $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r$ **jsou násobné s násobnostmi** $m_1, m_2, \ldots, m_r$,. V tomto případě, rovnice (3.1) může být zapsána ve tvaru

$$(E - \lambda_1 I)^{m_1} (E - \lambda_2 I)^{m_2} \cdots (E - \lambda_r I)^{m_r} x(n) = 0. \tag{3.5}$$

Snadno lze ukázat, že když $\psi_1(n), \psi_2(n), \ldots, \psi_{m_r}(n)$ jsou řešení rovnice

$$(E - \lambda_i I)^{m_i} x(n) = 0, \;\; 1 \le i \le r, \tag{3.6}$$

pak jsou také řešení rovnice (3.5).

Předpokládejme, že jsme schopní najít fundamentální množinu řešení pro každou rovnici (3.6), $1 \le i \le r$. Lze očekávat, že spojení těchto r množin bude tvořit fundamentální množinu řešením rovnice (3.5).

Věta 3.1. *Množina* $G_i = \{\lambda_i^n, n\lambda_i^n, n^2\lambda_i^n, \ldots, n^{m_i - 1}\lambda_i^n\}$ *je fundamentální množinou řešení rovnice* (3.6).

Důkaz. Nejdříve si ukážeme, že

$$n^s \lambda_i^n, \;\; 1 \le s \le m_i - 1$$

jsou řešení rovnice (3.6). Ze vztahu (2.9) (dosazení $p(E) = (E - \lambda_i I)^{m_i}$, $g(n) = n^s$ a $b = \lambda_i$) vyplývá, že

$$\begin{aligned} (E - \lambda_i I)^{m_i} (n^s \lambda_i^n) &= \lambda_i^n (\lambda_i E - \lambda_i I)^{m_i} n^s \\ &= \lambda_i^{n+m_i} \Delta^{m_i} (n^s) \\ &= 0 \quad (\text{pomocí } (2.6)). \end{aligned}$$

Pro $\lambda_i \neq 0$, je množina funkcí v G_i lineárně nezávislá, když je množina funkcí

$$\{1, n, n^2, \ldots, n^{m_i - 1}\}$$

lineárně nezávislá. Druhá množina je tvořena lineárně nezávislými funkcemi pro $n \ge n_0$ pro každé $n_0 > 0$.

Nyní jsme schopni najít fundamentální množinu řešení.

Poznámka 3.2. Množina

$$G = \bigcup_{i=1}^{r} G_r$$

je fundamentální množinou řešení rovnice (3.5).

Poznámka 3.3. Obecné řešení rovnice (3.5) je dáno vztahem

$$x(n) = \sum_{i=1}^{r} \lambda_i^n (a_{i0} + a_{i1}n + a_{i2}n^2 + \cdots + a_{i,m_{i-1}} n^{m_i - 1}). \tag{3.7}$$

Důkaz. Důkaz lze provést užitím Věty 3.1 a Důsledku 3.2.

Příklad 3.4. Řešte úlohu

$$x(n+3) - 7x(n+2) + 16x(n+1) - 12x(n) = 0, \quad x(0) = 0, x(1) = 1, x(2) = 1.$$

Řešení. Charakteristická rovnice je

$$\lambda^3 - 7\lambda^2 + 16\lambda - 12 = 0.$$

Její kořeny jsou $\lambda_1 = 2 = \lambda_2$, $\lambda_3 = 3$.
Obecným řešením je

$$x(n) = a_0 2^n + a_1 n 2^n + b_1 3^n.$$

Pro nalezení konstant $a_0, a_1,$ a b_1, použijeme vstupní hodnoty:

$$\begin{aligned} x(0) &= a_0 + b_1 = 0, \\ x(1) &= 2a_0 + 2a_1 + 3b_1 = 1, \\ x(2) &= 4a_0 + 8a_1 + 9b_1 = 1. \end{aligned}$$

Po vyřešení výše uvedené soustavy rovnic obdržíme

$$a_0 = 3, a_1 = 2, \text{ a } b_1 = -3.$$

Proto řešení uvedené úlohy je

$$x(n) = 3 \cdot 2^n + 2n2^n - 3^{n+1}.$$

Příklad 3.5. **Fibonacciho posloupnost (úloha o králících).** Tento problém byl popsán v roce 1202 v knize "Liber Abaci", kterou napsal známý italský matematik Leonardo di Pisa, známý jako Fibonacci. Problém může být nastíněn následovně: Kolik párů potomků má jeden pár dospělých králíků za rok, když každému páru králíků se narodí nový králičí pár každý měsíc a když dosáhnou dospělosti ve věku dvou měsíců?

měsíc	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
páry	1	2	3	5	8	13	21	34	55	89	144	233	377

Tato tabulka ukazuje počet párů králíků na konci každého měsíce. První pár má potomky na konci prvního měsíce a tedy máme již dva páry. Na konci druhého měsíce první pár má potomky a tedy máme tři páry. Na konci třetího měsíce první a druhý pár má již potomky a máme párů pět (viz tabulka). Jestliže $F(n)$ je počet párů králíků na konci n-tého měsíce, pak je případ popsán lineární diferenční rovnicí druhého řádu.

$$F(n+2) = F(n+1) + F(n), \quad F(0) = 1, F(1) = 2, \ 0 \le n \le 10.$$

Tento příklad je speciálním případem Fibonacciho posloupnosti, která se dá zapsat takto:

$$F(n+2) = F(n+1) + F(n), \quad F(0) = 0, F(1) = 1, n \ge 0. \tag{3.8}$$

Prvních 13 výrazů je 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233 a 377, jak již bylo uvedeno výše.
Charakteristická rovnice odpovídající rovnici (3.8) je

$$\lambda^2 - \lambda - 1 = 0.$$

Charakteristické kořeny jsou

$$\alpha = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \quad \text{a} \quad \beta = \frac{1-\sqrt{5}}{2}.$$

Obecné řešení rovnice (3.8) je

$$F(n) = a_1 \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + a_2 \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n, \quad n \ge 1. \tag{3.9}$$

Užitím vstupních hodnot $F(0) = 0$ a $F(1) = 1$, obdržíme

$$a_1 = \frac{1}{\sqrt{5}}, \quad a_2 = -\frac{1}{\sqrt{5}}.$$

Tudíž,

$$F(n) = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n \right) = \frac{1}{\sqrt{5}} (\alpha^n - \beta^n) \tag{3.10}$$

Je zajímavé najít limitu

$$\lim_{n\to\infty} \frac{F(n+1)}{F(n)} = \alpha \doteq 1.618.$$

Získané číslo se nazývá **zlatý řez** (také "zlaté číslo"). Údajně reprezentuje poměr stran obdélníku, který je oku nejpříjemnější.

Příklad 3.6. Přenos informací.
Předpokládejme signální systém, který má dva signály s_1 a s_2 tak, jako tečky a čárky u telegrafu. Zprávy jsou přenášeny kódováním do řetězců nebo posloupností těchto dvou signálů. Předpokládejme, že signál s_1 potřebuje právě n_1 časových jednotek a signál s_2 právě n_2 časových jednotek pro svůj přenos. Určete možný počet přenesených zpráv $M(n)$ za čas n.

$$
\begin{array}{lll}
- \bullet - \bullet - - - \bullet\bullet\bullet - & \cdots \quad \bullet & M(n-n_1) \text{ možná zpráva} \\
- - - \bullet - - - \bullet\bullet - - & \cdots \quad - & M(n-n_2) \text{ možná zpráva}
\end{array}
$$

Obr. 3.1: Dva signály, jeden je zakončen signálem s_1 a druhý signálem s_2.

Zpráva končí v čase n buď signálem s_1 nebo signálem s_2. Jestliže zpráva skončí signálem s_1, pak poslední signál musí začít v čase $n-n_1$ (od signálu s_1 uplyne n_1 časových jednotek). Proto je zde $M(n-n_1)$ možných zpráv, které se mohou objevit s posledním znakem s_1 (je zde $M(n-n_1)$ zpráv, které trvají dobu n a končí signálem s_1). Podobně můžeme říci, že existuje $M(n-n_2)$ zpráv v trvání n, které končí signálem s_2. Tedy celkový počet zpráv je $M(n)$ o trvání n. Tyto úvahy můžeme vyjádřit takto:

$$M(n) = M(n-n_1) + M(n-n_2).$$

Jestliže $n_1 \geq n_2$, pak výše uvedený vztah může být zapsán ve známém tvaru diferenční rovnice řádu n_1

$$M(n+n_1) - M(n+n_1-n_2) - M(n) = 0. \tag{3.11}$$

Dále, jestliže $n_1 \leq n_2$, pak obdržíme rovnici řádu n_2

$$M(n+n_2) - M(n+n_2-n_1) - M(n) = 0. \tag{3.12}$$

Zajímavý speciální případ nastane, když $n_1 = 1$ a $n_2 = 2$. V tomto případě

$$M(n+2) - M(n+1) - M(n) = 0$$

nebo

$$M(n+2) = M(n+1) + M(n)$$

což není nic jiného než Fibonacciho posloupnost

$$\{0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, \dots\}$$

se kterou jsme se setkali v příkladu 3.5. Obecné řešení (tak jako ve vzorci (3.9)) je zapsáno ve tvaru

$$M(n) = a_1 \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + a_2 \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n , \quad n = 0, 1, 2, \dots . \tag{3.13}$$

Pro nalezení a_1 a a_2 potřebujeme specifikovat $M(0)$ a $M(1)$. Rozumné je volit $M(0) = 0$ a $M(1) = 1$. Užitím těchto vstupních dat ve vztahu (3.13) dostaneme

$$a_1 = \frac{1}{\sqrt{5}} , \quad a_2 = -\frac{1}{\sqrt{5}} ,$$

a řešení našeho problému je

$$M(n) = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n . \tag{3.14}$$

V teorii informací je kapacita C kanálu definovaná jako

$$C = \lim_{n\to\infty} \frac{\log_2 M(n)}{n}\ , \tag{3.15}$$

kde $\log_2$ značí logaritmus o základu 2.
Z rovnice (3.14) dostaneme

$$C = \lim_{n\to\infty} \frac{\log_2 \frac{1}{\sqrt{5}}}{n} + \lim_{n\to\infty} \log_2 \left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n \right]. \tag{3.16}$$

Následně

$$\frac{1-\sqrt{5}}{2} \approx 0.6 < 1$$

,

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n = 0.$$

Všimněme si, že výraz na pravé straně rovnice (3.16) konverguje k nule když $n \to \infty$.
Tedy

$$\begin{aligned} C &= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log_2 \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n, \\ C &= \log_2 \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) \approx 0.7. \end{aligned} \tag{3.17}$$

3.1 Lineární nehomogenní rovnice

V posledních kapitolách jsme se seznámili s lineárními homogenními diferenčními rovnicemi. Kromě toho jsme v případech rovnic s konstantními koeficienty ukázali, jak sestrojit jejich řešení. Dále se zaměříme na řešení nehomogenních lineárních rovnic k-tého řádu

$$y(n+k) + p_1(n)y(n+k-1) + \cdots + p_k(n)y(n) = g(n), \tag{3.18}$$

kde $p_k(n) \neq 0$ pro všechna $n \geq n_0$. Posloupnost $g(n)$ se nazývá **vnější silou**, **řídící funkcí** nebo **vstupem** do systému. Rovnice (3.18) reprezentuje fyzikální systém ve kterém $g(n)$ je vstup a $y(n)$ je výstup. Tedy řešení rovnice (3.18) determinuje výstup $y(n)$, který je dán vstupem $g(n)$. Před započetím řešení (3.18) chceme položit následující otázku: Má řešení rovnice (3.18) tvar prostorového vektoru? Jinými slovy. Je součet dvou řešení vztahu (3.18) řešením vztahu (3.18)? A je také násobek jeho řešení vztahu (3.18) řešením rovnice (3.18)? Odpovězme na tyto následující otázky příkladem.

Příklad 3.7. Uvažme rovnici

$$y(n+2) - y(n+1) - 6y(n) = 5 \cdot 3^n.$$

(a) Ukažte, že $y_1(n) = n3^{n-1}$ a $y_2(n) = (1+n)3^{n-1}$ jsou řešením rovnice.

(b) Ukažte, že $y(n) = y_2(n) - y_1(n)$ není řešením rovnice.

(c) Ukažte, že $\varphi(n) = sn3^{n-1}$ není řešením rovnice pro $s \neq 1$.

Řešení.

(a) Ověření, že y_1 a y_2 jsou řešení, je vynecháno.

(b) Položíme $y(n) = y_2(n) - y_1(n) = 3^{n-1}$ do rovnice a dostaneme

$$3^{n+1} - 3^n - 6 \cdot 3^{n-1} = 3^n(3 - 1 - 2) = 0 \neq 5 \cdot 3^n.$$

(c) Substitucí za $\varphi(n)$ do rovnice vidíme, že $\varphi(n)$ není řešením.

Důsledky

(i) Z předchozího příkladu usuzujeme, že na rozdíl od homogenních rovnic, řešení nehomogenních rovnic (3.18) **nemají tvar prostorového vektoru**. Ani součet (rozdíl) dvou řešení ani jejich násobek řešení není řešením nehomogenní rovnice.

(ii) V části (b) příkladu 3.7 jsme zjistili, že rozdíl dvou řešení $y_2(n)$ a $y_1(n)$ nehomogenní rovnice je ve skutečnosti řešením asociované homogenní rovnice. To platí pro homogenní obecnou rovnici n-tého řádu.

Věta 3.8. *Jestliže $y_1(n)$ a $y_2(n)$ jsou řešeními rovnice* (3.18)*, pak $x(n) = y_1(n) - y_2(n)$ je řešením asociované homogenní rovnice.*

$$x(n+k) + p_1(n)x(n+k-1) + \cdots + p_k(n)x(n) = 0. \tag{3.19}$$

Obecné řešení homogenní rovnice (3.19) odpovídající nehomogenní rovnice (3.18), označíme $y_c(n)$. Řešení nehomogenní rovnice (3.18) se nazývá **partikulárním řešením** a bude se značit $y_p(n)$. Další věta ukazuje jakou má strukturu obecné řešení rovnice (3.18).

Věta 3.9. *Každé řešení $y(n)$ rovnice* (3.18) *se dá zapsat ve tvaru*

$$y(n) = y_p(n) + \sum_{i=1}^{k} a_i x_i(n),$$

kde $\{x_1(n), x_2(n), \dots, x_k(n)\}$ je fundamentální množina řešení homogenní rovnice (3.19).

Důkaz. Rozdíl $y(n) - y_p(n)$ je řešením homogenní rovnice (3.19). Tedy

$$y(n) - y_p(n) = \sum_{i=1}^{k} a_i x_i(n)$$

pro libovolné konstanty a_i.

Předcházející věta říká, že **obecné řešení** nehomogenní rovnice (3.18) je

$$y(n) = y_c(n) + y_p(n). \tag{3.20}$$

Nyní zaměříme naší pozornost na nalezení partikulárního řešení y_p nehomogenní rovnice s konstantními koeficienty

$$y(n+k) + p_1 y(n+k-1) + \cdots + p_k y(n) = g(n). \tag{3.21}$$

3.1.1 Metoda neurčitých koeficientů

Tato metoda spočívá v odhadu podoby partikulárního řešení. Není účinná pro zcela libovolný nehomogenní výraz $g(n)$. Mohou však být stanovena určitá pravidla pro zjištění partikulárního řešení touto metodou, a to pokud $g(n)$ je lineární kombinací funkcí, z nichž každá má jeden z tvarů

$$a^n, \sin(bn), \cos(bn), \text{ nebo } n^k, \tag{3.22}$$

případně součiny těchto tvarů

$$a^n \sin(bn), a^n n^k, a^n n^k \cos(bn), \dots. \tag{3.23}$$

Definice 3.10. Polynomiální operátor $N(E)$, kde E je operátor posunu se nazývá **anihilátorem** funkce $g(n)$, jestliže

$$N(E)g(n) = 0. \tag{3.24}$$

Jinými slovy, $N(E)$ je anihilátor $g(n)$, pokud $g(n)$ je řešením rovnice (3.24).

Například anihilátor funkce $g(n) = 3^n$ je $N(E) = E - 3I$, protože $(E - 3I)y(n) = 0$ má řešení $y(n) = 3^n$.

Anihilátor funkce $g(n) = \cos\frac{n\pi}{2}$ je $N(E) = E^2 + I$, protože $(E^2 + I)y(n) = 0$ má řešení $y(n) = \cos\frac{n\pi}{2}$.

Přepišme rovnici (3.21) pomocí operátora posunu E jako

$$p(E)y(n) = g(n), \tag{3.25}$$

kde $p(E) = E^{n+k} + p_1 E^{n+k-1} + \cdots + p_k I$.

Předpokládejme nyní, že $N(E)$ je anihilátor $g(n)$ v rovnici (3.25). Použití $N(E)$ na obou stranách rovnice (3.25) dá

$$N(E)p(E)y(n) = 0. \tag{3.26}$$

Nechť $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$ jsou charakteristické kořeny odpovídající homogenní rovnici

$$p(E)y(n) = 0 \tag{3.27}$$

a $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_l$ jsou charakteristické kořeny odpovídající rovnici

$$N(E)y(n) = 0. \tag{3.28}$$

Uvažujme dva případy.

Případ 1. Žádné z čísel λ_i není rovno žádnému číslu μ_i. V tomto případě je $y_p(n)$ obecným řešením rovnice (3.28) s neurčenými konstantami. Zpětným dosazením tohoto odhadu partikulárního řešení do rovnice (3.21), zjistíme hodnoty konstant.

Případ 2. $\lambda_i = \mu_j$ pro některé i, j. V tomto případě množina charakteristických čísel rovnice (3.26) obsahuje kořeny vyšších násobností. K určení partikulárního řešení $y_p(n)$, nejprve najdeme obecné řešení rovnice (3.26) a pak zrušíme všechny výrazy, které se objevují v $y_c(n)$. Potom postupujeme podobně jako v případě 1 a najdeme hodnoty konstant.

Příklad 3.11. Řešte diferenční rovnici

$$y(n+2) + y(n+1) - 12y(n) = n2^n. \tag{3.29}$$

Řešení. Charakteristické kořeny homogenní rovnice jsou $\lambda_1 = 3$ a $\lambda_2 = -4$. Proto,

$$y_c(n) = c_1 3^n + c_2(-4)^n.$$

Jelikož anihilátor $g(n) = n2^n$ je dán $N(E) = (E - 2I)^2$ vidíme, že $\mu_1 = \mu_2 = 2$. Tato rovnice patří do oblasti Případu 1 neboť $\lambda_i \neq \mu_j$ pro jakékoliv i, j. Proto

$$y_p(n) = a_1 2^n + a_2 n 2^n.$$

Dosazení tohoto vztahu do rovnice (3.29) dává

$$\begin{aligned} a_1 2^{n+2} + a_2(n+2)2^{n+2} + a_1 2^{n+1} + a_2(n+1)2^{n+1} - 12a_2 n 2^n &= n2^n \\ (10a_2 - 6a_1)2^n - 6a_2 n 2^n &= n2^n. \end{aligned}$$

Proto

$$10a_2 - 6a_1 = 0 \quad \text{a} \quad -6a_2 = 1,$$

nebo

$$a_1 = -\frac{5}{18}, \quad a_2 = -\frac{1}{6}.$$

Partikulární řešení je

$$y_p(n) = -\frac{5}{18} 2^n - \frac{1}{6} n 2^n.$$

Obecné řešení je dáno takto:

$$y(n) = c_1 3^n + c_2(-4)^n - \frac{5}{18} 2^n - \frac{1}{6} n 2^n.$$

Příklad 3.12. Řešte diferenční rovnici

$$(E - 3I)(E + 2I)y(n) = 5 \cdot 3^n. \tag{3.30}$$

Řešení. Anihilátorem funkce $5 \cdot 3^n$ je $N(E) = (E - 3I)$. Proto $\mu_1 = 3$. Charakteristické kořeny homogenní rovnice jsou $\lambda_1 = 3$ a $\lambda_2 = -2$. Jelikož $\lambda_2 = \mu_1$, aplikujeme postup pro případ 2.

Tedy,

$$(E - 3I)^2(E + 2I)y(n) = 0. \tag{3.31}$$

Nyní $y_c(n) = c_1 3^n + c_2(-2)^n$.
Nyní víme, že obecné řešení rovnice (3.31) je dáno vztahem

$$\tilde{y}(n) = (a_1 + a_2 n)3^n + a_3(-2)^n.$$

Vynecháním z $\tilde{y}(n)$ funkcí 3^n a $(-2)^n$, které se objevily v $y_c(n)$, stanovíme $y_p(n) = a_2 n 3^n$. Dosazení $y_p(n)$ do rovnice (3.30) dá

$$a_2(n+2)3^{n+2} - a_2(n+1)3^{n-1} - 6a_2 n 3^n = 5 \cdot 3^n$$

nebo

$$a_2 = \frac{1}{3}.$$

tedy $y_p(n) = n3^{n-1}$, a obecné řešení rovnice (3.30) je

$$y(n) = c_1 3^n + c_2(-2)^n + n3^{n-1}.$$

Příklad 3.13. Najděte řešení diferenční rovnice

$$y(n+2) + 4y(n) = 8 \cdot 2^n \cos\left(\frac{n\pi}{2}\right). \tag{3.32}$$

Řešení. Charakteristická rovnice odpovídající homogenní rovnici je

$$\lambda^2 + 4 = 0.$$

Charakteristické kořeny jsou

$$\lambda_1 = 2i, \quad \lambda_2 = -2i.$$

tedy $r = 2$, a $\theta = \pi/2$, a

$$y_c(n) = 2^n \left(c_1 \cos\left(\tfrac{n\pi}{2}\right) + c_2 \sin\left(\tfrac{n\pi}{2}\right)\right).$$

Všimněte si, že se funkce $g(n) = 2^n \cos\left(\frac{n\pi}{2}\right)$ objeví v $y_c(n)$. Dále

$$y_p(n) = 2^n \left(an \cos\left(\tfrac{n\pi}{2}\right) + bn \sin\left(\tfrac{n\pi}{2}\right)\right). \tag{3.33}$$

Dosazení vztahu (3.33) do (3.32) dává

$$\begin{aligned}&2^{n+2}\left(a(n+2)\cos\left(\tfrac{n\pi}{2}+\pi\right) + b(n+2)\sin\left(\tfrac{n\pi}{2}+\pi\right)\right)\\ &+4\cdot 2^n\left(an\cos\left(\tfrac{n\pi}{2}\right) + bn\sin\left(\tfrac{n\pi}{2}\right)\right) = 8\cdot 2^n\cos\left(\tfrac{n\pi}{2}\right).\end{aligned}$$

Nahrazením $\cos\left(\frac{n\pi}{2}+\pi\right)$ za $-\cos\left(\frac{n\pi}{2}\right)$, a $\sin\left(\frac{n\pi}{2}+\pi\right)$ za $-\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)$, a porovnáním koeficientů dostáváme $a = -1$ a $b = 0$.
Dosazením zpět do vztahu (3.33), dostáváme

$$y_p(n) = -2^{n+1} n \cos\left(\tfrac{n\pi}{2}\right),$$

a obecné řešení rovnice (3.32), ke kterému dospějeme sečtením $y_c(n)$ a $y_p(n)$, je

$$y(n) = 2^n \left(c_1 \cos\tfrac{n\pi}{2} + c_2 \sin\tfrac{n\pi}{2} - n\cos\tfrac{n\pi}{2}\right).$$

3.1.2 Metoda variace konstant (parametrů)

Uvažujte nehomogenní diferenční rovnici druhého řádu

$$y(n+2) + p_1(n)y(n+1) + p_2(n)y(n) = g(n) \tag{3.34}$$

a odpovídající homogenní diferenční rovnici

$$y(n+2) + p_1(n)y(n+1) + p_2(n)y(n) = 0. \tag{3.35}$$

Metoda variace konstant je běžně používaná k nalezení partikulárního řešení $y_p(n)$ rovnice (3.34), kdy koeficienty $p_1(n)$ a $p_2(n)$ nejsou konstanty. Tato metoda předpokládá, že partikulární řešení rovnice (3.34) může být napsáno ve tvaru

$$y(n) = u_1(n)y_1(n) + u_2(n)y_2(n), \tag{3.36}$$

kde $y_1(n)$ a $y_2(n)$ jsou dvě lineárně nezávislá řešení homogenní rovnice (3.35) a $u_1(n), u_2(n)$ jsou zatím neznámé posloupnosti, které budou určeny později. Lze snadno ukázat, že

$$\begin{aligned} y(n+1) &= u_1(n)y(n+1) + u_2(n)y(n+1) + \\ &\quad + \Delta u_1(n)y_1(n+1) + \Delta u_2(n)y_2(n+1). \end{aligned} \tag{3.37}$$

Položme

$$\Delta u_1(n)y_1(n+1) + \Delta u_2(n)y_2(n+1) = 0. \tag{3.38}$$

Použitím (3.37) a (3.38) lze ukázat, že

$$\begin{aligned} y(n+2) &= u_1(n)y_1(n+2) + u_2(n)y_2(n+2) + \\ &\quad + \Delta u_1(n)y_1(n+2) + \Delta u_2(n)y_2(n+2). \end{aligned}$$

Nahrazením výše uvedených výrazů za $y(n), y(n+1)$, a $y(n+2)$ v (3.34), použitím (3.38) a skutečnosti, že $y_1(n)$ a $y_2(n)$ jsou řešení homogenní rovnice (3.35), dostaneme

$$\Delta u_1(n)y_1(n+2) + \Delta u_2(n)y_2(n+2) = g(n). \tag{3.39}$$

Nyní můžeme získat $\Delta u_1(n)$ a $\Delta u_2(n)$ jako řešení soustavy rovnic

$$\begin{aligned} \Delta u_1(n)y_1(n+1) + \Delta u_2(n)y_2(n+1) &= 0. \\ \Delta u_1(n)y_1(n+2) + \Delta u_2(n)y_2(n+2) &= g(n). \end{aligned} \tag{3.40}$$

Použitím Cramerovo pravidla, dostaneme

$$\Delta u_1(n) = -\frac{g(n)y_2(n+1)}{C(n+1)}, \quad \Delta u_2(n) = \frac{g(n)y_1(n+1)}{C(n+1)}, \tag{3.41}$$

kde $C(n)$ je Casoratián $y_1(n)$ a $y_2(n)$.
Použitím vzorce (2.16), můžeme najít $u_1(n)$ a $u_2(n)$ jako

$$u_1(n) = \sum_{r=0}^{n-1} \frac{-g(r)y_2(r+1)}{C(r+1)}, \quad u_1(n) = \sum_{r=0}^{n-1} \frac{g(r)y_1(r+1)}{C(r+1)}. \tag{3.42}$$

A konečně, partikulární řešení $y_p(n)$ rovnice (3.34) je

$$y_p(n) = \sum_{r=0}^{n-1} \frac{y_1(r+1)y_2(n) - y_2(r+1)y_1(n)}{C(r+1)} g(r). \tag{3.43}$$

Maplety

Kliknutím na následující odkaz si lze pomocí mapletu připomenout, jak lze řešit nehomogenní lineární rovnice pomocí $\mathcal{Z}$–transformace:

1. Lineární nehomogenní rovnice řešené $\mathcal{Z}$–transformací.
2. $\mathcal{Z}$–transformace.

4 Systém diferenčních rovnic

V poslední kapitole jsme se zabývali lineárními diferenčními rovnicemi, a sice rovnicemi s jednou nezávislou a jednou závislou proměnnou. Protože ne každá situace, se kterou se setkáme, bude tak snadná, musíme být připraveni si poradit se systémem o více než jedné závislé proměnné.

Proto se v této kapitole budeme zabývat systémy rovnic o více závislých proměnných. Tyto systémy se vyskytují v mnoha vědeckých oborech.

Dále budeme transformovat diferenční rovnice vyšších řádů, které jsme již probírali, na systémy rovnic prvního řádu. Tato transformace se pravděpodobně ukáže jako málo prakticky využitelná v oblasti problémů okrajových hodnot a oscilací, ale je užitečným nástrojem při studiu teorie stability.

4.1 Autonomní (časově nezávislé) systémy

V této části se budeme zabývat hledáním řešení následujícího systému k-lineárních rovnic:

$$\begin{array}{rcccccccc} x_1(n+1) & = & a_{11}x_1(n) & + & a_{12}x_2(n) & + & \cdots & + & a_{1k}x_k(n) \\ x_2(n+1) & = & a_{21}x_1(n) & + & a_{22}x_2(n) & + & \cdots & + & a_{2k}x_k(n) \\ & \vdots & & & & & & & \\ x_k(n+1) & = & a_{k1}x_1(n) & + & a_{k2}x_2(n) & + & \cdots & + & a_{kk}x_k(n) \end{array}$$

Tento systém může být zapsán ve vektorové formě

$$x(n+1) = Ax(n), \tag{4.1}$$

kde $x(n) = (x_1(n), x_2(n), \ldots, x_k(n))^T \in \mathbb{R}^k$ (T označuje transpozici vektoru), a $A = (a_{ij})$ je $k \times k$ reálná nesingulární matice. Systém (4.1) je považován za autonomní nebo časově nezávislý, když hodnoty A jsou všechny konstantní. Neautonomní nebo časově závislé systémy budou uvažovány později.

Pokud pro nějaké $n_0 \geq 0$, $x(n_0) = x_0$, pak systém (4.1) je nazýván počátečním problémem. Dále jednoduchou iterací (nebo přímo dosazením do systému) je možné dokázat, že řešení je dáno vztahem

$$x(n, n_0, x_0) = A^{n-n_0}x_0, \tag{4.2}$$

kde $A^0 = I$, je $k \times k$ jednotková matice. Všimněte si, že $x(n_0, n_0, x_0) = x_0$. Pokud $n_0 = 0$, pak řešení ve vztahu (4.2) může být zapsáno jako $x(n, x_0)$, nebo jednodušeji jako $x(n)$. Lze předpokládat, že $n_0 = 0$.

Nechť $y(n - n_0) = x(n)$. Pak

$$y(n+1) = Ay(n), \tag{4.3}$$

$y(0) = x(n_0)$ a

$$y(n) = A^n y(0). \tag{4.4}$$

4.1.1 Diskrétní analogie Putzerova algoritmu

V diferenciálních rovnicích je Putzerův algoritmus používán k výpočtu e^{At}. Zde uvedeme analogický algoritmus k výpočtu mocnin A^n. Nejprve se podívejme na některé poznatky teorie matic, které budeme potřebovat. V následujícím textu označuje $\mathbb{C}$ množinu komplexních čísel.

Připomeňme, že pro reálnou $k \times k$ matici $A = (a_{ij})$, je charakteristickým číslem A reálné nebo komplexní číslo λ takové, že $A\xi = \lambda\xi$ pro nějaký nenulový vektor $\xi \in \mathbb{C}^k$. Ekvivalentně může být tento vztah zapsán jako

$$(A - \lambda I)\xi = 0. \tag{4.5}$$

Rovnice (4.5) má nenulové řešení ξ tehdy a pouze tehdy pokud

$$\det(A - \lambda I) = 0$$

nebo, v rozvinutém tvaru, když

$$\lambda^k + a_1\lambda^{k-1} + a_2\lambda^{k-2} + \cdots + a_{k-1}\lambda^1 + a_k = 0. \tag{4.6}$$

Rovnice (4.6) je nazývána **charakteristickou rovnicí** matice A jejíž kořeny λ jsou nazývány **charakteristickými čísly** matice A. Pokud $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$ jsou charakteristickými čísly matice A (některá z nich se mohou opakovat), pak můžeme napsat rovnici (4.6) jako

$$p(\lambda) = \prod_{j=1}^{k} (\lambda - \lambda_j) = 0. \tag{4.7}$$

Nyní jsme připraveni formulovat Cayley-Hamiltonovu větu, která je jedním ze základních výsledků teorie matic.

Věta 4.1. *Každá matice vyhovuje své charakteristické rovnici. To znamená,*

$$p(A) = \prod_{j=1}^{k} (A - \lambda_j I) = 0, \tag{4.8}$$

nebo

$$A^k + a_1 A^{k-1} + a_2 A^{k-2} + \cdots + a_k I = 0. \tag{4.9}$$

4.1.2 Algoritmus výpočtu A^n

Nechť A je $k \times k$ reálná matice. Podívejme se na možnou reprezentaci A^n vztahem

$$A^n = \sum_{j=1}^{s} u_j(n) M(j-1), \tag{4.10}$$

kde $u_j(n)$ jsou skalární funkce, jež budou stanoveny později a

$$M(j) = (A - \lambda_j I) M(j-1), \;\; M(0) = I \tag{4.11}$$

nebo

$$M(j+1) = (A - \lambda_{j+1} I) M(j), \;\; M(0) = I.$$

Iterací můžeme ukázat, že

$$M(n) = (A - \lambda_n I)(A - \lambda_{n-1} I) \cdots (A - \lambda_1 I).$$

Ve zkráceném zápisu

$$M(n) = \prod_{j=1}^{n} (A - \lambda_j I). \tag{4.12}$$

Všimněte si, že díky Cayley-Hamiltonově větě máme

$$M(k) = \prod_{j=1}^{k} (A - \lambda_j I) = 0.$$

Následně, $M(n) = 0$ pro všechna $n \geq k$. Díky tomuto zjištění můžeme přepsat vzorec (4.10) takto

$$A^n = \sum_{j=1}^{k} u_j(n) M(j-1). \tag{4.13}$$

Necháme-li $n = 0$ ve vzorci (4.13) pak dostaneme

$$A^0 = I = u_1(0) I + u_2(0) M(1) + \cdots + u_k(0) M(k-1). \tag{4.14}$$

Rovnice (4.14) je splněna pokud

$$u_1(0) = 1 \text{ a } u_2(0) = u_3(0) = \cdots = u_k(0) = 0. \tag{4.15}$$

Ze vzorce (4.13) máme

$$\begin{aligned} A^{n+1} &= \sum_{j=1}^{k} u_j(n+1) M(j-1) = A A^n \\ &= A \left(\sum_{j=1}^{k} u_j(n) M(j-1) \right) \end{aligned}$$

$$= \sum_{j=1}^{k} u_j(n) AM(j-1).$$

Dosazením za $AM(j-1)$ z rovnice (4.11) dostaneme

$$\sum_{j=1}^{k} u_j(n+1)M(j-1) = \sum_{j=1}^{k} u_j(n)\left(M(j) + \lambda_j M(j-1)\right). \tag{4.16}$$

Porovnáním koeficientů u matic $M(j)$, $1 \le j \le k$, v rovnici (4.16) a aplikací podmínky (4.15) získáme

$$\left.\begin{array}{rcll} u_1(n+1) & = & \lambda_1 u_1(n), & u_1(0) = 1, \\ u_j(n+1) & = & \lambda_j u_j(n) + u_{j-1}(n), & u_j(0) = 0, j = 2, 3, \dots, k. \end{array}\right\} \tag{4.17}$$

Řešení rovnic (4.17) jsou dána takto:

$$u_1(n) = \lambda_1^n, \quad u_j(n) = \sum_{i=0}^{n-1} \lambda_j^{n-1-i} u_{j-1}(i), \quad j = 2, 3, \dots, k. \tag{4.18}$$

Rovnice (4.12) a (4.18) dohromady tvoří algoritmus pro výpočet A^n, který se nazývá **Putzerovým algoritmem**.

Příklad 4.2. Najděte řešení diferenciálního systému $x(n+1) = Ax(n)$, kde

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & -4 \\ 0 & 1 & 6 \end{pmatrix}.$$

Řešení. Charakteristická čísla matice A mohou být získána řešením charakteristické rovnice $\det(A - \lambda I) = 0$. Nyní

$$\det \begin{pmatrix} 4-\lambda & 1 & 2 \\ 0 & 2-\lambda & -4 \\ 0 & 1 & 6-\lambda \end{pmatrix} = (4-\lambda)(\lambda-4)^2 = 0.$$

Vlastní čísla matice A jsou $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 4$. Takže

$$M(0) = I, \quad M(1) = A - 4I = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & -2 & -4 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix},$$

$$M(2) = (A - 4I)M(1) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Nyní,

$$u_1(n) \quad = \quad 4^n,$$

$$
\begin{aligned}
u_2(n) &= \sum_{i=0}^{n-1} 4^{n-1-i} \cdot 4^i = n4^{n-1}, \\
u_3(n) &= \sum_{i=0}^{n-1} 4^{n-1-i} \cdot i4^{i-1} \\
&= 4^{n-2} \sum_{i=0}^{n-1} i = \frac{n(n-1)}{2}\, 4^{n-2}
\end{aligned}
$$

Použitím rovnice (4.13) máme

$$
\begin{aligned}
A^n &= 4^n \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + n4^{n-1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & -2 & -4 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} + \\
&\quad + \frac{n(n-1)}{2}\, 4^{n-2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 4^n & n\,4^{n-1} & 2n\,4^{n-1} \\ 0 & 4^n - 2n\,4^{n-1} & -n\,4^n \\ 0 & n\,4^{n-1} & 4^n + 2n\,4^{n-1} \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

Řešení soustavy diferenčních rovnic je

$$
x(n) = A^n x(0) = \begin{pmatrix} 4^n x_1(0) + n\,4^{n-1} x_2(0) + 2n\,4^{n-1} x_3(0) \\ (4^n - 2n\,4^{n-1}) x_2(0) - n\,4^n x_3(0) \\ n\,4^{n-1} x_2(0) + (4^n + 2n\,4^{n-1}) x_3(0) \end{pmatrix}
$$

kde $x(0) = (x_1(0), x_2(0), x_3(0))^T$.

Maplety

Kliknutím na následující odkaz si lze pomocí mapletu procvičit toto téma:

1. Výpočet determinantu matice.
2. Vlastní čísla a vektory konstantní matice.

5 Lineární systémy diskrétních rovnic - obecná teorie

Uvažujme soustavu

$$x(n+1) = A(n)x(n), \tag{5.1}$$

kde $A(n) = (a_{ij}(n))$ je $k \times k$ regulární maticová funkce. Uvedený systém je **homogenní lineární diferenční soustavou**, která je **neautonomní** neboli **časově proměnná**. Odpovídající nehomogenní soustava je

$$y(n+1) = A(n)y(n) + g(n), \tag{5.2}$$

kde $g(n) \in \mathbb{R}^k$.
Prodiskutujme existenci a jednoznačnost řešení systému (5.1).

Věta 5.1. *Pro každé $x_0 \in \mathbb{R}^k$ a $n_0 \in \mathbb{Z}^+$ existuje jediné řešení $x(n, n_0, x_0)$ rovnice (5.1) vyhovující podmínce $x(n_0, n_0, x_0) = x_0$.*

Důkaz. Ze systému (5.1) dostáváme

$$\begin{aligned} x(n_0+1, n_0, x_0) &= A(n_0)x(n_0) = A(n_0)x_0, \\ x(n_0+2, n_0, x_0) &= A(n_0+1)x(n_0+1) = A(n_0+1)A(n_0)x(n_0). \end{aligned}$$

Užitím matematické indukce můžeme vyvodit, že

$$x(n, n_0, x_0) = \left(\prod_{i=n_0}^{n-1} A(i) \right) x_0, \tag{5.3}$$

kde

$$\prod_{i=n_0}^{n-1} A(i) = \left\{ \begin{array}{ll} A(n-1)A(n-2)\cdots A(n_0) & \text{if } n > n_0 \\ I & \text{if } n = n_0 \end{array} \right\}.$$

Vzorec (5.3) vyjadřuje jediné řešení s požadovanými vlastnostmi.

5.1 Fundamentální matice

Nyní definujme pojem fundamentální matice, který je základním stavebního kamenem v teorii lineárních systémů.

Definice 5.2. Řešení $x_1(n), x_2(n), \dots, x_k(n)$ rovnice (5.1) jsou lineárně nezávislá pro $n \geq \geq n_0 \geq 0$ tehdy a jen tehdy, když ze vztahu

$$c_1x_1(n) + c_2x_2(n) + \cdots + c_kx_k(n) = 0,$$

kde $n \geq n_0$, vyplývá $c_i = 0$, $1 \leq i \leq k$.

Uvažujme $\Phi(n)$ jako matici rozměru $k \times k$, jejíž sloupce jsou tvořeny řešeními rovnice (5.1). Píšeme

$$\Phi(n) = [x_1(n), x_2(n), \dots, x_k(n)],$$

a platí

$$\begin{aligned} \Phi(n+1) &= [A(n)x_1(n), A(n)x_2(n), \dots, A(n)x_k(n)] \\ &= A(n)[x_1(n), x_2(n), \dots, x_k(n)] \\ &= A(n)\Phi(n). \end{aligned}$$

Vidíme, že $\Phi(n)$ vyhovuje maticové diferenční rovnici.

$$\Phi(n+1) = A(n)\Phi(n). \tag{5.4}$$

Řešení

$$x_1(n), x_2(n), \dots, x_k(n)$$

jsou lineárně nezávislá pro $n \geq n_0$, tehdy a jen tehdy, když je matice $\Phi(n)$ regulární ($\det \Phi(n) \neq 0$) pro všechna $n \geq n_0$. To vede k další definici.

Definice 5.3. Je-li $\Phi(n)$ matice, která je regulární pro $n \geq n_0$ a vyhovuje rovnici (5.4), pak se nazývá **fundamentální maticí** soustavy rovnic (5.1).

Všimněte si, že pokud $\Phi(n)$ je fundamentální matice a C je jakákoli regulární matice stejného rozměru, pak $\Phi(n)C$ je taktéž fundamentální matice. Takto existuje nekonečně mnoho fundamentálních matic pro danou soustavu. Přesto existuje jedna fundamentální matice, kterou již známe, a to

$$\Phi(n) = \prod_{i=n_0}^{n-1} A(i), \text{ kde } \Phi(n_0) = I.$$

V autonomním případě, kdy A je konstantní matice, je $\Phi(n) = A^{n-n_0}$, a když $n_0 = 0$, pak $\Phi(n) = A^n$.

Věta 5.4. *Existuje jediné řešení $\Psi(n)$ maticové rovnice (5.4) splňující počáteční podmínku $\Psi(n_0) = I$.*

Důkaz. Maticovou diferenční rovnici (5.4) můžeme považovat za systém k^2 diferenčních rovnic 1. řádu. Můžeme aplikovat Větu 5.1 o existenci a jednoznačnosti řešení, abychom dostali řešení ν takové, že

$$\nu(n_0) = (1, 0, \dots, 1, 0, \dots)^T,$$

kde se jedničky objevují na prvním, $k+1$, $2k+1$, …, atd. místě a nuly jsou na všech ostatních pozicích. Vektor ν je pak převeden na matici $\Psi(n)$ rozměru $k \times k$ seskupením do soustavy k vektorů, reprezentujících sloupce. Platí $\Psi(n_0) = I$.

Dodejme, že pokud pracujeme s jakoukoli fundamentální maticí $\Phi(n)$, pak matice $\Phi(n)\Phi^{-1}(n_0)$ je takovou maticí. Tato speciální fundamentální matice je označena jako $\Phi(n, n_0)$ a nazýváme ji **stavovou maticí přechodu**.

Obecně můžeme psát

$$\Phi(n, m) = \Phi(n)\Phi^{-1}(m)$$

pro jakákoli dvě kladná čísla n, m s $n \geq m$. Fundamentální matice $\Phi(n, m)$ má několik vlastností, které bychom zde měli uvést. Nejdříve si všimněme, že $\Phi(n, m)$ je řešením maticové diferenční rovnice

$$\Phi(n+1, m) = A(n)\Phi(n, m).$$

Platí:

(i) $\Phi^{-1}(n, m) = \Phi(m, n)$,

(ii) $\Phi(n, m) = \Phi(n, r)\Phi(r, m)$,

(iii) $\Phi(n, m) = \prod_{i=m}^{n-1} A(i)$.

Poznámka 5.5. Jediné řešení $x(n, n_0, x_0)$ rovnice (5.1) vyhovující podmínce $x(n, n_0, x_0) = x_0$ je

$$x(n, n_0, x_0) = \Phi(n, n_0)x_0. \tag{5.5}$$

Věta 5.6. *(Abelův vzorec). Pro jakékoli $n \geq n_0 \geq 0$, platí*

$$\det \Phi(n) = \left(\prod_{i=n_0}^{n-1} \det A(i)\right) \det \Phi(n_0). \tag{5.6}$$

Důkaz. Z (5.4) dostaneme skalární diferenční rovnici

$$\det \Phi(n+1) = \det A(n) \det \Phi(n).$$

Její řešení je dáno vztahem (5.6).

Poznámka 5.7. Je-li v rovnici (5.1) matice A konstantní maticí, pak

$$\det \Phi(n) = (\det A)^n \det \Phi(n_0). \tag{5.7}$$

Důkaz. Důkaz vychází ze vzorce (5.5).

Poznámka 5.8. Fundamentální matice $\Phi(n)$ je regulární pro každé $n \geq n_0$, tehdy a jen tehdy, když je $\Phi(n_0)$ regulární.

Důkaz. Tvrzení vyplývá ze vzorce (5.6), pokud bereme do úvahy, že $\det A(i) \neq 0$, pro $i \geq n_0$.

Poznámka 5.9. Řešení $x_1(n), x_2(n), \dots, x_k(n)$ rovnice (5.1) jsou lineárně nezávislá pro $n \geq n_0$ tehdy a jen tehdy, když matice $\Phi(n_0)$ je regulární.

Důkaz. Tvrzení vyplývá přímo z Důsledku 5.8.

Následující věta potvrzuje existenci k lineárně nezávislých řešení rovnice (5.1).

Věta 5.10. *Existuje k lineárně nezávislých řešení soustavy* (5.1) *pro* $n \geq n_0$.

Důkaz. Pro každé $i = 1, 2, \dots, k$ položme

$$e_i = (0, 0, \dots, 1, \dots, 0)^T$$

(jde o standardní jednotkový vektor v $\mathbb{R}^k$, kde všechny prvky jsou nulové kromě i-tého prvku, který je roven 1). Dle Věty 5.1, pro každé e_i, $1 \leq i \leq k$ existuje řešení

$$x(n, n_0, e_i)$$

rovnice (5.1) takové, že

$$x(n_0, n_0, e_i) = e_i.$$

Abychom dokázali, že soustava řešení

$$\{x(n, n_0, e_i) | \, 1 \leq i \leq k\}$$

je lineárně nezávislá, stačí v souladu s Důsledkem 5.6 ukázat, že $\Phi(n_0)$ je regulární. Tento fakt je ale zřejmý, neboť $\Phi(n_0) = I$. Důkaz věty je nyní kompletní.

Poznámka 5.11. Soustava S všech řešení rovnice (5.1) je lineárním prostorem rozměru k.

Důležitým důsledkem je, že když jsou

$$x_1(n), x_2(n), \dots, x_r(n)$$

řešení rovnice (5.1), potom $x(n) = \sum_{i=1}^{r} c_i x_i(n)$ je také řešením rovnice (5.1). Tato skutečnost vede k definici obecného řešení rovnice (5.1).

Definice 5.12. Předpokládejme, že $\{x_i(n) | \, 1 \leq i \leq k\}$ je jakákoli lineárně nezávislá soustava řešení rovnice (5.1). **Obecné řešení** rovnice (5.1) je definováno jako

$$x(n) = \sum_{i=1}^{k} c_i x_i(n), \tag{5.8}$$

kde $c_i \in \mathbb{R}$ jsou libovolné konstanty.

Vzorec (5.8) může být zapsán ve tvaru

$$x(n) = \Phi(n)c, \tag{5.9}$$

kde $\Phi(n) = (x_1(n), x_2(n), \dots, x_k(n))$ je fundamentální matice a $c = (c_1, c_2, \dots, c_k)^T \in \mathbb{R}^k$.

Nyní věnujme pozornost nehomogennímu systému (5.2). Definujeme partikulární řešení $y_p(n)$ rovnice (5.2) jako jakoukoli vektorovou funkci, která vyhovuje nehomogenní diferenční soustavě. Následující výsledek dává představu o struktuře obecného řešení soustavy (5.2).

Věta 5.13. *Obecné řešení $y(n)$ rovnice (5.2) může být zapsáno jako*

$$y(n) = \Phi(n)c + y_p(n), \tag{5.10}$$

kde c je libovolný konstantní vektor.

Nyní uvedeme vzorec pro určení partikulárního řešení $y_p(n)$.

Věta 5.14. *Partikulární řešení rovnice (5.2) je možné zapsat ve tvaru*

$$y_p(n) = \sum_{r=n_0}^{n-1} \Phi(n, r+1)g(r),$$

kde $y_p(n_0) = 0$.

Důkaz.

$$\begin{aligned} y_p(n+1) &= \sum_{r=n_0}^{n} \Phi(n+1, r+1)g(r) \\ &= \sum_{r=n_0}^{n-1} A(n)\Phi(n, r+1)g(r) + \Phi(n+1, n+1)g(n) \\ &= A(n)y(n) + g(n) \end{aligned}$$

Vidíme, že $y_p(n)$ je řešením rovnice (5.2). Navíc platí $y_p(n_0) = 0$.

5.2 Variace konstant

Věta 5.15. ***(Vzorec variace konstant).*** *Jediné řešení počáteční úlohy*

$$y(n+1) = A(n)y(n) + g(n), \;\; y(n_0) = y_0 \tag{5.11}$$

je dáno vztahem

$$y(n, n_0, y_0) = \Phi(n, n_0)y_0 + \sum_{r=n_0}^{n-1} \Phi(n, r+1)g(r) \tag{5.12}$$

nebo

$$y(n,n_0,y_0) = \left(\prod_{i=n_0}^{n-1} A(i)\right) y_0 + \sum_{r=n_0}^{n-1} \left(\prod_{i=r+1}^{n-1} A(i)\right) g(r). \tag{5.13}$$

Důkaz. Tvrzení vyplývá přímo z Věty 5.13 a z Lemma 5.14.

Poznámka 5.16. Pro autonomní systém, kde A je konstantní matice, je řešení rovnice (5.11) dáno jako

$$y(n,n_0,y_0) = A^{n-n_0} y_0 + \sum_{r=n_0}^{n-1} A^{n-r-1} g(r). \tag{5.14}$$

Příklad 5.17. Vyřešte soustavu $y(n+1) = Ay(n) + g(n)$, kde

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad g(n) = \begin{pmatrix} n \\ 1 \end{pmatrix}, \quad y(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Řešení. Užitím Putzerova algoritmu můžeme ukázat, že

$$A = \begin{pmatrix} 2^n & n\,2^{n-1} \\ 0 & 2^n \end{pmatrix}.$$

Tudíž

$$\begin{aligned}
y(n) &= \begin{pmatrix} 2^n & n\,2^{n-1} \\ 0 & 2^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\
&\quad + \sum_{r=0}^{n-1} \begin{pmatrix} 2^{n-r-1} & (n-r-1)\,2^{n-r-2} \\ 0 & 2^{n-r-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r \\ 1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 2^n \\ 0 \end{pmatrix} + \sum_{r=0}^{n-1} \begin{pmatrix} r\,2^{n-r-1} + (n-r-1)\,2^{n-r-2} \\ 2^{n-r-1} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 2^n \\ 0 \end{pmatrix} + 2^n \begin{pmatrix} \frac{1}{4} \sum\limits_{r=1}^{n-1} r \left(\frac{1}{2}\right)^r + \frac{n-1}{4} \sum\limits_{r=0}^{n-1} \left(\frac{1}{2}\right)^r \\ \frac{1}{2} \sum\limits_{r=0}^{n-1} \left(\frac{1}{2}\right)^r \end{pmatrix} \\
&\quad \left(\text{použitím vzorce } \sum_{r=1}^{n-1} r a^r = \frac{a(1-a^n) - n a^n (1-a)}{(1-a^2)}\right) \\
&= \begin{pmatrix} 2^n \\ 0 \end{pmatrix} + 2^n \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^n\right) - n\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} + \frac{n-1}{2}\left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^n\right) \\ 1-\left(\frac{1}{2}\right)^n \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 2^n \\ 0 \end{pmatrix} + 2^n \begin{pmatrix} -\frac{n}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^n + \frac{n}{2} - \frac{n}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^n \\ 1-\left(\frac{1}{2}\right)^n \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 2^n \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} n\,2^{n-1} - n \\ 2^n - 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2^n + n\,2^{n-1} - n \\ 2^n - 1 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Nyní se vrátíme ke skalárním rovnicím k-tého řádu a ukážeme jak je transformovat do k-rozměrného systému rovnic 1. řádu. Uvažme znovu rovnici

$$y(n+k) + p_1(n)y(n+k-1) + \cdots + p_k(n)y(n) = g(n). \tag{5.15}$$

Tento vztah může být také zapsán jako soustava rovnic 1. řádu. Položme

$$\begin{aligned} z_1(n) &= y(n), \\ z_2(n) &= y(n+1) = z_1(n+1), \\ z_3(n) &= y(n+2) = z_2(n+1), \\ &\vdots \\ z_k(n) &= y(n+k-1) = z_{k-1}(n+1). \end{aligned}$$

Dále označme $z(n) = (z_1(n), z_2(n), \ldots, z_k(n))$.
Tudíž,

$$\begin{aligned} z_1(n+1) &= z_2(n), \\ z_2(n+1) &= z_3(n), \\ &\vdots \\ z_{k-1}(n+1) &= z_k(n), \\ z_k(n+1) &= -p_k(n)z_1(n) - p_{k-1}(n)z_2(n) - \cdots - p_1(n)z_k(n) + g(n). \end{aligned}$$

Zapíšeme tuto soustavu jako

$$z(n+1) = A(n)z(n) + h(n), \tag{5.16}$$

kde

$$A(n) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -p_k(n) & -p_{k-1}(n) & -p_{k-2}(n) & \cdots & -p_1(n) \end{pmatrix}, \tag{5.17}$$

a

$$h(n) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ g(n) \end{pmatrix}.$$

Pokud $g(n) = 0$, dostáváme homogenní soustavu

$$z(n+1) = A(n)z(n). \tag{5.18}$$

Matice $A(n)$ je nazývána přidružená matice k rovnici (5.15).

Nyní uvažme homogenní rovnici k-tého řádu s konstantními koeficienty

$$x(n+k) + p_1 x(n+k-1) + p_2 x(n+k-2) + \cdots + p_k x(n) = 0,$$

která je ekvivalentní soustavě, kde A je matice definovaná ve vzorci (5.17):

$$z(n+1) = Az(n). \tag{5.19}$$

Casoratián rovnice (3.1) je $C(n) = \det \Phi(n)$, kde $\Phi(n)$ je fundamentální matice systému (5.19). Charakteristická rovnice matice A je

$$\lambda^k + p_1\lambda^{k-1} + p_2\lambda^{k-2} + \cdots + p_{k-1}\lambda + p_k = 0,$$

což odpovídá rovnici (3.2). Tudíž vlastní čísla matice A jsou kořeny charakteristické rovnice (3.1).

Literatura

[1] Agarwal, Ravi P.: *Differential Equations and Inequalities,* Marcel Dekker, Inc., 2nd ed. (2000).

[2] Agarwal, Ravi P.: *Difference Equations and Inequalities, Theory, Methods and Applications,* Second Edition, Revised and Expanded, Marcel Dekker, 2000.

[3] Agarwal, Ravi P., Bohner, M., Grace, S.R., Regan, D.O'.: *Discrete Oscillation Theory,* Hindawi Publishing Corporation, 2005.

[4] Baštinec, J., Diblík, J.: Asymptotic formulae for a particular solution of linear nonhomogeneous discrete equations, *Computers Math. Applic.*, **45** 1163–1169 (2003).

[5] Baštinec, J., Diblík, J.: One case of appearance of positive solutions of delayed discrete equations, *Appl. Math.*, **48** (2003), 429–436.

[6] Baštinec, J., Diblík, J.: Subdominant positive solutions of the discrete equation $\Delta u(k+ + n) = -p(k)u(k)$, *Abstr. Appl. Anal.* **2004:6** (2004), 461–470.

[7] Boichuk, A. , Růžičková, M.: Solutions bounded on the whole line for perturbed difference systems, *Proceedings of the Eight International Conference on Difference Equations, Chapman & Hall/CRC (Taylor & Francis Group, LLC),* 39–50 (2005).

[8] Boichuk, A., Růžičková, M.: Solutions of nonlinear difference equations bounded on the whole line, *Folia Fac. Sci. Natur. Univ. Masaryk. Brun.*, **13** (2002), 45–60.

[9] Chetaev, N.G.: *Dynamic Stability,* Moscow, Nauka, 1965. (Russian)

[10] Diblík, J.: Anti-Lyapunov method for systems of discrete equations, *Nonlinear Anal.* **57** (2004), 1043–1057.

[11] Diblík, J.: Asymptotic behaviour of solutions of systems of discrete equations via Liapunov type technique, *Computers Math. Applic.*, **45** 1041–1057 (2003).

[12] Diblík, J.: Discrete retract principle for systems of discrete equations, *Computers Math. Applic.*, **42** 515–528 (2001).

[13] Diblík, J., Khusainov, D. Ya.: Representation of solutions of discrete delayed system $x(k+1) = Ax(k) + Bx(k-m) + f(k)$ with commutative matrices, *J. Math. Anal. Appl.*, **318** (2006), No 1, 63–76.

[14] Diblík, J., Khusainov, D.: Representation of solutions of linear discrete systems with constant coefficients and pure delay, *Adv. Difference Equ.*, **2006**, Art. ID 80825, DOI 10.1155/ADE/2006/80825, 1–13. (doi:10.1155/ADE)

[15] DIBLÍK, J., KHUSAINOV, D. YA., GRYTSAY, I.V.: Stability investigation of nonlinear quadratic discrete dynamics systems in the critical case, *Journal of Physics: Conference Series,* **96** (1) (2008), art. no. 012042, 1–6.

[16] ELAYDI, SABER N.: *An Introduction to Difference Equations,* Springer, 1996.

[17] ELAYDI, SABER N.: *An Introduction to Difference Equations,* Second Edition, Springer, 1999.

[18] ELAYDI, SABER N.: *An Introduction to Difference Equations,* Third Edition, Springer, 2005.

[19] FARLOW, S.J.: *An Introduction to Differential Equations,* Mc Graw-Hill, Inc., 1994.

[20] GABASOV, R., KIRILLOVA, F.M.: *The Qualitative Theory of Optimal Control,* Marcel Dekker, Inc., 1976.

[21] GAJSHUN, I.V.: *Discrete Time Systems,* Minsk, Institut Matematiki NAN Belarusi, 2001. (Russian)

[22] GANTMACHER, F.P.: *The Theory of Matrices, Vol. I.,* AMS Chelsea Publishing, Providence, RI, 2002.

[23] GYÖRI, I., LADAS, G.: *Oscillation Theory of Delay Differential Equations,* Clarendon Press, 1991.

[24] HALANAY, A., RĂSVAN, V.: *Stability and Stable Oscillations in Discrete Time Systems,* Gordon and Breach Science Publishers, 2002.

[25] HALE, J.K., LUNEL, S.M.V.: *Introduction to Functional Differential Equations,* Springer-Verlag, 1993.

[26] KALMAN, R.E., FALB, P.L., ARBIB, M.A.: *Topics in Mathematical System Theory,* McGraw-Hill Book Co., 1969.

[27] KALMAN, R.E., BERTRAM, J.E.: Control system analysis and design via the second method of Liapunov: I. Continuous-time systems; II. Discrete-time systems, *Trans. ASME Ser. D. J. Basic Engrg.* ***82** (1960), 371–393, 394–400.*

[28] KHUSAINOV, D.YA. , SHUKLIN, G.V.: Linear autonomous time-delay system with permutation matrices solving, *Stud. Univ. Žilina Math. Ser.* **17** 101–108 (2003).

[29] KHUSAINOV, D.YA., BENDITKIS, D.B., DIBLÍK, J.: Weak delay in systems with an aftereffect, *Funct. Differ. Equ.* **9** (2002), 385-404.

[30] KIPNIS, M., KOMISSAROVA, D.: Stability of a delay difference system, *Adv. Difference Equ.*, **2006**, Art. No 31409, 2006, 1–8.

[31] KRASOVSKII, N.N.: *Theory of Control of Motion: Linear Systems,* Izdat. Nauka, Moscow, 1968. (Russian)

[32] LAKSHMIKANTHAM, V., TRIGIANTE, DONATO: *Theory of Difference Equations, Numerical Methods and Applications,* Second Edition, Marcel Dekker, 2002.

[33] LASALLE, J.P.: *The Stability and Control of Discrete Processes,* Applied Mathematical Sciences, Vol. 82, Springer-Verlag, New York, 1986.

[34] LIZ, E., PITUK, M.: Asymptotic estimates and exponential stability for higher-order monotone difference equations, *Adv. Difference Equ.*, **2004** 1–10.

[35] OGATA, K.: *Discrete-Time Control Systems,* Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1987.

[36] PHILOS, CH.G., PURNARAS, I.K.: An asymptotic result form some delay difference equations with continuous variable, *Adv. Difference Equ.*, **2004** 1–10.

[37] MALKIN, I.G.: *Theory of stability of motion*, Second revised edition, Moscow, Nauka, 1966. (Russian)

[38] MARTYNJUK, D.I.: *Lectures on the qualitative theory of difference equations*, "Naukova Dumka", Kiev, 1972. (Russian)

[39] MIGDA, M., MUSIELAK, A., SCHMEIDEL, E.:: On a class of fourth-order nonlinear difference equations, *Adv. Difference Equ.*, **2004** 23–36.

[40] LI, T.Y., YORKE, J.A.: Period three implies chaos, *Amer. Math. Monthly **82** (1975), 985–992.*

[41] PRÁGEROVÁ, A.: *Diferenční rovnice,* SNTL, 1971.

[42] SLYUSARCHUK, V.E.: Essentially unstable solutions of difference equations, (Russian), *Ukrain. Mat. Zh.* **51**, 1999, no 12, 1659–1672, translation in *Ukrainian Math. J.* **51**, 1999, no. 12, 1875–1891.

[43] SLYUSARCHUK, V.E.: Essentially unstable solutions of difference equations in a Banach space, (Russian), *Differ. Uravn.* **35**, 1999, no. 7, 982-989, translation in *Differential Equations* **35**, 1999, no. 7, 992–999.

[44] SLYUSARCHUK, V.E.: Theorems on the instability of systems with respect to linear approximation, (Russian), *Ukrain. Mat. Zh.* **48**, 1996, no. 8, 1104–1113, translation in *Ukrainian Math. J.* 48, 1996, no. 8, 1251–1262.

[45] WEISS, L.: Controllability, realization and stability of discrete-time systems, *SIAM J. Control **10** (1972), 230–251.*