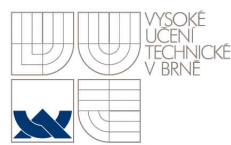


VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ V BRNĚ  
FAKULTA ELEKTROTECHNIKY A KOMUNIKAČNÍCH TECHNOLOGIÍ  
ÚSTAV MATEMATIKY

# Vybrané partie z matematiky I

(Elektrotechnika, elektronika, komunikační a řídicí technika)

**Irena Hlavičková**  
**Edita Kolářová**  
**Zdeněk Šmarda**



INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

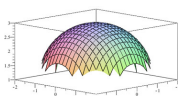
Ústav matematiky FEKT VUT v Brně, 2014

<http://www.umat.feec.vutbr.cz>

Animace a 3D objekty: Roman Plch



Součástí tohoto učebního textu jsou odkazy na tzv. maplety, tj. programy vytvořené v prostředí Maple. Tyto odkazy jsou v textu zvýrazněny barvou, příp. uvozeny slovem *maplet*. Maplety ke svému běhu nevyžadují software Maple – je však nutné mít na klientském počítači nainstalováno prostředí Java a nastavenou vhodnou úroveň zabezpečení prohlížeče i prostředí Java. Po kliknutí na odkaz mapletu se v závislosti na softwarovém prostředí klientského počítače zobrazí různá hlášení o zabezpečení – všechny dialogy je třeba povolit a spouštění požadovaných prvků neblokovat.



Součástí tohoto učebního textu jsou animace, resp. prvky 3D grafiky. Pro korektní zobrazení těchto multimediálních prvků a práci s nimi je nutné správně nastavit zabezpečení prohlížeče PDF souborů, a to zejména na záložkách typu *3D a multimédia*, *Důvěryhodnost multimedia (starší)*, *Multimédia (starší)*. Vlastnosti zobrazení těchto prvků lze ovlivnit pomocí položek jejich kontextového menu, příp. pomocí práce s myší nebo jiným polohovacím zařízením.



Doplňující součástí tohoto učebního textu jsou příklady zpracované v [elektronické bance příkladů](#).

# Obsah

<b>1</b>	<b>Některé pojmy z diferenciálního počtu funkce více proměnných</b>	<b>5</b>
1.1	Metrika, metrické prostory . . . . .	5
1.2	Zobrazení euklidovských prostorů . . . . .	12
1.3	Limita a spojitost funkce více proměnných . . . . .	20
1.4	Derivace ve směru, parciální derivace . . . . .	24
1.5	Diferenciály vyšších řádu. Taylorova věta . . . . .	33
1.6	Vektorová analýza . . . . .	35
	Cvičení . . . . .	38
	Výsledky . . . . .	40
<b>2</b>	<b>Extrémy funkce více proměnných</b>	<b>42</b>
2.1	Lokální extrémy funkce více proměnných . . . . .	42
	2.1.1 Nutná podmínka pro extrém . . . . .	42
	2.1.2 Postačující podmínka pro extrém . . . . .	42
2.2	Vázané extrémy . . . . .	44
2.3	Absolutní extrémy . . . . .	47
	Cvičení . . . . .	51
	Výsledky . . . . .	52
<b>3</b>	<b>Integrální počet funkcí více proměnných</b>	<b>54</b>
3.1	Pojem n-rozměrného integrálu v $\mathbb{R}^n$ . . . . .	54
3.2	Geometrická interpretace dvojného integrálu . . . . .	57
3.3	Fyzikální interpretace trojného integrálu . . . . .	58
3.4	Výpočet n-rozměrného integrálu postupnou integrací . . . . .	58
3.5	Měřitelné množiny, elementární oblasti . . . . .	62
3.6	Integrály na měřitelných množinách . . . . .	66
3.7	Transformace integrálů . . . . .	68
	3.7.1 Polární souřadnice . . . . .	69
	3.7.2 Cylindrické souřadnice . . . . .	70
	3.7.3 Sférické souřadnice . . . . .	71
3.8	Aplikace integrálů . . . . .	72
	Cvičení . . . . .	75
	Výsledky . . . . .	77

---

<b>4</b>	<b>Křivkový integrál</b>	<b>79</b>
4.1	Křivky v $\mathbb{R}^n$ . . . . .	79
4.2	Neorientovaný křivkový integrál v $\mathbb{R}^n$ . . . . .	86
4.3	Orientovaný křivkový integrál . . . . .	89
4.4	Nezávislost orientovaného křivkového integrálu na cestě . . . . .	96
4.5	Greenova věta . . . . .	101
4.6	Aplikace křivkového integrálu . . . . .	103
	Cvičení . . . . .	104
	Výsledky . . . . .	106
<b>5</b>	<b>Plošný integrál</b>	<b>108</b>
5.1	Plochy v $\mathbb{R}^3$ . . . . .	108
5.2	Orientovaný plošný integrál . . . . .	121
5.3	Integrální věty . . . . .	132
5.4	Aplikace plošného integrálu . . . . .	139
	Cvičení . . . . .	141
	Výsledky . . . . .	142
	<b>Literatura</b>	<b>144</b>

## Předmluva

Učební text Vybrané partie z matematiky I. vznikl inovací učebního textu Vybrané partie z matematiky autorů doc. RNDr. Zdeňka Šmardy, CSc. a Mgr. Ireny Růžičkové (viz. <http://matika.umat.feec.vutbr.cz/inovace/pred.php>) z roku 2005. Na základě analýzy potřeb oborových ústavů Fakulty elektrotechniky a komunikačních technologií (FEKT) VUT v Brně v oblasti aplikované matematiky bylo v roce 2010 doporučeno Radou studijních programů FEKT vytvořit z původního semestrálního předmětu dva navazující semestrální předměty Vybrané partie z matematiky I. a Vybrané partie z matematiky II., které by obsahovaly požadované nové tématické celky z oblasti aplikované matematiky.

Oproti původnímu textu je v učebním textu Vybrané partie z matematiky I. vynesena teorie vícerozměrného nevlastního integrálu a teorie systémů diferenciálních rovnic a jejich stability. Inovace učebního textu především spočívá v rozšíření diferenciálního počtu funkce více proměnných se zaměřením na limitu, spojitost a derivaci zobrazení včetně nového tématického celku zaměřeného na lokální, vázané a absolutní extrémy funkce více proměnných. Všechny kapitoly věnované vícerozměrnému integrálu, křivkovému a plošnému integrálu byly doplněny o aplikace v elektroinženýrských oborech. Ke každé kapitole byly rovněž vytvořeny maplety, které umožňují studentům generovat různé varianty příkladů s názorným řešením a případně i grafickým výstupem.

31. 3. 2014

Autoři

## Úvod

Tento učební text by měl sloužit především posluchačům bakalářského studia FEKT VUT, kteří uvažují pokračovat v navazujícím magisterském studiu. Vzhledem k redukci počtu hodin matematiky v bakalářském směru bylo nutné vypustit některé tématické celky, které byly součástí výuky v 1. a 2. ročníku dřívějšího pětiletého magisterského studia a které jsou nutné k pochopení matematických předmětů i aplikací v navazujícím magisterském studiu.

Cílem tohoto textu je tedy vytvoření kontinuity matematických znalostí absolventů bakalářského studia při přechodu na navazující magisterské studium. Jeho obsahem je výklad integrálního počtu funkce více proměnných, křivkového a plošného integrálu, systémů zejména lineárních diferenciálních rovnic s ohledem na kvalitativní metody řešení a stability řešení. Jde o standartní součást matematické analýzy, která má velký význam v aplikacích.

Zvládnutí této látky je poměrně obtížné, protože vyžaduje znalost zejména diferenciálního počtu funkce více proměnných a základních pojmů lineární algebry, což je náplní zejména I. kapitoly. Další obtíž spočívá v tom, že je nutné zavést pojem „ $n$ -rozměrného integrálu“ a následně pojmů křivka, plocha, křivkový a plošný integrál. Přestože jde o intuitivně jasné pojmy, jejich matematická definice je poměrně komplikovaná. Pro potřeby inženýrského studia je nutné udělat kompromis mezi obecností, matematickou přesností a názorností výkladu.

Výklad nových důležitých pojmů obvykle motivujeme a doprovázíme ilustrujícím příkladem. Kromě toho je v textu zařazena řada řešených i neřešených příkladů, často i s aplikačním charakterem. Jejich počet je dostatečný k osvojení látky i samostatnému studiu.

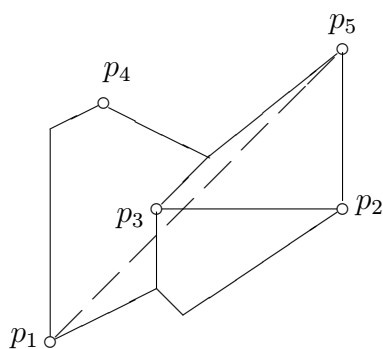
# 1 Některé pojmy z diferenciálního počtu funkce více proměnných

## 1.1 Metrika, metrické prostory

Pojmem metriky na dané množině chceme vystihnout co nejobecněji pojem vzdálenosti objektů, které dané množině náleží. Měření vzdáleností objektů je vyvoláno potřebami praxe. Vzdáleností dvou bodů  $p, q$  na přímce, v rovině, resp. v prostoru se zpravidla rozumí tzv. euklidovská vzdálenost. Vzdálenost bodů je však relativní pojem. Demonstrujeme to na tomto příkladě:

**Příklad 1.1.** Mějme v rovině nějakou množinu bodů  $M$  (pro jednoduchost konečnou) a dále nechť je dán systém  $\mathcal{L}$  lomených čar takových, že každé dva body  $p_i, p_j \in M$  lze spojit aspoň jednou lomenou čarou  $L \in \mathcal{L}$  (viz obrázek).

**Řešení.** Nechť body  $p_1, p_2, \dots \in M$  představují obce a lomené čáry představují cesty.



Pro zeměměřiče je pojem vzdálenosti dvou obcí jasný, je to „nejkratší“ vzdálenost těchto obcí, tedy pro malou část zemského povrchu v podstatě euklidovská vzdálenost (např. vzdálenost „obcí“  $p_1, p_5$  je vyznačena na obrázku přerušovanou čarou. Pro cestovatele, který se chce z jedné obce dostat do jiné a používá k tomu pouze existujících cest, je však euklidovská vzdálenost zbytečná. Z jeho hlediska je užitečnější charakterizovat vzdálenost patrně takto:

Vzdálenost bodů  $p_i, p_j$  je délka nejkratší lomené čáry ze systému  $\mathcal{L}$ , která tyto body spojuje.  $\square$

Hovořili jsme zatím o vzdálenosti geometrických bodů. S rozvojem vědy a techniky se ukazuje, že je třeba se dívat na pojem vzdálenosti z obecnějšího hlediska v tom smyslu, že je zapotřebí kvantitativně vystihnout „vzdálenost“ nebo, jak se také někdy říká, „odchylku“ i jiných objektů, než jsou geometrické body. Uvedme následující příklad:

Pomocí některého fyzikálního systému (např. elektrického obvodu) chceme generovat signál (z matematického hlediska funkci časové proměnné), který by měl žádaný tvar. Zpravidla se nám nepodaří vytvořit z daných prvků systém tak, aby generoval žádaný

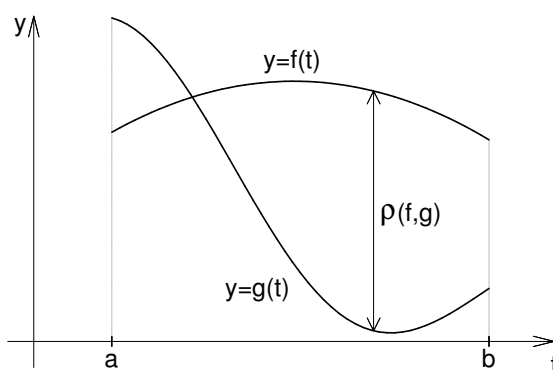


signál. Zde si můžeme položit zjednodušený problém: sestrojít takový systém, který by vytvářel signál, jenž by se od žádaného v jistém smyslu do nejméně odchyloval. Vidíme, že je tedy účelné zavést pojem vzdálenosti i pro funkce.

Někdy potřebujeme charakterizovat odchylku dvou signálů  $f, g$  z hlediska jejich hodnot v jednotlivých časových okamžicích  $t \in \langle a, b \rangle$ . V tomto případě je přirozené vzít v úvahu absolutní hodnoty všech možných rozdílů funkčních hodnot:  $|f(t) - g(t)|$  a jako odchylku dvou signálů vzít maximum z těchto čísel (viz obr. 1.1), tj. definovat odchylku (vzdálenost) signálů  $f, g$  vztahem

$$\rho(f, g) = \max_{t \in \langle a, b \rangle} |f(t) - g(t)|$$

Taková odchylka („vzdálenost“) funkcí se nazývá *stejněměrná*.



Obr. 1.1: Stejněměrná odchylka (vzdálenost)

Chceme-li však posoudit, jak se liší dva signály  $f, g$  z hlediska energetického, pak je účelnější definovat odchylku („vzdálenost“) signálů  $f, g$  vztahem

$$\sigma(f, g) = \sqrt{\int_a^b (f(t) - g(t))^2 dt}.$$

(Tato tzv. *středně kvadratická* odchylka nemá ovšem tak názorný geometrický význam jako stejněměrná odchylka.)

Chceme-li definovat pojem vzdálenosti (metriky) prvků („bodů“) v libovolné množině, je přirozené vycházet z určitých obecných charakteristických vlastností, které má vzdálenost chápaná intuitivně:

- Je přirozené požadovat, aby vzdálenost dvou různých bodů byla kladné reálné číslo a vzdálenost bodu od sebe samého byla rovna nule.
- Stejně přirozený je požadavek, aby vzdálenost měřená od bodu  $p$  k bodu  $q$  byla stejná jako vzdálenost měřená od bodu  $q$  k bodu  $p$ .
- Konečně je rozumné, aby v definici metriky figuroval ještě požadavek, který by vystihoval tu skutečnost, že vzdálenost bodu  $p$  od bodu  $q$  se nemůže zmenšit tím, že bychom ji měřili „oklikou“ přes bod  $r$ . Tento požadavek je znám z elementární geometrie, kde se vyskytuje v této podobě: Součet délek dvou stran v trojúhelníku není nikdy menší než délka třetí strany (tzv. trojúhelníková nerovnost).

Po tomto úvodu k problematice metriky můžeme vyslovit definici, kde budou matematicky formulovány zmíněné požadavky kladené na vzdálenost.

**Definice 1.2.** Řekneme, že  $\rho$  je *metrika* na množině  $P$ , jestliže každé uspořádané dvojici  $(p, q)$  bodů z  $P$  je přiřazeno právě jedno reálné číslo  $\rho(p, q)$  (tj.  $\rho$  je reálná funkce na  $P \times P$ ) tak, že pro libovolné body  $p, q, r \in P$  platí:

$$(M1) \quad \rho(p, q) > 0, \text{ je-li } p \neq q; \rho(p, p) = 0 - \text{pozitivnost metriky}$$

$$(M2) \quad \rho(p, q) = \rho(q, p) - \text{symetrie metriky}$$

$$(M3) \quad \rho(p, q) \leq \rho(p, r) + \rho(r, q) - \text{trojúhelníková nerovnost.}$$

Množinu  $P$  spolu s metrikou  $\rho$  nazýváme *metrickým prostorem*, jež označujeme  $(P, \rho)$ . Prvky množiny  $P$  nazýváme *body metrického prostoru*  $(P, \rho)$ ; číslo  $\rho(p, q)$  nazýváme *vzdáleností* (někdy též *odchylkou*) bodů  $p, q$ .

V téže množině  $P$  může být definováno několik metrik  $\rho, \sigma, \tau, \dots$ . Pak je třeba rozlišovat příslušné metrické prostory  $(P, \rho), (P, \sigma), (P, \tau), \dots$ .

### Příklady metrických prostorů

- *Reálná osa*  $\mathbb{R}$ . V množině všech reálných čísel definujeme metriku  $\rho$  předpisem

$$\rho(x, y) = |x - y|, \quad x, y \in \mathbb{R}.$$

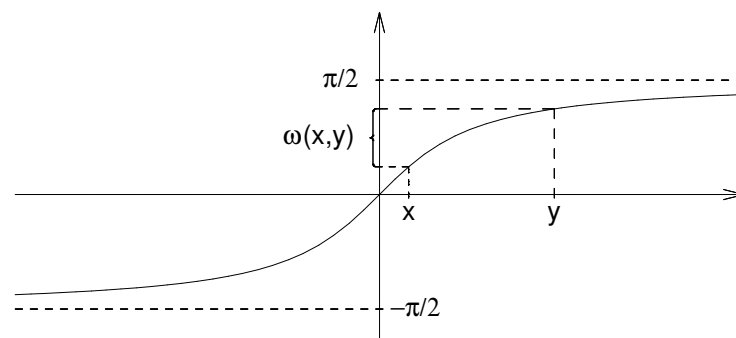
Je zřejmé, že  $\rho$  má vlastnosti (M1), (M2), (M3).

- *Rozšířená reálná osa*  $\mathbb{R}^*$ . V množině  $\mathbb{R}^* = \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$  definujeme metriku  $\omega$  předpisem

$$\omega(x, y) = |\arctg x - \arctg y|, \quad x, y \in \mathbb{R}^*,$$

kde  $\arctg(+\infty) = \lim_{x \rightarrow \infty} \arctg x = \frac{\pi}{2}$ ,  $\arctg(-\infty) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \arctg x = -\frac{\pi}{2}$ .

Podmínky (M1), (M2), (M3) jsou opět splněny. Vzdálenost  $\omega(x, y)$  je patrná z obrázku (1.2).

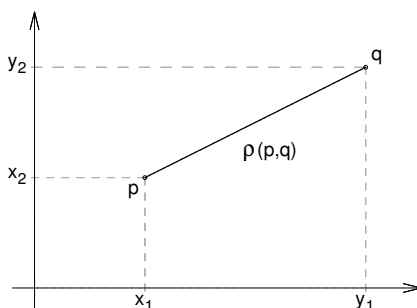


Obr. 1.2: Metrika v  $\mathbb{R}^*$ .

- *Aritmetický  $n$ -rozměrný euklidovský prostor.* Je to množina  $\mathbb{R}^n$  (množina uspořádaných  $n$ -tic reálných čísel) s metrikou  $\rho$  definovanou předpisem:  
Nechť  $p, q \in \mathbb{R}^n$ ,  $p = (x_1, \dots, x_n)$ ,  $q = (y_1, \dots, y_n)$ , pak

$$\rho(p, q) = \sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2}. \quad (1.1)$$

Metrika  $\rho$  definovaná vztahem (1.1) se nazývá *euklidovská metrika*.  
Vzdálenost  $\rho$  je v případě  $n = 2$  znázorněna na obrázku.



Místo euklidovské metriky je někdy snazší pracovat s těmito metrikami:

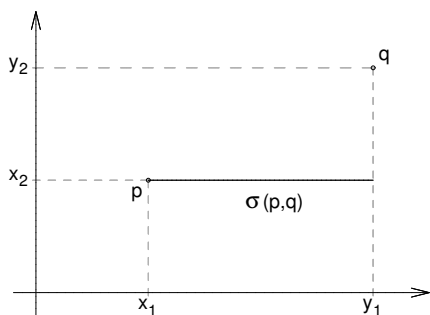
$$\sigma(x, y) = \max\{|x_1 - y_1|, \dots, |x_n - y_n|\} \quad (1.2)$$

(tzv. *kubická metrika*)

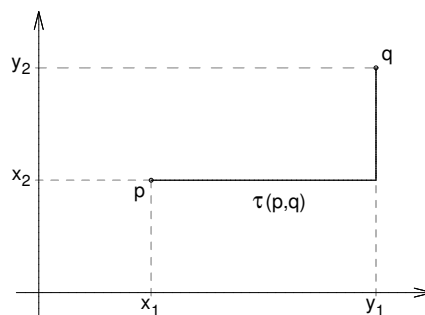
$$\tau(x, y) = \sum_{i=1}^n |x_i - y_i| \quad (1.3)$$

(tzv. *oktaedrická metrika*).

Vzdálenosti  $\sigma$  a  $\tau$  jsou v případě  $n = 2$  znázorněny na obrázcích.



Obr. 1.3: Kubická metrika



Obr. 1.4: Oktaedrická metrika

- Na množině  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$  definujeme

$$\alpha(x, y) = \sin^2(x - y).$$

Položme například  $x = 4\pi, y = 2\pi$ , pak  $\alpha(x, y) = \sin^2(4\pi - 2\pi) = 0$ , tedy pro  $x \neq y$  platí  $\alpha(x, y) = 0$ , což je spor s podmínkou (M1). Zobrazení  $\alpha$  není metrikou na  $\mathbb{R}$ .

Vztahy mezi body a množinami v  $\mathbb{R}^n$  či v jiném metrickém prostoru můžeme charakterizovat pomocí metriky. Někdy je však účelnější (a i názornější) je charakterizovat pomocí okolí bodu. Pojmy, které definujeme pomocí okolí, se nazývají zpravidla *topologické pojmy*.

S okolím bodu v  $\mathbb{R}$  jste se seznámili v kurzu BMA1. Okolím bodu  $a \in \mathbb{R}$  byl každý otevřený interval  $(a - r, a + r), r > 0$ .

Lze také psát

$$(a - r, a + r) = \{x \in \mathbb{R} : \rho(x, a) < r\},$$

kde  $\rho(x, y) = |x - y|$ . Vidíme, že okolí lze vyjádřit pomocí metriky.

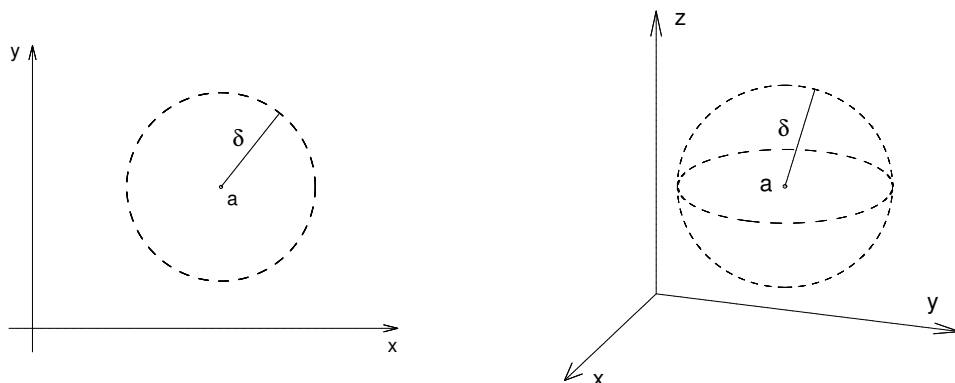
Budeme nyní definovat okolí na metrickém prostoru  $(\mathbb{R}^n, \rho)$ .

**Definice 1.3.** Okolím bodu  $a \in \mathbb{R}^n$  budeme rozumět množinu

$$U_\delta(a) := \{p \in \mathbb{R}^n : \rho(a, p) < \delta\}.$$

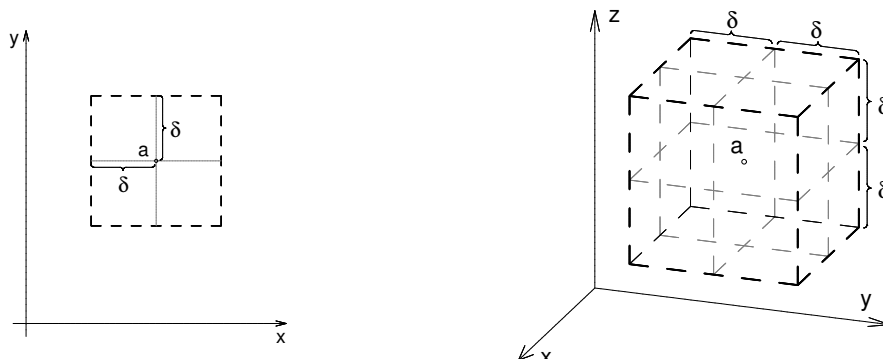
$$(P_\delta(a) = U_\delta \setminus \{a\} \quad - \text{ se nazývá redukované okolí})$$

V  $\mathbb{R}^2$  je okolím bodu otevřený kruh se středem v bodě  $a$  a poloměrem  $\delta$ , v  $\mathbb{R}^3$  je okolím bodu otevřená koule, viz obrázky.

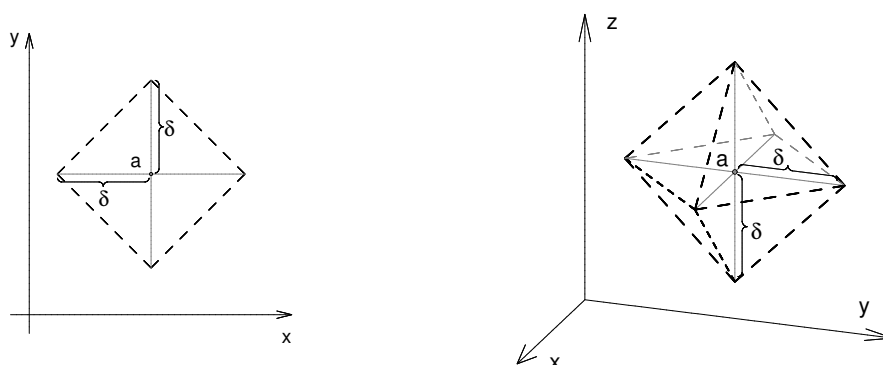


Tato okolí se nazývají *sférická okolí* v  $\mathbb{R}^n$ .

Použijeme-li kubickou metriku  $\sigma$ , ostaneme pro  $n = 2$  otevřený čtverec se středem v bodě  $a$ , pro  $n = 3$  otevřenou krychli se středem v bodě  $a$ , viz obrázky.



Okolím  $U_\delta(a)$  při oktaedrické metrice je v  $\mathbb{R}^2$  otevřený čtverec se středem v bodě  $a$  s úhlopříčkami rovnoběžnými se souřadnicovými osami, v  $\mathbb{R}^3$  je to pravidelný otevřený osmistěn (oktaedr), viz obrázky.



V následujících úvahách budeme uvažovat prostor  $(\mathbb{R}^n, \rho)$  a zkráceně ho budeme označovat  $\mathbb{R}^n$ .

Pomocí pojmu okolí budeme definovat základní topologické pojmy v  $\mathbb{R}^n$ .

**Definice 1.4.** Nechtě  $M \subset \mathbb{R}^n$ ,  $a \in \mathbb{R}^n$ :

1. Bod  $a$  nazveme *vnitřním bodem* množiny  $M$ , existuje-li okolí  $U(a) \subset M$ . Množina všech vnitřních bodů množiny  $M$  se nazývá *vnitřek* množiny  $M$  a značí se  $M^0$ .
2. Bod  $a$  nazveme *hraničním bodem* množiny  $M$ , jestliže pro každé okolí  $U(a)$  platí:

$$U(a) \cap M \neq \emptyset \quad \wedge \quad U(a) \cap \mathbb{R}^n \setminus M \neq \emptyset.$$

Množinu všech hraničních bodů množiny  $M$  nazveme *hranicí* množiny  $M$  a značíme  $hM$ .

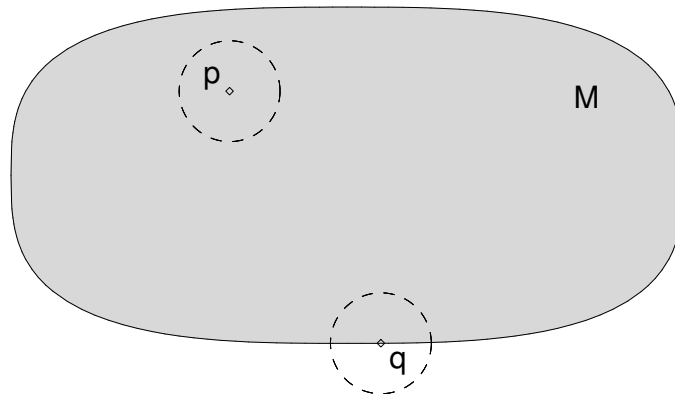
3. Bod  $a$  nazveme *bodem uzávěru* množiny  $M$ , jestliže každé okolí  $U(a)$  má s  $M$  neprázdný průnik. Množinu všech bodů uzávěru množiny  $M$  nazveme *uzávěrem* množiny  $M$  a značíme  $\bar{M}$ .
4. Množinu  $M$  nazveme *otevřenou* v  $\mathbb{R}^n$ , platí-li  $M = M^0$ .

5. Množinu  $M$  nazveme *uzavřenou* v  $\mathbb{R}^n$ , platí-li  $M = \overline{M}$ .
6. Množinu  $M$  nazveme *ohraničenou* v  $\mathbb{R}^n$ , existuje-li  $k > 0$  tak, že pro libovolné body  $p, q \in M$  platí  $\rho(p, q) < k$ .
7. Řekneme, že body  $a, b \in M$  lze spojit *cestou* ležící v  $M$ , existuje-li spojitě zobrazení  $\varphi : \langle \alpha, \beta \rangle \rightarrow \mathbb{R}^n$  takové, že  $\varphi(\alpha) = a$ ,  $\varphi(\beta) = b$  a  $\varphi(\langle \alpha, \beta \rangle) \subset M$ .  
Neprázdnou množinu  $M$  nazveme pak *souvislou*, jestliže libovolné její body  $a, b$  lze spojit cestou ležící v  $M$ .
8. Otevřenou souvislou množinu  $M$  nazveme *oblastí*.
9. Uzavřenou souvislou množinu  $M$  nazveme *uzavřenou oblastí*.
10. Uzavřenou, omezenou množinu  $M$  nazveme *kompaktní množinou*.

**Poznámka 1.5.** Z definic je zřejmé, že  $M^0 \subset M$ ,  $M^0 = M - hM$ ,  $\overline{M} = M \cup hM$ .

**Věta 1.6.** i) Množina  $M$  je uzavřená, právě když obsahuje svoji hranici, tj.  $hM \subset M$ .  
ii)  $M$  je otevřená, právě když nemá společné body se svou hranicí, tj.  $M \cap hM = \emptyset$ .  
iii) Množina  $M$  je uzavřená (otevřená), právě když je její doplněk  $\mathbb{R}^n \setminus M$  otevřená (uzavřená) množina.

Na obrázku 1.5 je bod  $p$  vnitřním bodem a současně i bodem uzávěru množiny  $M$ , bod  $q$  je hraničním bodem a současně i bodem uzávěru množiny  $M$ .



Obr. 1.5: Příklad vnitřního a hraničního bodu množiny.

**Příklad 1.7.** Zjistěte, které z množin

- 1)  $M_1 = \langle -2, 3 \rangle$
- 2)  $M_2 = \langle 2, 4 \rangle$
- 3)  $M_3 = (4, 6)$
- 4)  $M_4 = \{8\}$
- 5)  $M_5 = \mathbb{R}^1$

jsou otevřené, uzavřené v  $\mathbb{R}^1$  a stanovte jejich hranici.

**Řešení.** 1)  $hM = \{-2, 3\}$ , přičemž body  $-2, 3 \in M_1$ . Dále  $\overline{M_1} = M_1 \cup hM_1 = \langle -2, 3 \rangle = M_1 \Rightarrow$  Množina je uzavřená (uzavřený interval).

2)  $hM_2 = \{2, 4\}$ , přičemž  $2 \in M_2, 4 \notin M_2$ , tedy  $M_2$  neobsahuje všechny své hraniční body, a tudíž není uzavřenou množinou. Jelikož bod  $2 \in M_2$  nepatří do  $M_2^0$  (tj. není vnitřním bodem  $M_2$ ), tak  $M_2 \neq M_2^0$ , z čehož plyne, že  $M_2$  není otevřená množina.

3)  $hM_3 = \{4, 6\}$ ,  $4, 6 \notin M_3$ , pak  $\overline{M_3} = M_3 \cup hM_3 = \langle 4, 6 \rangle \neq M_3 = (4, 6)$ , a tedy  $M_3$  není uzavřená množina. Jelikož každý bod množiny  $M_3$  je vnitřní, tj.  $M_3 = M_3^0$ , tak  $M_3$  je otevřená množina.

4) Jelikož každé okolí bodu 8 má neprázdný průnik s  $M_4$ , neboť  $U_\delta(8) \cap M_4 = \{8\}$  pro libovolné  $\delta > 0$ , tak 8 je bod uzávěru množiny  $M_4$ , tedy  $\overline{M_4} = M_4 \Rightarrow M_4$  je uzavřená množina.

5) Jelikož vnitřek prázdné množiny je prázdná množina, tj.  $\text{Int } \emptyset = \emptyset$ , tak  $\emptyset$  je otevřená množina a komplement, tj.  $\mathbb{R}^1 \setminus \emptyset = \mathbb{R}^1$ , je podle věty (1.6) uzavřená množina.

Jelikož každý bod  $\mathbb{R}^1$  je vnitřním bodem, tak  $\text{Int } \mathbb{R}^1 = \mathbb{R}^1$ , tj.  $\mathbb{R}^1$  je otevřená množina, a tedy komplement  $\mathbb{R}^1 \setminus \mathbb{R}^1 = \emptyset$  je podle věty (1.6) uzavřená množina.

Tedy  $\emptyset, \mathbb{R}^1$ , a tudíž i  $\mathbb{R}^n$ , jsou jak otevřené, tak i uzavřené množiny.  $\square$

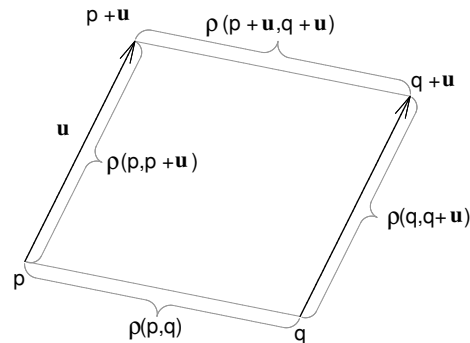
## 1.2 Zobrazení euklidovských prostorů

Důležitá bude pro nás ta skutečnost, že lze v  $\mathbb{R}^n$  přirozeným způsobem zavést pojem vektoru. Představa vektoru v  $\mathbb{R}^n$  je spjata s *posunutím* (translací). Tento pojem je znám z elementární geometrie i z fyziky. Víme, že posunutí je jisté zobrazení, které je určeno *velikostí* a *směrem* a lze tudíž vektor interpretovat jako posunutí. Jeví se tedy přirozená tato definice:

**Definice 1.8.** *Vektorem  $\mathbf{u}$  v  $\mathbb{R}^n$  budeme rozumět zobrazení, které každému bodu  $p \in \mathbb{R}^n$  přiřazuje právě jeden bod z  $\mathbb{R}^n$ , který označíme  $p + \mathbf{u}$  (jde pouze o jinou formu zápisu - při zobrazení zpravidla používáme pro obraz zápisu  $\mathbf{u}(p)$ ) tak, že platí pro každé dva body  $p, q \in \mathbb{R}^n$ :*

$$\begin{aligned} \rho(p, p + \mathbf{u}) &= \rho(q, q + \mathbf{u}) \\ \rho(p, q) &= \rho(p + \mathbf{u}, q + \mathbf{u}). \end{aligned} \quad (1.4)$$

(Viz obrázek.)



Označme souřadnice bodů  $p, q, p + \mathbf{u}, q + \mathbf{u}$  takto:

$$\begin{aligned} p &= (x_1, \dots, x_n), & q &= (y_1, \dots, y_n), \\ p + \mathbf{u} &= (x'_1, \dots, x'_n), & q + \mathbf{u} &= (y'_1, \dots, y'_n). \end{aligned}$$

Lze ukázat, že platí  $x'_i - x_i = y'_i - y_i$ ,  $i = 1, \dots, n$ .

Říkáme, že vektor  $\mathbf{u}$  má *souřadnice*  $u_1, \dots, u_n$ , kde

$$u_i = x'_i - x_i (= y'_i - y_i), \quad i = 1, \dots, n$$

a vektor  $\mathbf{u}$  budeme zapisovat takto

$$\mathbf{u} = [u_1, \dots, u_n].$$

Říkáme, že bod  $p' = p + \mathbf{u}$  je posunutím bodu  $p$  o vektor  $\mathbf{u}$  (nebo též, že jsme jej dostali „přičtením“ vektoru  $\mathbf{u}$  k bodu  $p$ ). Je-li  $p' = p + \mathbf{u}$ , pak píšeme též

$$\mathbf{u} = p' - p$$

a říkáme, že vektor  $\mathbf{u}$  je „rozdílem“ bodů  $p', p$  (v tomto pořadí).

Každému vektoru je tedy přiřazena  $n$ -tice jeho souřadnic. Je-li naopak  $[u_1, \dots, u_n]$   $n$ -tice reálných čísel, pak zobrazení  $(x_1, \dots, x_n) \mapsto (x_1 + u_1, \dots, x_n + u_n)$  je translace, tj. má vlastnosti (1.4) a určuje tedy vektor  $\mathbf{u}$  o souřadnicích  $[u_1, \dots, u_n]$ .

**Definice 1.9.** Množinu všech vektorů prostoru  $\mathbb{R}^n$  označíme  $V(\mathbb{R}^n)$  a nazveme ji *vektorovým prostorem* prostoru  $\mathbb{R}^n$  (také se používá termínu *vektorové zaměření* prostoru  $\mathbb{R}^n$ ).

Nechť  $A \subset \mathbb{R}^n$  a  $\mathbf{f}$  je zobrazení  $A$  do prostoru  $\mathbb{R}^m$ ,  $\mathbf{f} : A \rightarrow \mathbb{R}^m$ . Je-li  $m = n$ , můžeme si takové zobrazení představit jako přemísťování bodů v  $n$ -rozměrném prostoru (pro  $n = 2$  v rovině). Například zobrazení z  $\mathbb{R}^3$  do  $\mathbb{R}^3$  si můžeme představit jako deformaci hmotného tělesa, kdy jednotlivé body mění při tomto procesu svou polohu. Některá zobrazení z  $\mathbb{R}^n$  ( $n = 2, 3$ ) nám později poslouží pro popis křivek v rovině či prostoru; některá zobrazení z  $\mathbb{R}^2$  do  $\mathbb{R}^3$  nám zase poslouží pro popis ploch v prostoru. Přestože budeme studovat převážně reálné funkce, přece se v některých situacích bez zobrazení neobejdeme.

**Definice 1.10.** Zobrazení  $\mathbf{f} : A \rightarrow \mathbb{R}^m$  přiřazuje bodu  $p = (x_1, \dots, x_n) \in A$  bod  $q = (y_1, \dots, y_m) \in \mathbb{R}^m$ , tedy

$$\mathbf{f}(x_1, \dots, x_n) = (y_1, \dots, y_m). \quad (1.5)$$

Každá souřadnice  $y_i$  ( $i = 1, \dots, m$ ) je při daném zobrazení  $\mathbf{f}$  jednoznačně určena  $n$ -ticí  $(x_1, \dots, x_n)$ . Existují tedy funkce  $f_i : A \rightarrow \mathbb{R}$  tak, že  $y_i = f_i(x_1, \dots, x_n)$ . Tyto funkce dostaneme takto: Označme  $\pi_i : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$   $i$ -tou projekcí, tj.  $\pi_i(y_1, \dots, y_m) = y_i$ . Je tedy

$$\pi_i(\mathbf{f}(x_1, \dots, x_n)) = \pi_i(y_1, \dots, y_m) = y_i,$$

takže  $f_i = \pi_i \circ \mathbf{f}$  ( $i = 1, 2, \dots, m$ ). Zobrazení  $\mathbf{f}$  je tedy určeno uspořádanou  $m$ -ticí funkcí  $(f_1, \dots, f_m)$ , píšeme

$$\mathbf{f} = (f_1, \dots, f_m).$$



Funkce  $f_i$  se nazývají *složky* (komponenty nebo souřadnice) zobrazení  $\mathbf{f}$ . Vztah (1.5) lze pak pomocí složek  $f_i$  vyjádřit také takto

$$\begin{aligned} y_1 &= f_1(x_1, \dots, x_n), \\ &\vdots \\ y_m &= f_m(x_1, \dots, x_n). \end{aligned} \tag{1.6}$$

Rovnice (1.6) se nazývají *definujícími rovnicemi* zobrazení  $\mathbf{f}$ .

Uvedme příklady zobrazení z  $\mathbb{R}^2$  do  $\mathbb{R}^3$ , která budou mít význam v kapitolách více-rozměrného integrálu a plošného integrálu.

**Příklad 1.11.** Nechtě  $M \subset \mathbb{R}^2$ ,  $\mathbf{f} = (f_1, f_2, f_3) : M \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,  $M = \langle 0, 2\pi \rangle \times \langle 0, \pi \rangle$ ,

$$\mathbf{f}(u, v) = (R \cos u \sin v, R \sin u \sin v, R \cos v), \quad R > 0.$$

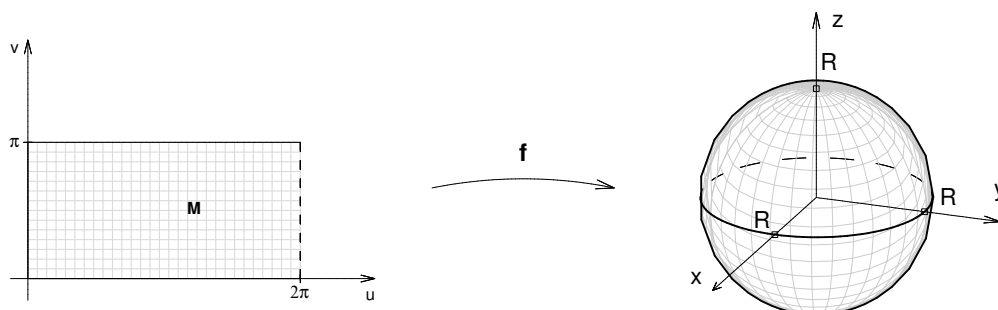
Je tedy  $u \in \langle 0, 2\pi \rangle$ ,  $v \in \langle 0, \pi \rangle$ . Definující rovnice zobrazení  $\mathbf{f}$  můžeme napsat ve tvaru

$$\begin{aligned} x &= f_1(u, v) = R \cos u \sin v \\ y &= f_2(u, v) = R \sin u \sin v \\ z &= f_3(u, v) = R \cos v \end{aligned} \quad (u, v) \in M.$$

$$\begin{aligned} \text{Odtud } x^2 + y^2 + z^2 &= R^2 \cos^2 u \sin^2 v + R^2 \sin^2 u \sin^2 v + R^2 \cos^2 v = \\ &= R^2 \sin^2 v (\cos^2 u + \sin^2 u) + R^2 \cos^2 v = R^2. \end{aligned}$$

Tedy  $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ ,

což je implicitní rovnice *kulové plochy* o poloměru  $R$  se středem v počátku. Geometrický význam daného zobrazení je na obrázku (1.6).



Obr. 1.6: Kulová plocha

**Příklad 1.12.** Nechť  $M \subset \mathbb{R}^2$ ,  $\mathbf{f} = (f_1, f_2, f_3) : M \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,  $M = \langle 0, 2\pi \rangle \times \langle 0, \pi \rangle$ ,

$$\mathbf{f}(u, v) = (a \cos u \sin v, b \sin u \sin v, c \cos v),$$

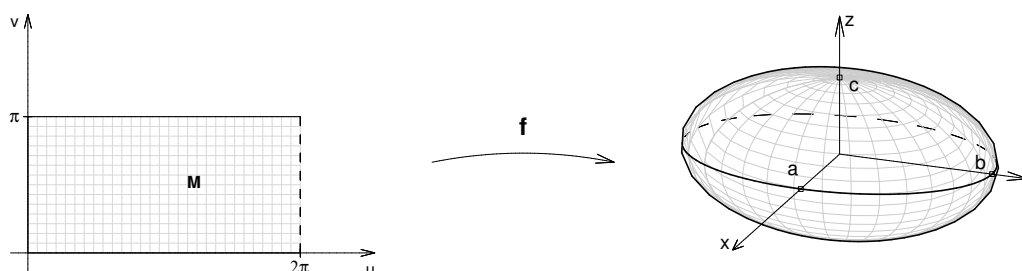
kde  $a, b, c$  jsou obecně navzájem různé kladné konstanty.

Je tedy opět  $u \in \langle 0, 2\pi \rangle$ ,  $v \in \langle 0, \pi \rangle$  a platí

$$\begin{aligned} x &= a \cos u \sin v \\ y &= b \sin u \sin v \\ z &= c \cos v \end{aligned} \quad (u, v) \in M.$$

Odtud  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = \cos^2 u \sin^2 v + \sin^2 u \sin^2 v + \cos^2 v = 1$ ,

což je implicitní rovnice *trojosého elipsoidu*, který v případě  $a = b$  přechází v *rotační elipsoid* s osou  $z$  (podobně i pro  $a = c$  s osou  $y$ ,  $b = c$  s osou  $x$ ). V případě  $a = b = c$  pak v kulovou plochu (sféru). Geometrický význam zobrazení  $\mathbf{f}$  je na obrázku (1.7).



Obr. 1.7: Trojosý elipsoid

**Příklad 1.13.** Nechť  $M \subset \mathbb{R}^2$ ,  $\mathbf{f} = (f_1, f_2, f_3) : M \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,  $M = \langle 0, \infty \rangle \times \langle 0, 2\pi \rangle$ ,

$$\mathbf{f}(u, v) = (au \cos v, bu \sin v, u^2),$$

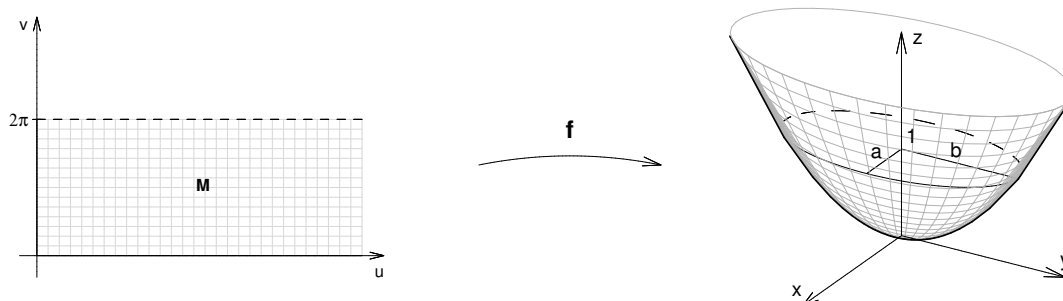
kde  $a, b$  jsou obecně navzájem různé kladné konstanty. Tedy  $u \in \langle 0, \infty \rangle$ ,  $v \in \langle 0, 2\pi \rangle$  a

$$\begin{aligned} x &= au \cos v \\ y &= bu \sin v \\ z &= u^2 \end{aligned} \quad (u, v) \in M.$$

Odtud  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = u^2 \cos^2 v + u^2 \sin^2 v = u^2 = z$ .

Tedy  $z = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}$ ,

což je rovnice *eliptického paraboloidu*. Je-li  $a = b$ , pak mluvíme o *rotačním paraboloidu*. Geometrický význam zobrazení  $\mathbf{f}$  je na obrázku (1.8).

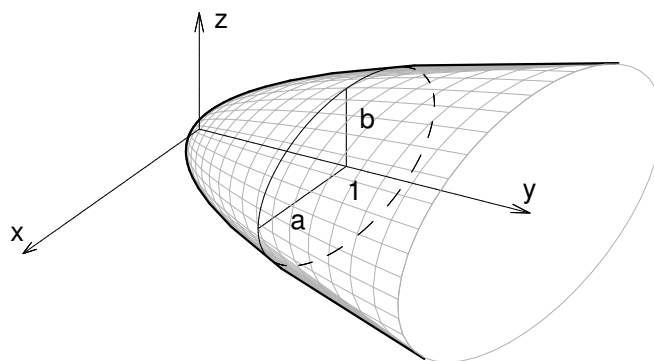


Obr. 1.8: Eliptický paraboloid

Rovnice  $y = \frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{b^2}$  je opět rovnice eliptického paraboloidu s definujícími rovnicemi

$$\begin{aligned} x &= au \cos v \\ y &= u^2 \\ z &= bu \sin v \end{aligned} \quad (u, v) \in M,$$

který má osu nikoliv v ose  $z$ , ale v ose  $y$ , viz obrázek (1.9).

Obr. 1.9: Eliptický paraboloid s osou v ose  $y$ 

Podobně i  $x = \frac{y^2}{a^2} + \frac{z^2}{b^2}$  je rovnice eliptického paraboloidu s osou v ose  $x$ .

**Příklad 1.14.** Necht'  $M \subset \mathbb{R}^2$ ,  $\mathbf{f} = (f_1, f_2, f_3) : M \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,  $M = (-\infty, \infty) \times \langle 0, 2\pi \rangle$ ,

$$\mathbf{f}(u, v) = (au \cos v, bu \sin v, u),$$

kde  $a, b$  jsou obecně navzájem různé kladné konstanty. Tedy  $u \in (-\infty, \infty)$ ,  $v \in \langle 0, 2\pi \rangle$  a

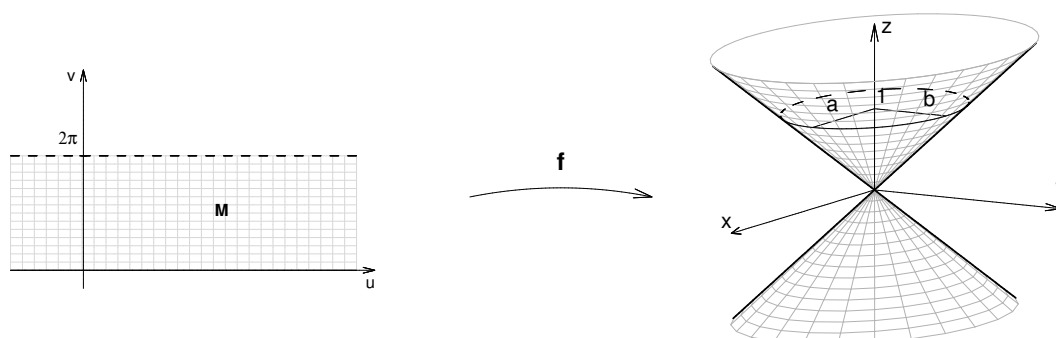
$$\begin{aligned} x &= au \cos v \\ y &= bu \sin v \\ z &= u \end{aligned} \quad (u, v) \in M.$$

Odtud 
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = u^2 \cos^2 v + u^2 \sin^2 v = u^2 = z^2.$$

Tedy 
$$z^2 = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2},$$

což je implicitní rovnice *eliptického kuželové plochy*. Je-li  $a = b$ , pak jedná se o *rotační kuželovou plochu*.

Geometrický význam zobrazení  $\mathbf{f}$  je na obrázku (1.10).



Obr. 1.10: Eliptická kuželová plocha

Rovnice  $z = \sqrt{\frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{b^2}}$ , resp.  $z = -\sqrt{\frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{b^2}}$ , je rovnicí „horní“, resp. „dolní“ kuželové plochy.

Podobně  $x^2 = \frac{y^2}{a^2} + \frac{z^2}{b^2}$ , resp.  $y^2 = \frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{b^2}$ , je rovnice kuželové plochy s osou v ose  $x$ , resp. v ose  $y$ .

**Příklad 1.15.** Necht'  $M \subset \mathbb{R}^2$ ,  $\mathbf{f} = (f_1, f_2, f_3) : M \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,  $M = \langle 0, 2\pi \rangle \times (-\infty, \infty)$ ,

$$\mathbf{f}(u, v) = (a \cos u, b \sin u, v),$$

kde  $a, b$  jsou obecně navzájem různé kladné konstanty. Tedy  $u \in \langle 0, 2\pi \rangle$ ,  $v \in (-\infty, \infty)$  a platí

$$\begin{aligned} x &= a \cos u \\ y &= b \sin u \\ z &= v \end{aligned} \quad (u, v) \in M.$$

Odtud

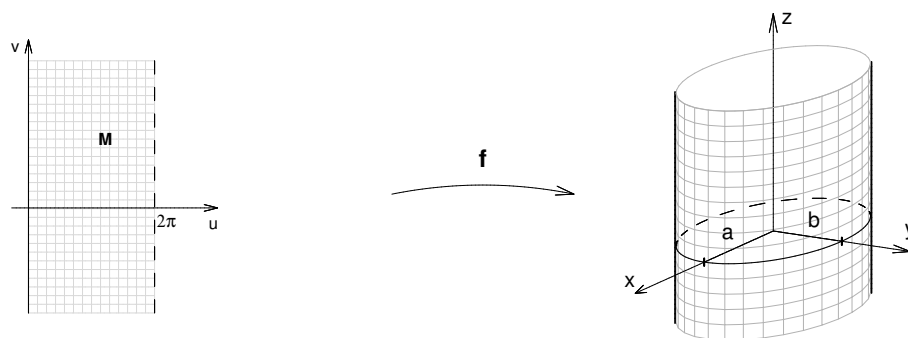
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \cos^2 u + \sin^2 u = 1.$$

Tedy

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

což je implicitní rovnice *eliptické válcové plochy*,  $z \in (-\infty, \infty)$ , s osou v ose  $z$ . Je-li  $a = b = R$ , jedná se o *rotační válcovou plochu*, tj  $x^2 + y^2 = R^2$ .

Geometrický význam zobrazení  $\mathbf{f}$  je na obrázku (1.11).

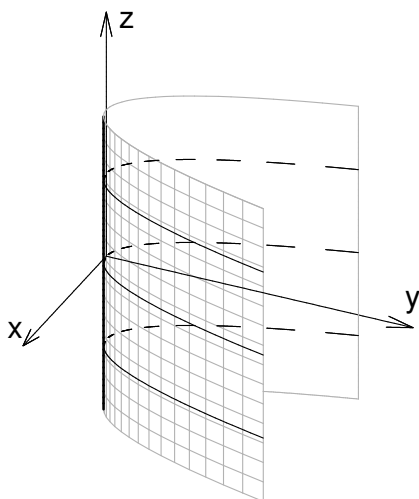
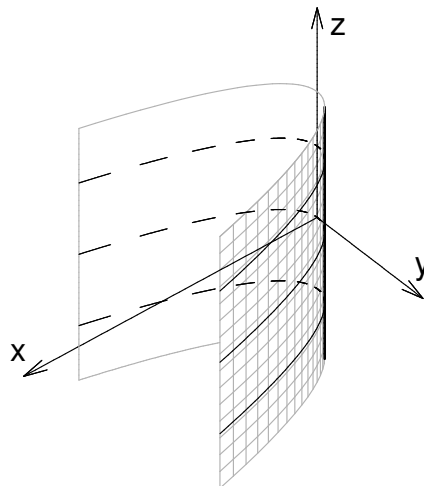


Obr. 1.11: Eliptická válcová plocha

Podobně i  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{b^2} = 1$ , resp.  $\frac{y^2}{a^2} + \frac{z^2}{b^2} = 1$ , jsou eliptické válcové plochy s osami v ose  $y$ , resp. v ose  $x$ .

Analogicky  $x^2 + z^2 = R^2$ , resp.  $y^2 + z^2 = R^2$ , jsou rotační válcové plochy s osami v ose  $y$ , resp. v ose  $x$ .

Odtud plyne, že rovnice kuželoseček v rovině jsou v prostoru rovnicemi válcových ploch. V případě rovnice paraboly, resp. hyperboly, mluvíme o *parabolické válcové ploše* (viz obrázky (1.12) a (1.13)), resp. *hyperbolické válcové ploše*.

Obr. 1.12: Plocha  $y = x^2$ Obr. 1.13: Plocha  $y^2 = x$ 

Na parabolickou válcovou plochu  $y = x^2$  se můžeme dívat jako na zobrazení

$$\mathbf{f} = (f_1, f_2, f_3) : M \rightarrow \mathbb{R}^3, \text{ kde } M = (-\infty, \infty) \times (-\infty, \infty), \mathbf{f}(u, v) = (u, u^2, v), \text{ tj.}$$

$$\begin{aligned}x &= u \\y &= u^2 \\z &= v\end{aligned} \quad (u, v) \in M.$$

Podobně  $y^2 = x$  lze reprezentovat zobrazením

$\mathbf{f} = (f_1, f_2, f_3) : M \rightarrow \mathbb{R}^3$ , kde  $M = (-\infty, \infty) \times (-\infty, \infty)$ ,  $\mathbf{f}(u, v) = (u^2, u, v)$ , tj.

$$\begin{aligned}x &= u^2 \\y &= u \\z &= v\end{aligned} \quad (u, v) \in M.$$

Uvažujme nyní zobrazení  $\vec{\mathbf{f}} : A \rightarrow V(\mathbb{R}^m)$ . V tomto případě složky vektorové funkce  $\vec{\mathbf{f}}$  určují v každém bodě  $p$  souřadnice vektoru  $\vec{\mathbf{f}}(p) \in V(\mathbb{R}^m)$ . Označíme-li tyto složky opět např.  $f_1, \dots, f_m$ , píšeme

$$\vec{\mathbf{f}} = [f_1, \dots, f_m].$$

Je tedy  $\vec{\mathbf{f}}(p)$  vektor o souřadnicích  $f_1(p), \dots, f_m(p)$  (rozumí se ve standardní bázi prostoru  $V(\mathbb{R}^m)$ ).

**Definice 1.16.** Vektorovou funkcí v  $\mathbb{R}^n$  budeme rozumět zobrazení  $\vec{\mathbf{f}} : A \rightarrow V(\mathbb{R}^m)$ ,  $A \subset \mathbb{R}^n$ . Speciálně pro  $A \subset \mathbb{R}$ , tedy  $n = 1$ , hovoříme o *vektorové funkci skalárního argumentu*.

Zcela analogicky jako u zobrazení můžeme vektorovou funkci vyjádřit pomocí souřadnic v následujícím tvaru:

Je-li  $p \in A$ , pak  $\vec{\mathbf{f}}(p) = f_1(p)\mathbf{e}_1 + f_2(p)\mathbf{e}_2 + \dots + f_m(p)\mathbf{e}_m$ , kde  $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_m$  je standardní báze v  $V(\mathbb{R}^m)$ .

**Poznámka 1.17.** Poznamenejme, že funkce jedné nebo více proměnných tj.  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $A \subset \mathbb{R}^n$ ,  $n \geq 1$ , budeme nazývat *skalárními funkcemi*. Zejména ve fyzikálních aplikacích budeme v případě vektorové funkce  $\vec{\mathbf{f}} : A \rightarrow V(\mathbb{R}^n)$ ,  $A \subset \mathbb{R}^n$ , hovořit o *vektorovém poli*  $\vec{\mathbf{f}}$  a analogicky v případě skalární funkce o *skalárním poli*.

**Příklad 1.18.** Zvolíme-li v  $\mathbb{R}^3$  kartézskou soustavu souřadnic tak, aby hmotný bod o hmotnosti  $M$  ležel v jejím počátku  $O$ , je intenzita gravitačního pole vytvořeného tímto hmotným bodem

$$\vec{\mathbf{E}} = -\kappa \frac{M}{|\mathbf{r}|^3} \mathbf{r},$$

kde  $\mathbf{r}$  je rádiusvektor libovolného bodu  $p \neq O$ . Toto pole můžeme též vyjádřit vzorcem

$$\vec{\mathbf{E}} = -\kappa \frac{M}{|p - O|^3} (p - O), \quad p \in \mathbb{R}^3, p \neq O.$$

Vektor  $\vec{\mathbf{E}} = \vec{\mathbf{E}}(p)$  je vektor intenzity gravitačního pole v bodě  $p$ .

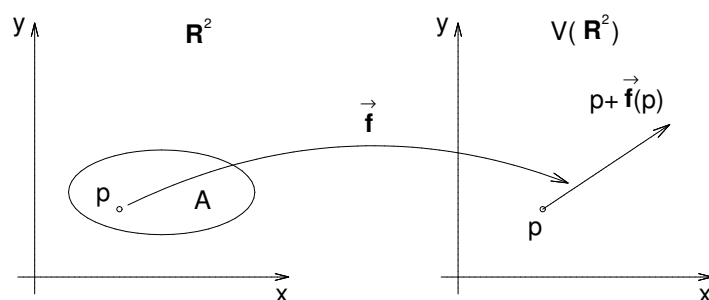
V kartézské soustavě  $(O; \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$  vyjádříme pole  $\vec{\mathbf{E}}$  pomocí souřadnic následovně:

$$\vec{\mathbf{E}} = -\kappa \frac{M}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} (x\mathbf{e}_1 + y\mathbf{e}_2 + z\mathbf{e}_3),$$

kde  $p = (x, y, z) \neq (0, 0, 0)$ , nebo též

$$\vec{\mathbf{E}} = \left( \frac{-\kappa M x}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}, \frac{-\kappa M y}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}, \frac{-\kappa M z}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} \right).$$

Vektorové pole  $\vec{\mathbf{f}} : A \rightarrow V(\mathbb{R}^n)$ ,  $A \subset \mathbb{R}^n$  pro  $n = 2, n = 3$  znázorňujeme tak, že v každém bodě  $p \in A$  zobrazíme vektor  $\vec{\mathbf{f}}(p)$  jako orientovanou úsečku (šipku) s počátečním bodem  $p$  a koncovým bodem  $p + \vec{\mathbf{f}}(p)$ , viz obrázek (1.14).



Obr. 1.14: Vektorové pole

### 1.3 Limita a spojitost funkce více proměnných

Vzdáleností dvou bodů  $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ ,  $y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$  v  $n$ -rozměrném prostoru  $\mathbb{R}^n$  budeme v této kapitole rozumět euklidovskou metrikou

$$d(x, y) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + \dots + (x_n - y_n)^2} = |x - y|.$$

**Definice 1.19.** Bod  $a \in \mathbb{R}^n$  se nazývá *hromadným bodem množiny*  $M$ , jestliže v každém jeho redukovaném okolí leží nějaký bod patřící do množiny  $M$ , tedy když platí

$$\forall P(a) : P(a) \cap M \neq \emptyset.$$

**Definice 1.20.** Řekneme, že funkce  $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $M \subset \mathbb{R}^n$  má v bodě  $a \in M$  *limitu*  $b \in \mathbb{R}$ , když

- $a$  je hromadným bodem množiny  $M$ ,
- k libovolnému okolí  $U(b)$  bodu  $b$  existuje okolí  $P(a)$  bodu  $a$  tak, že funkce  $f$  zobrazí redukované okolí  $P(a)$  do  $U(b)$ , tedy

$$\forall U(b) \exists P(a) : f(P(a)) \subset U(b).$$

Potom píšeme  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$ .

**Definice 1.21.** Řekneme, že funkce  $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $M \subset \mathbb{R}^n$  je v bodě  $a$  *spojitá*, jestliže

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a).$$

Řekneme, že funkce  $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $M \subset \mathbb{R}^n$  je *spojitá na množině*  $M$ , je-li spojitá v každém bodě této množiny.

**Věta 1.22. (O limitě zúžené funkce)** *Existuje-li  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$ , potom pro libovolnou množinu  $M \subset D_f$ , jejímž hromadným bodem je bod  $a$ , platí*

$$\lim_{x \rightarrow a} f|_M(x) = b.$$

**Důsledek 1.23.** *Jestliže  $\lim_{x \rightarrow a} f|_M(x)$  neexistuje, nebo jestliže pro dvě množiny  $M \subset D_f$ ,  $N \subset D_f$  platí*

$$\lim_{x \rightarrow a} f|_M(x) \neq \lim_{x \rightarrow a} f|_N(x),$$

*potom  $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$  neexistuje.*

**Věta 1.24. (Aritmetické operace s limitami)** *Je-li  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b_1$ ,  $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = b_2$  a  $k \in \mathbb{R}$ , platí:*

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow a} (f(x) + g(x)) &= b_1 + b_2, & \lim_{x \rightarrow a} k f(x) &= k b_1, \\ \lim_{x \rightarrow a} (f(x) \cdot g(x)) &= b_1 \cdot b_2, & \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} &= \frac{b_1}{b_2}, \text{ je-li } b_2 \neq 0. \end{aligned}$$

**Věta 1.25. (O limitě složené funkce)** *Nechť je dána složená funkce*

$$F(t_1, t_2, \dots, t_n) = f(\varphi_1(t_1, t_2, \dots, t_n), \varphi_2(t_1, t_2, \dots, t_n), \dots, \varphi_m(t_1, t_2, \dots, t_n)),$$

*nechť pro vnitřní složky  $\varphi_i$ ,  $i = 1, \dots, m$ , této složené funkce platí*

$$\lim_{(t_1, t_2, \dots, t_n) \rightarrow (a_1, a_2, \dots, a_n)} \varphi_i(t_1, t_2, \dots, t_n) = b_i, \quad i = 1, \dots, m,$$

*a nechť je vnější složka  $f(x_1, x_2, \dots, x_m)$  spojitá v bodě  $(b_1, b_2, \dots, b_m)$ . Potom platí*

$$\lim_{(t_1, t_2, \dots, t_n) \rightarrow (a_1, a_2, \dots, a_n)} F(t_1, t_2, \dots, t_n) = f(b_1, b_2, \dots, b_m).$$

**Věta 1.26. (Věta o sevření)** *Jestliže pro každé  $x \in U(a)$  platí  $g(x) \leq f(x) \leq h(x)$  a*

$$\lim_{x \rightarrow a} g(x) = \lim_{x \rightarrow a} h(x) = b, \text{ pak také } \lim_{x \rightarrow a} f(x) = b; \text{ je-li speciálně } |f(x)| \leq h(x) \text{ pro } x \in U(a)$$

*a  $\lim_{x \rightarrow a} h(x) = 0$ , potom  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0$ .*



V dalších několika příkladech budeme počítat limity (resp. prověřovat, že tyto neexistují) u několika funkcí dvou proměnných, poněvadž zde je možno pro lepší pochopení situaci znázornit graficky. Bez újmy na obecnosti budeme počítat limity v počátku (v případě výpočtu limity v jiném bodě je možno posunout počátek do tohoto bodu). Příklady uvádíme hlavně proto, abychom na nich ilustrovali, jak komplikovaná situace může být v okolí bodů, v nichž funkce více proměnných není definovaná, narozdíl od funkce jedné proměnné, kdy ke kompletní představě o průběhu funkce v okolí takového bodu stačily jednostranné limity.

**Příklad 1.27.** Vyšetřete limity  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x,y)$ , je-li funkce

$$\text{a) } f(x,y) = \frac{x^2 - y^2}{x + y},$$

$$\text{b) } f(x,y) = \frac{x^3y - xy^3}{x^2 + y^2},$$

$$\text{c) } f(x,y) = (x^2 + y^2) \sin \frac{1}{xy}.$$

**Řešení.** a) Platí  $\frac{x^2 - y^2}{x + y} = \frac{(x - y)(x + y)}{x + y} = x - y /_{x \neq -y}$ , přičemž  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} (x - y) = 0$ .

Odtud podle věty o limitě zúžené funkce plyne, že  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 - y^2}{x + y} = 0$ .

b) Definičním oborem funkce je množina  $D_f = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ , přičemž

$$\left| \frac{x^3y - xy^3}{x^2 + y^2} \right| = |xy| \left| \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} \right| \leq |xy| \frac{x^2 + y^2}{x^2 + y^2} = |xy|$$

a protože  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} |xy| = 0$ , je hledaná limita rovna nule.

Chování funkce v okolí počátku je naznačeno na 3d-obrázku.

c) Definičním oborem funkce je množina  $D_f = \{(x, y) \mid x \neq 0, y \neq 0\}$ , tedy rovina s vyjmutými souřadnými osami; vyšetřujeme samozřejmě limitu vzhledem k tomuto definičnímu oboru. Platí

$$\left| (x^2 + y^2) \sin \frac{1}{xy} \right| \leq x^2 + y^2$$

$$\text{a} \quad \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} (x^2 + y^2) = 0,$$

tedy hledaná limita je rovna nule.

Sousední obrázek opět naznačuje chování funkce v okolí počátku; graf „kmitá“ se zmenšující se amplitudou, ale s narůstající frekvencí.

□

Rozmanitější a zajímavější bývají případy, kdy limita neexistuje; pro ověření tohoto faktu používáme důsledek věty (1.22) – jestliže pro dvě různá zúžení funkce je limita v některém bodě různá, potom limita původní funkce v tomto bodě neexistuje.

**Příklad 1.28.** Vyšetřete limity  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x,y)$ , je-li  $f(x,y) = \frac{2xy}{x^2 + y^2}$ .

**Řešení.** Provedme zúžení funkce na libovolnou přímku procházející počátkem  $y = kx$ . Dostaneme systém funkcí

$$h_k(x,y) = f(x,kx) = \frac{2kx^2}{x^2(1+k^2)} = \frac{2k}{1+k^2}.$$

Je to systém konstantních funkcí – například pro  $k = 1$ , tj. pro přímku  $y = x$  dostaneme

$$h_1(x,y) = \frac{2x^2}{x^2 + x^2} = 1 /_{x \neq 0},$$

pro  $k = \frac{1}{2}$ , tj. pro přímku  $y = \frac{1}{2}x$  dostaneme

$$h_{\frac{1}{2}}(x,y) = \frac{x^2}{x^2 + \frac{1}{4}x^2} = \frac{4}{5} /_{x \neq 0}.$$

Po každé přímce tedy vychází jiná limita – zadaná limita neexistuje.  $\square$

Na závěr této kapitoly uvedeme věty o funkcích spojitých na uzavřených ohraničených množinách:

**Věta 1.29.** *Jestliže je funkce  $f$  spojitá na ohraničené uzavřené množině  $M$ , potom*

- je na množině  $M$  ohraničená,
- má na množině  $M$  maximum a minimum.

*Je-li navíc  $M$  souvislá, potom pro libovolné body  $a, b \in M$ ,  $a \neq b$ , nabude  $f$  každou hodnotu mezi  $f(a)$  a  $f(b)$  alespoň v jednom bodě množiny  $M$ .*

## 1.4 Derivace ve směru, parciální derivace

V tomto odstavci si připomeneme pojem směrové a parciální derivace, zavedený již v kurzu BMA1, avšak z pohledu lineární algebry, zejména lineárních forem, které nám umožní logickou „výstavbu“ výše uvedených pojmů včetně názorných odlišností derivace funkcí jedné proměnné a derivace funkcí více proměnných.

**Definice 1.30.** Nechť  $f : G \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $G \subset \mathbb{R}^k$  a nechť  $p \in G$  je vnitřní bod množiny  $G$ ,  $\mathbf{a} \in V(\mathbb{R}^k)$ . Existuje-li konečná limita

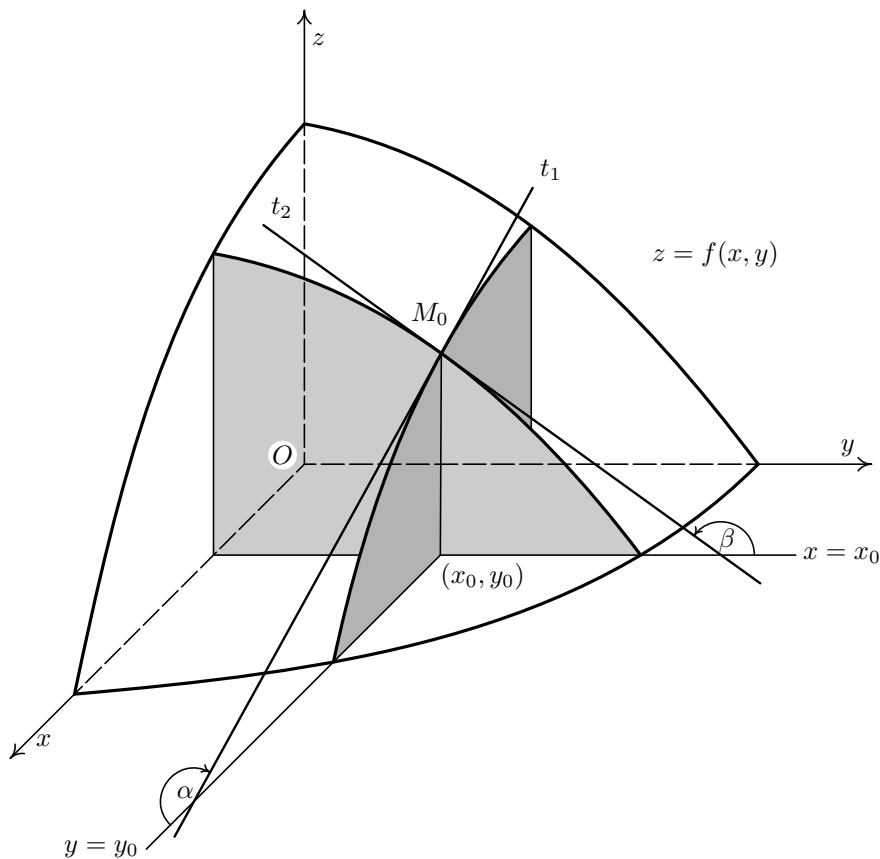
$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(p + h\mathbf{a}) - f(p)}{h},$$

nazýváme ji *derivací funkce  $f$  v bodě  $p \in G$  podle vektoru  $\mathbf{a} \in V(\mathbb{R}^k)$*  a značíme  $f'_{\mathbf{a}}(p)$ . Je-li vektor  $\mathbf{a}$  jednotkový, hovoříme o *směrové derivaci*.

Směrové derivace  $f'_{\mathbf{e}_1}, f'_{\mathbf{e}_2}, \dots, f'_{\mathbf{e}_k}$ , kde  $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_k$  jsou vektory standardní báze (tj.  $\mathbf{e}_1 = (1, 0, \dots, 0)$ ,  $\mathbf{e}_2 = (0, 1, 0, \dots, 0), \dots, \mathbf{e}_k = (0, \dots, 0, 1)$ ), nazýváme *parciálními derivacemi* funkce  $f$ .

Směrovou derivaci  $f'_{\mathbf{e}_j}$ , ( $j = 1, \dots, k$ ) nazýváme parciální derivací 1. řádu vzhledem k  $j$ -té souřadnici ( $k$   $j$ -té proměnné) a značíme  $\frac{\partial f}{\partial x_j}$ .

**Poznámka 1.31.** V případě  $k = 2$ , respektive  $k = 3$ , budeme značit proměnné  $x, y$ , respektive  $x, y, z$  a parciální derivace  $\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}$ , respektive  $\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}$ .



Obr. 1.15: Geometrický význam parciálních derivací  $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, x_0)$  a  $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, x_0)$

Předpokládejme nyní, že v bodě  $p \in G$  existuje směrová derivace  $f'_{\mathbf{a}}(p) \forall \mathbf{a} \in V(\mathbb{R}^k)$  a že zobrazení  $F : \mathbf{a} \mapsto f'_{\mathbf{a}}(p)$  je *lineární formou* vektoru  $\mathbf{a}$ , tedy:

- 1)  $F(c \cdot \mathbf{a}) = c \cdot F(\mathbf{a})$ , tj.  $f'_{c \cdot \mathbf{a}}(p) = c \cdot f'_{\mathbf{a}}(p)$ , pro libovolné  $c \in \mathbb{R}$ ,  $\mathbf{a} \in V(\mathbb{R}^k)$ .
- 2)  $F(\mathbf{a} + \mathbf{b}) = F(\mathbf{a}) + F(\mathbf{b})$ , tj.  $f'_{\mathbf{a} + \mathbf{b}}(p) = f'_{\mathbf{a}}(p) + f'_{\mathbf{b}}(p)$ , pro libovolné  $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in V(\mathbb{R}^k)$ .

Je zřejmé, že existuje-li  $f'_{\mathbf{a}}(p)$ , pak existuje i  $f'_{c \cdot \mathbf{a}}(p)$ ,  $c \in \mathbb{R}$  a platí  $f'_{c \cdot \mathbf{a}}(p) = c \cdot f'_{\mathbf{a}}(p)$ .

Naproti tomu, z existence směrových derivací  $f'_{\mathbf{a}}(p), f'_{\mathbf{b}}(p)$  obecně neplyne existence  $f'_{\mathbf{a} + \mathbf{b}}(p)$  a v případě, že  $f'_{\mathbf{a} + \mathbf{b}}(p)$  existuje, nemusí platit

$$f'_{\mathbf{a}}(p) + f'_{\mathbf{b}}(p) = f'_{\mathbf{a} + \mathbf{b}}(p). \quad (1.7)$$

**Příklad 1.32.** Necht'  $p = (0, 0)$ ,  $\mathbf{a} = (1, 0)$ ,  $\mathbf{b} = (0, 1)$ . Uvažujme funkci

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

Pak

$$f'_{\mathbf{a}}(p) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f((0, 0) + h \cdot (1, 0)) - f(0, 0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h, 0) - f(0, 0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{0}{h} = 0.$$

Podobně

$$f'_{\mathbf{b}}(p) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f((0, 0) + h \cdot (0, 1)) - f(0, 0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(0, h)}{h} = 0.$$

$$\begin{aligned} f'_{\mathbf{a}+\mathbf{b}}(p) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f((0, 0) + h \cdot ((1, 0) + (0, 1))) - f(0, 0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h, h)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h^2}{h^2+h^2} = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} = \begin{cases} \infty, & h \rightarrow 0^+ \\ -\infty, & h \rightarrow 0^- \end{cases} \end{aligned}$$

Limita a tedy  $f'_{\mathbf{a}+\mathbf{b}}(p)$  v bodě  $p$  neexistuje.

**Příklad 1.33.** Necht'  $p = (0, 0)$ ,  $\mathbf{a} = (1, 0)$ ,  $\mathbf{b} = (0, 1)$ . Uvažujme funkci

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy(x+y)}{x^2+y^2}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

$$f'_{\mathbf{a}}(p) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f((0, 0) + h \cdot (1, 0)) - f(0, 0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h, 0) - f(0, 0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{0}{h} = 0.$$

$$f'_{\mathbf{b}}(p) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f((0, 0) + h \cdot (0, 1)) - f(0, 0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(0, h)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{0}{h} = 0.$$

$$\begin{aligned} f'_{\mathbf{a}+\mathbf{b}}(p) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f((0, 0) + h \cdot ((1, 0) + (0, 1))) - f(0, 0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h, h)}{h} = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h^2(h+h)}{h^2+h^2} = \lim_{h \rightarrow 0} 1 = 1. \end{aligned}$$

Tedy  $f'_{\mathbf{a}+\mathbf{b}}(p) = 1 \neq 0 = f'_{\mathbf{a}}(p) + f'_{\mathbf{b}}(p)$ .

Jestliže však  $f'_{\mathbf{a}}$  existuje v jistém okolí  $U(p)$  bodu  $p$  a je v bodě  $p$  spojitá a existuje-li  $f'_{\mathbf{b}}(p)$ , pak existuje i  $f'_{\mathbf{a}+\mathbf{b}}(p)$ , přičemž

$$f'_{\mathbf{a}+\mathbf{b}}(p) = f'_{\mathbf{a}}(p) + f'_{\mathbf{b}}(p).$$

Necht' nyní  $\mathbf{a} = a_1 \mathbf{e}_1 + \dots + a_k \mathbf{e}_k$ , pak  $F(\mathbf{a}) = a_1 F(\mathbf{e}_1) + \dots + a_k F(\mathbf{e}_k)$ , tj.  $f'_{\mathbf{a}}(p) = F(\mathbf{a}) = \mathbf{a} \cdot \mathbf{w}$ , kde  $\mathbf{w} = (F(\mathbf{e}_1), \dots, F(\mathbf{e}_k)) = (f'_{\mathbf{e}_1}(p), \dots, f'_{\mathbf{e}_k}(p)) = \left( \frac{\partial f}{\partial x_1}(p), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_k}(p) \right)$ .

**Definice 1.34.** Vektor  $\mathbf{w} = \left( \frac{\partial f}{\partial x_1}(p), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_k}(p) \right)$  nazýváme *derivací* funkce  $f$  v bodě  $p$  nebo také *gradientem* funkce  $f$  v bodě  $p$  a značíme  $f'(p)$  nebo  $\text{grad}f(p)$ .

Funkce  $f$  má v bodě  $p$  gradient, právě když funkce  $F : \mathbf{a} \mapsto f'_\mathbf{a}(p)$  je lineární formou a platí

$$f'_\mathbf{a}(p) = \mathbf{a} \cdot \text{grad}f(p).$$

**Poznámka 1.35.** Z existence gradientu funkce  $f$  v bodě  $p$ , tedy všech parciálních derivací v bodě  $p$ , obecně neplyne spojitost funkce  $f$  v bodě  $p$ , což je podstatný rozdíl oproti funkci jedné proměnné, kde z existence derivace v libovolném bodě  $x_0 \in \mathbb{R}$  plyne spojitost funkce  $f$  v bodě  $x_0$ .

**Příklad 1.36.** Vypočítejte gradient a spojitost funkce  $f$  v počátku, jestliže

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

**Řešení.**

$$\text{Platí } \frac{\partial f(0, 0)}{\partial x} = f'_{\mathbf{e}_1}(0, 0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f((0, 0) + h \cdot (1, 0)) - f(0, 0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h, 0)}{h} = 0,$$

$$\text{podobně } \frac{\partial f(0, 0)}{\partial y} = f'_{\mathbf{e}_2}(0, 0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f((0, 0) + h \cdot (0, 1)) - f(0, 0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(0, h)}{h} = 0.$$

Tedy parciální derivace v bodě  $(0, 0)$  existují a platí  $\text{grad}f(0, 0) = (0, 0)$ .

Nyní vyšetříme spojitost funkce  $f$  v bodě  $(0, 0)$ , ukážeme, že  $f$  v počátku není spojitá. K tomu stačí ukázat, že některé její zúžení (restrikce) na množinu obsahující počátek není v počátku spojitá.

Nechť  $h$  je zúžení funkce  $f$  na množinu  $M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = kx, k \neq 0\}$ , což je svazek přímek procházejících počátkem ( $h = f|_M$ ). Tedy

$$h(x) = f(x, kx) = \begin{cases} \frac{kx^2}{x^2(1+k^2)} = \frac{k}{1+k^2}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

Vidíme, že limita zúžení  $h(x)$  pro  $x \rightarrow 0$  závisí na konstantě  $k$ , tedy například pro  $k = 1, k = 2$ , tedy přímky  $y = x, y = 2x$ , dostáváme dva různé výsledky:

$$\begin{aligned} k = 1 : \lim_{x \rightarrow 0} h(x) &= \frac{1}{2} \\ k = 2 : \lim_{x \rightarrow 0} h(x) &= \frac{2}{5} \end{aligned}$$

Odtud plyne, že limita funkce  $f$  v počátku neexistuje, tedy  $f$  není v počátku spojitá, přičemž parciální derivace v počátku existují.  $\square$

Tedy existence parciálních derivací funkce  $f$  v bodě  $p$  je poměrně slabým předpokladem o chování funkce v bodě  $p$ . Je patrné, že samotná existence parciálních derivací ve smyslu výše uvedené definice není vhodným zobecněním pojmu diferencovatelnosti funkce jedné proměnné na případ funkce více proměnných.

Jediným vhodným zobecněním je pojem diferencovatelnosti, tak jak jej nyní budeme definovat:

**Definice 1.37.** Řekneme, že funkce  $f : G \rightarrow \mathbb{R}$  definovaná v otevřené množině  $G \subset \mathbb{R}^k$  je *diferencovatelná* (má *diferenciál*) v bodě  $p \in G$ , existuje-li  $\text{grad}f(p)$  a platí-li

$$\lim_{\mathbf{a} \rightarrow \mathbf{0}} \frac{f(p + \mathbf{a}) - f(p) - \text{grad}f(p) \cdot \mathbf{a}}{|\mathbf{a}|} = 0.$$

Lineární formu

$$F(\mathbf{a}) = f'_{\mathbf{a}}(p) = \text{grad}f(p) \cdot \mathbf{a}$$

nazveme *diferenciálem* (*totálním diferenciálem*) funkce  $f$  v bodě  $p$  a značíme  $df(p, \mathbf{a})$ . Platí tedy

$$df(p, \mathbf{a}) = \text{grad}f(p) \cdot \mathbf{a}$$

Je-li  $p = (x_1, \dots, x_k)$ ,  $\mathbf{a} = (a_1, \dots, a_k)$ , pak

$$\begin{aligned} df(p, \mathbf{a}) &= \left( \frac{\partial f}{\partial x_1}(p), \frac{\partial f}{\partial x_2}(p), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_k}(p) \right) \cdot (a_1, \dots, a_k) = \\ &= \frac{\partial f}{\partial x_1}(p) \cdot a_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2}(p) \cdot a_2 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_k}(p) \cdot a_k \end{aligned}$$

nebo v tradičním tvaru

$$df(p, \mathbf{a}) = \frac{\partial f}{\partial x_1}(p) \cdot dx_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2}(p) \cdot dx_2 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_k}(p) \cdot dx_k.$$

**Příklad 1.38.** Vypočtěte diferenciál funkce  $f(x, y) = \ln \sqrt{x^2 + y^2}$  v bodě  $p = (x, y) \neq (0, 0)$ .

**Řešení.** Platí  $\frac{\partial f}{\partial x}(p) = \frac{x}{x^2 + y^2}$ ,  $\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{y}{x^2 + y^2}$ .

Tedy  $df(p, \mathbf{a}) = \frac{\partial f}{\partial x}(p) \cdot dx + \frac{\partial f}{\partial y}(p) \cdot dy = \frac{x}{x^2 + y^2} dx + \frac{y}{x^2 + y^2} dy$ . □

Také u funkce více proměnných vyjadřuje diferenciál lineární část přírůstku funkce vzhledem k přírůstkovému vektoru  $x - p$ . V případě  $f = f(x, y)$ , funkce dvou proměnných, dostaneme pomocí diferenciálu *rovnicí tečné roviny* v bodě  $[x_0, y_0]$ :

$$\rho : z - f(x_0, y_0) = df((x_0, y_0), (x, y)) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) (x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) (y - y_0),$$

neboli

$$\rho : \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) (x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) (y - y_0) - (z - f(x_0, y_0)) = 0,$$

což je obecná rovnice tečné roviny. Z tohoto tvaru rovnice vidíme, že normálový vektor k tečné rovině a tedy i ke grafu funkce  $f$  v bodě  $[x_0, y_0, f(x_0, y_0)]$  má tvar

$$\mathbf{n} = \left( \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0), \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0), -1 \right)$$

a normála ke grafu funkce  $f$  v tomto bodě má rovnice

$$\frac{x - x_0}{\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)} = \frac{y - y_0}{\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)} = \frac{z - f(x_0, y_0)}{-1}.$$

Umíme tedy najít tečnou rovinu k ploše, která je grafem nějaké funkce dvou proměnných; může se stát, že plochu nemůžeme chápat jako graf funkce (např. kulovou plochu). Ukážeme si, jak lze postupovat v takovém případě.

Uvažujme plochu o rovnici  $f(x, y, z) = 0$  a na ní bod  $p = [x_0, y_0, z_0]$  (např. elipsoid  $x^2 + 2y^2 + 3z^2 - 6 = 0$  s bodem  $p = [1, 1, 1]$ ); máme najít rovnici tečné roviny k zadané ploše v zadaném bodě. V některých případech je možné chápat část této plochy kde leží zadaný bod jako graf jisté funkce (v případě uvažovaného elipsoidu by to byla funkce  $z = f(x, y) = \frac{1}{\sqrt{3}}\sqrt{6 - x^2 - 2y^2}$ ) a použít příslušný vzorec, výpočet by však byl dosti komplikovaný, navíc existují případy, kdy takto postupovat nelze (např. pro plochu o rovnici  $x e^y + y e^z + z e^x - 3e = 0$  a bod  $[1, 1, 1]$ ). Ukážeme si jiný postup:

Rovnici  $f(x, y, z) = 0$  můžeme chápat jako nulovou hladinu funkce tří proměnných  $f(x, y, z)$  (je to prostorová analogie vrstevnice funkce dvou proměnných). Víme, že gradient funkce  $f$  v bodě na hladině má směr kolmý na tuto hladinu (je to, jak víme, směr nejrychlejšího růstu funkce) – je to tedy normálový vektor této hladiny v příslušném bodě, tedy i normálový vektor hledané tečné roviny. Jeho složky budou tedy koeficienty u jednotlivých proměnných v rovnici hledané tečné roviny, která bude mít tvar:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(p)x + \frac{\partial f}{\partial y}(p)y + \frac{\partial f}{\partial z}(p)z + d = 0.$$

Absolutní člen  $d$  pak určíme z podmínky, že zadaný bod na této rovině leží.

**Příklad 1.39.** Máme najít rovnice tečné roviny ploch daných rovnicemi  $f(x, y, z) = 0$  v bodě  $p = [1, 1, 1]$ , je-li

$$\text{a) } f(x, y, z) = x^2 + 2y^2 + 3z^2 - 6, \quad \text{b) } f(x, y, z) = x e^y + y e^z + z e^x - 3e.$$

**Řešení.** a)  $\text{grad } f = (2x, 4y, 6z)$  a  $\text{grad } f(p) = (2, 4, 6)$ . Tečná rovina má tedy tvar

$$x + 2y + 3z + d = 0, \quad \text{kde } d = -(x + 2y + 3z)|_{[1,1,1]} = -6 \Rightarrow \rho : x + 2y + 3z - 6 = 0.$$

$$\text{b) } \text{grad } f(x, y, z) = (e^y + z e^x, x e^y + e^z, y e^z + e^x), \quad \text{grad } f(p) = (2e, 2e, 2e),$$

$$x + y + z + d = 0, \quad d = -(x + y + z)|_{[1,1,1]} = -3 \Rightarrow \rho : x + y + z - 3 = 0. \quad \square$$

**Poznámka 1.40.** Poznamenejme, že rovnici tečné roviny k ploše o rovnici  $f(x, y, z) = 0$  v bodě  $p = [p_1, p_2, p_3]$  ležícím na této ploše můžeme napsat ve tvaru  $(x - p) \cdot \text{grad } f(p) = 0$ , neboli

$$\rho : \frac{\partial f}{\partial x}(p_1, p_2, p_3)(x - p_1) + \frac{\partial f}{\partial y}(p_1, p_2, p_3)(y - p_2) + \frac{\partial f}{\partial z}(p_1, p_2, p_3)(z - p_3) = 0$$



– vektor s koncovým bodem v libovolném bodě tečné roviny a počátečním v bodě dotyku (tedy ležící v tečné rovině) je kolmý na gradient funkce, jejíž hladinou je rovnice dané plochy.

Velice důležitá vlastnost diferencovatelných funkcí je, že je-li funkce  $f$  diferencovatelná v bodě  $p \in G \subset \mathbb{R}^k$ , pak je již v bodě  $p$  spojitá.

**Definice 1.41.** Řekneme, že funkce  $f$  je *diferencovatelná* na otevřené množině  $G \subset \mathbb{R}^k$ , je-li diferencovatelná v každém bodě  $p \in G$ .

Řekneme, že funkce  $f$  je *třídy  $C_1$*  na otevřené množině  $G \subset \mathbb{R}^k$ , existuje-li na  $G$  gradient funkce  $f$  a je spojitý, píšeme  $f \in C_1(G)$ .

**Věta 1.42.** Platí:  $f \in C_1(G) \Rightarrow f$  je diferencovatelná na  $G \Rightarrow f$  je spojitá na  $G$ .

**Definice 1.43.** Uvažujme nyní funkci  $f : G \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $G \subset \mathbb{R}^k$ , která má v nějakém okolí bodu  $p \in G$  směrovou derivaci  $f'_a$ . Pak existuje v bodě  $p$  směrová derivace  $(f'_a)'_b(p)$  funkce  $f'_a$  ve směru vektoru  $b$ , kterou nazveme *směrovou derivací druhého řádu* v bodě  $p$  ve směru vektorů  $a, b$  a značíme  $f''_{a,b}(p)$ .

Obecně indukci definujeme směrovou derivace  $n$ -tého řádu:

$$f_{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_n}^{(n)} = (f_{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_{n-1}}^{(n-1)})'_{\mathbf{u}_n}$$

Směrové derivace  $n$ -tého řádu ve směru vektorů standardní báze  $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_k$  tj. směrové derivace

$$f_{\mathbf{e}_{j_1}, \dots, \mathbf{e}_{j_n}}^{(n)},$$

kde  $(j_1, j_2, \dots, j_n)$  je libovolná permutace s opakováním množiny indexů  $(1, 2, \dots, n)$ , nazýváme *parciálními derivacemi  $n$ -tého řádu* funkce  $f$  a budeme značit

$$\frac{\partial^n f}{\partial x_{j_n} \cdots \partial x_{j_1}}.$$

Nechť  $f : G \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $G \subset \mathbb{R}^k$  je funkce, která má parciální derivace druhého řádu  $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}$ , kde  $i \neq j$ ,  $i, j \in \{1, 2, \dots, k\}$ , pak příslušné derivace  $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}$  nazýváme *smíšenými parciálními derivacemi druhého řádu*.

**Poznámka 1.44.** Existují-li smíšené parciální derivace  $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(p)$ ,  $\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(p)$ , nemusí platit rovnost

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(p) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(p)$$

**Příklad 1.45.** Uvažujme funkci

$$f(x, y) = \begin{cases} xy \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

V libovolném bodě různém od počátku platí

$$\frac{\partial f}{\partial x} = y \cdot \left( \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} + \frac{4x^2y^2}{(x^2 + y^2)^2} \right), \quad \frac{\partial f}{\partial y} = x \cdot \left( \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} - \frac{4x^2y^2}{(x^2 + y^2)^2} \right).$$

V počátku pak platí

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f((0, 0) + h \cdot (1, 0)) - f(0, 0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h, 0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{0}{h} = 0,$$

podobně  $\frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) = 0$ .

Nyní spočteme smíšené parciální derivace v počátku:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{\partial f}{\partial x}((0, 0) + h \cdot (0, 1)) - \frac{\partial f}{\partial x}(0, 0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{\partial f}{\partial x}(0, h)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-h}{h} = -1 \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{\partial f}{\partial y}((0, 0) + h \cdot (1, 0)) - \frac{\partial f}{\partial y}(0, 0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{\partial f}{\partial y}(h, 0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h}{h} = 1. \end{aligned}$$

Tedy smíšené derivace se v počátku nerovnají.

Existují-li však smíšené derivace  $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(p)$ ,  $\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(p)$ ,  $i \neq j$ ,  $i, j \in \{1, 2, \dots, k\}$ , a jsou spojité na  $G$ , pak platí

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(p) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(p).$$

**Definice 1.46.** Řekneme, že funkce  $f$  je třídy  $\mathbf{C}_n$  na otevřené množině  $G \subset \mathbb{R}^k$ , má-li  $f$  na  $G$  spojité parciální derivace  $n$ -tého řádu, píšeme  $f \in C_n(G)$ .

**Definice 1.47.** Nechť  $\Psi = (\Psi_1, \dots, \Psi_n) : G \rightarrow \mathbb{R}^n$ ,  $G \subset \mathbb{R}^k$ , pak vektor

$$\Psi'_{\mathbf{u}}(p) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\Psi(p + h \cdot \mathbf{u}) - \Psi(p)}{h}$$

nazveme *směrovou derivací zobrazení* v bodě  $p \in G$  ve směru vektoru  $\mathbf{u} \in V(\mathbb{R}^k)$ , ( $|\mathbf{u}| = 1$ ).

Směrové derivace  $\Psi'_{\mathbf{e}_j}(p)$  nazýváme parciálními derivacemi zobrazení  $\Psi$  podle  $j$ -té proměnné.

**Poznámka 1.48.** Platí, že derivace  $\Psi'_{\mathbf{u}}(p)$  existuje právě tehdy, když existují derivace všech souřadnic v bodě  $p$  ve směru  $\mathbf{u}$ , tj.

$$\Psi'_{\mathbf{u}}(p) = ((\Psi_1)'_{\mathbf{u}}(p), \dots, (\Psi_n)'_{\mathbf{u}}(p))$$

Prostřednictvím souřadnic zobrazení lze analogicky zavést pojem diferencovatelnosti zobrazení.

**Definice 1.49.** Uvažujme nyní zobrazení  $\Psi : G \rightarrow \mathbb{R}^n$  diferencovatelné na otevřené množině  $G \subset \mathbb{R}^k$ , pak pro každé  $\mathbf{u} = (u_1, \dots, u_k) \in V(\mathbb{R}^k)$  platí:

$$\begin{aligned} \Psi'_{\mathbf{u}} &= ((\Psi_1)'_{\mathbf{u}}, \dots, (\Psi_n)'_{\mathbf{u}}) = (\text{grad}\Psi_1 \cdot \mathbf{u}, \dots, \text{grad}\Psi_n \cdot \mathbf{u}) = \\ &= \left( \left( \frac{\partial \Psi_1}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial \Psi_1}{\partial x_k} \right) \cdot (u_1, \dots, u_k), \dots, \left( \frac{\partial \Psi_n}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial \Psi_n}{\partial x_k} \right) \cdot (u_1, \dots, u_k) \right) = \\ &= \left( \sum_{i=1}^k \frac{\partial \Psi_1}{\partial x_i} \cdot u_i, \dots, \sum_{i=1}^k \frac{\partial \Psi_n}{\partial x_i} \cdot u_i \right) = \begin{pmatrix} \frac{\partial \Psi_1}{\partial x_1} & \frac{\partial \Psi_1}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial \Psi_1}{\partial x_k} \\ \frac{\partial \Psi_2}{\partial x_1} & \frac{\partial \Psi_2}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial \Psi_2}{\partial x_k} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial \Psi_n}{\partial x_1} & \frac{\partial \Psi_n}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial \Psi_n}{\partial x_k} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_k \end{pmatrix} = \\ &= \Psi' \cdot \mathbf{u}. \end{aligned}$$

Matici  $\Psi'$  nazýváme *Jacobiovou maticí* nebo *derivací* zobrazení  $\Psi$  na  $G$ . Je-li  $k = n$ , pak determinant Jacobiové matice nazýváme *Jakobiánem* zobrazení  $\Psi$  a značíme  $D\Psi$

Uvedené pojmy budou hrát důležitou roli při formulování věty o substituci v  $n$ -rozměrném integrálu.

**Příklad 1.50.** Spočítejte Jakobián zobrazení  $\Psi = (\Psi_1, \Psi_2, \Psi_3) : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,

$$\Psi(x, y, z) = (xyz, x^2 + y^2, x + z).$$

**Řešení.** V našem případě

$$\begin{aligned} \Psi_1(x, y, z) &= xyz \\ \Psi_2(x, y, z) &= x^2 + y^2 \\ \Psi_3(x, y, z) &= x + z, \end{aligned}$$

tj. Jacobiova matice má tvar

$$\Psi' = \begin{pmatrix} \frac{\partial \Psi_1}{\partial x} & \frac{\partial \Psi_1}{\partial y} & \frac{\partial \Psi_1}{\partial z} \\ \frac{\partial \Psi_2}{\partial x} & \frac{\partial \Psi_2}{\partial y} & \frac{\partial \Psi_2}{\partial z} \\ \frac{\partial \Psi_3}{\partial x} & \frac{\partial \Psi_3}{\partial y} & \frac{\partial \Psi_3}{\partial z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} yz & xz & xy \\ 2x & 2y & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Jakobián  $D\Psi$  je pak tvaru

$$D\Psi = \begin{vmatrix} yz & xz & xy \\ 2x & 2y & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 2y^2z - 2y^2x - 2x^2z.$$

□

## 1.5 Diferenciály vyšších řádu. Taylorova věta

**Definice 1.51.** Je-li  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$  třídy  $C_m$ , pak pro libovolné  $p \in A$  a  $k \leq m$  funkci, která každému vektoru  $\mathbf{h} = (h_1, \dots, h_n)$  přiřadí  $k$ -tou derivaci funkce  $f$  podle vektoru  $\mathbf{h}$ , tedy funkci

$$d^k f(p, \mathbf{h}) = f_{\mathbf{h}^k}^{(k)}(p) = \left( h_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \dots + h_n \frac{\partial}{\partial x_n} \right)^k f(p)$$

nazýváme *diferenciálem  $k$ -tého řádu funkce  $f$  v bodě  $p$* . Místo  $d^k f(p, \mathbf{h})$  někdy píšeme jen  $d^k f(p)$ .

Například pro funkci tří proměnných má druhý diferenciál pro obecný přírůstkový vektor  $\mathbf{h} = (dx, dy, dz)$  následující tvar:

$$\begin{aligned} d^2 f(p) = & \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(p) dx^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(p) dy^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}(p) dz^2 + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(p) dx dy + \\ & + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z}(p) dx dz + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z}(p) dy dz. \end{aligned}$$

Druhý diferenciál bývá výhodné zapisovat v následujícím maticovém tvaru:

$$d^2 f = (dx_1, dx_2, \dots, dx_n) \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_2} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_2} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dx_1 \\ dx_2 \\ \vdots \\ dx_n \end{pmatrix}.$$

I v případě funkcí více proměnných bývá výhodné nahradit funkci v okolí nějakého bodu polynomem – stejně jako v případě jedné proměnné k tomu slouží Taylorův polynom:

**Definice 1.52.** Má-li funkce  $f$  spojitě parciální derivace až do řádu  $k$  na okolí  $U(p)$  bodu  $p$ , potom *Taylorovým polynomem* funkce  $f$  v bodě  $p$  nazýváme polynom

$$T_k(x) = f(p) + \frac{1}{1!} df(p, x - p) + \frac{1}{2!} d^2 f(p, x - p) + \dots + \frac{1}{k!} d^k f(p, x - p).$$

**Příklad 1.53.** Pro funkci dvou proměnných  $f(x, y)$  a obecný přírůstkový vektor  $\mathbf{h} = x - p = (x_1 - p_1, x_2 - p_2)$  má Taylorův polynom druhého stupně následující tvar:

$$\begin{aligned} T_k(x_1, x_2) = & f(p_1, p_2) + \frac{1}{1!} \left( \frac{\partial f}{\partial x_1}(p_1, p_2) (x_1 - p_1) + \frac{\partial f}{\partial x_2}(p_1, p_2) (x_2 - p_2) \right) + \frac{1}{2!} \cdot \\ & \cdot \left( \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(p_1, p_2) (x_1 - p_1)^2 + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}(p_1, p_2) (x_1 - p_1)(x_2 - p_2) + \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}(p_1, p_2) (x_2 - p_2)^2 \right). \end{aligned}$$

**Věta 1.54 (Taylorova).** Má-li funkce  $f$  spojité parciální derivace až do řádu  $k + 1$  na okolí  $U(p)$  bodu  $p$ , potom pro  $x = p + \mathbf{h} \in U(p)$  platí  $f(x) = T_k(x) + R_{k+1}(x)$ , tj.

$$f(p + \mathbf{h}) = f(p) + \frac{1}{1!} df(p, \mathbf{h}) + \frac{1}{2!} d^2 f(p, \mathbf{h}) + \cdots + \frac{1}{k!} d^k f(p, \mathbf{h}) + R_{k+1}(x),$$

$$\text{kde } R_{k+1} = \frac{1}{(k+1)!} d^{(k+1)} f(p + \xi \mathbf{h}, \mathbf{h}), \quad \text{a } \xi \text{ je jisté číslo z intervalu } (0, 1).$$

**Příklad 1.55.** Máme odhadnout chybu, které se dopustíme při výpočtu hodnoty  $1,94^2 \cdot e^{0,12}$  pomocí Taylorova polynomu 1. stupně (tedy pomocí diferenciálu).

**Řešení.** Hledané číslo je hodnota funkce  $f(x, y) = x^2 e^y$  pro  $x = (1,94; 0,12)$  a tento bod je blízký bodu  $(2, 0)$ ; položíme tedy  $p = (2, 0)$ ,  $\mathbf{h} = (dx, dy) = (-0,06; 0,12)$ . Počítejme potřebné parciální derivace:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x e^y, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = x^2 e^y; \quad \frac{\partial f}{\partial x}(2, 0) = 4, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(2, 0) = 4.$$

Tedy pro funkční hodnotu přibližně platí:

$$f(x) \doteq f(p) + \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy; \quad 1,94^2 \cdot e^{0,12} \doteq 4 + 4 \cdot (-0,06) + 4 \cdot 0,12 = 4,24.$$

Nyní odhadneme chybu. Druhý diferenciál funkce  $f(x, y) = x^2 e^y$  má tvar

$$\begin{aligned} d^2 f(x, y) &= \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} dx^2 x^2 + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} dx dy + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} dy^2 = \\ &= 2e^y dx^2 + 4xe^y dx dy + x^2 e^y dy^2. \end{aligned}$$

Pro zbytek  $R_2$  v Taylorově větě platí  $R_2 = \frac{1}{2} d^2 f(p + \xi \mathbf{h}, \mathbf{h})$ , takže pro  $x = p + \xi \mathbf{h}$ , tj.  $x = 2 - 0,06 \xi$ ,  $y = 0,12 \xi$  dostaneme

$$\begin{aligned} R_2 &= \frac{1}{2} \left( 0,0072 e^{0,12\xi} - 0,0288 (2 - 0,06\xi) e^{0,12\xi} + 0,0144 (2 - 0,06\xi)^2 e^{0,12\xi} \right) = \\ &= 0,0036 e^{0,12\xi} \left( 1 - 0,24 \xi + 0,0072 \xi^2 \right). \end{aligned}$$

$R_2$  můžeme chápat jako funkci jedné proměnné  $\xi$ , kde  $\xi \in (0, 1)$ ; máme tedy najít ohraničení jejího oboru hodnot. Platí

$$|R_2| = |0,0036 e^{0,12\xi} (1 - 0,24 \xi + 0,0072 \xi^2)| < 0,0036 e^{0,12} \cdot 1 < 0,0036 \cdot 2 = 0,0072.$$

Odhad jsme provedli takto: výraz má tvar konstanta krát součin dvou funkcí. První – exponenciála – je všude rostoucí, tedy na intervalu  $(0, 1)$  má hodnoty menší než je její hodnota v  $\xi = 1$ . Druhá funkce (v závorce) je na intervalu  $(0, 1)$  klesající (má zde zápornou první derivaci), tedy zde má všechny hodnoty menší než je její hodnota v  $\xi = 0$ . (Poněkud komplikovanějším výpočtem se dá zjistit, že celý výraz je na intervalu  $(0, 1)$  klesající funkcí, tedy odhad můžeme zpřesnit tak, že za horní odhad chyby vezmeme hodnotu celého výrazu pro  $\xi = 0$  – tedy  $|R_2| < 0,0036$ .)

Vidíme, že chyba je až na třetím desetinném místě (na kalkulačce  $1,94^2 \cdot e^{0,12} = 4,2434$ ).  $\square$

**Příklad 1.56.** Aproximujme funkci  $f(x, y) = \frac{\cos x}{\cos y}$  v okolí bodu  $p = (0, 0)$  polynomem druhého stupně.

**Řešení.** Funkci rozvineme do Taylorova polynomu. Potřebné parciální derivace jsou:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x} &= -\frac{\sin x}{\cos y}, & \frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) &= 0; & \frac{\partial f}{\partial y} &= \frac{\cos x \sin y}{\cos^2 y}, & \frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) &= 0; \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} &= -\frac{\cos x}{\cos y}, & \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0, 0) &= -1; & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} &= -\frac{\sin x \sin y}{\cos^2 y}, & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0, 0) &= 0; \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} &= \frac{\cos x (1 + \sin^2 y)}{\cos^3 y}, & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(0, 0) &= 1. \end{aligned}$$

Odtud

$$\begin{aligned} f(x, y) &\doteq f(0, 0) + \frac{1}{1!} \left( \frac{\partial f}{\partial x}(0, 0)(x - 0) + \frac{\partial f}{\partial y}(0, 0)(y - 0) \right) + \\ &+ \frac{1}{2!} \left( \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0, 0)(x - 0)^2 + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0, 0)(x - 0)(y - 0) + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(0, 0)(y - 0)^2 \right) \end{aligned}$$

tedy

$$\frac{\cos x}{\cos y} \doteq 1 + \frac{1}{2}(y^2 - x^2).$$

□

## 1.6 Vektorová analýza

Uvažujme nyní otevřenou množinu  $G \subset \mathbb{R}^3$  a funkci  $f : G \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f \in C_1(G)$ . Označíme-li  $\mathbf{i}$ ,  $\mathbf{j}$ ,  $\mathbf{k}$  vektory standardní báze prostoru  $V(\mathbb{R}^3)$ , pak platí pro bod  $p \in G$

$$\text{grad} f(p) = \left( \frac{\partial f}{\partial x}(p), \frac{\partial f}{\partial y}(p), \frac{\partial f}{\partial z}(p) \right) = \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \mathbf{i} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \mathbf{j} + \frac{\partial f}{\partial z} \cdot \mathbf{k}.$$

Jestliže  $f : G \rightarrow \mathbb{R}$  je skalární pole třídy  $C_1$  na  $G$ , pak zobrazení  $\text{grad} f : G \rightarrow V(\mathbb{R}^3)$  je vektorové pole definované na  $G$ .

Nechť  $f, g : G \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f, g \in C_1(G)$ ,  $\alpha \in \mathbb{R}$ , pak platí:

- 1)  $\text{grad}(f + g) = \text{grad} f + \text{grad} g$
- 2)  $\text{grad}(\alpha \cdot f) = \alpha \cdot \text{grad} f$
- 3)  $\text{grad}(f \cdot g) = f \cdot \text{grad} g + g \cdot \text{grad} f$

**Definice 1.57.** Nechť  $G \subset \mathbb{R}^3$  je otevřená množina,  $\vec{\mathbf{F}} = (F_1, F_2, F_3) : G \rightarrow V(\mathbb{R}^3)$  vektorové pole,  $\vec{\mathbf{F}} \in C_1(G)$ . *Divergencí* pole  $\vec{\mathbf{F}}$  nazýváme funkci  $\text{div} \vec{\mathbf{F}} : G \rightarrow \mathbb{R}$  definovanou předpisem

$$\text{div} \vec{\mathbf{F}} = \frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y} + \frac{\partial F_3}{\partial z}$$

Nechť  $\vec{\mathbf{F}}, \vec{\mathbf{H}} : G \rightarrow V(\mathbb{R}^3)$  jsou vektorová pole třídy  $C_1$  na  $G$ ,  $\alpha \in \mathbb{R}$ ,  $f : G \rightarrow \mathbb{R}$  funkce třídy  $C_1$  na  $G$ , pak platí:

- 1)  $\operatorname{div}(\vec{\mathbf{F}} + \vec{\mathbf{H}}) = \operatorname{div} \vec{\mathbf{F}} + \operatorname{div} \vec{\mathbf{H}}$
- 2)  $\operatorname{div}(\alpha \cdot \vec{\mathbf{F}}) = \alpha \cdot \operatorname{div} \vec{\mathbf{F}}$
- 3)  $\operatorname{div}(f \cdot \vec{\mathbf{F}}) = f \cdot \operatorname{div} \vec{\mathbf{F}} + \vec{\mathbf{F}} \cdot \operatorname{grad} f$

Ukažme si například platnost identity 3):

Označme  $L$ , resp.  $P$ , levou, resp. pravou stranu identity. Pak  $f \cdot \vec{\mathbf{F}} = (f \cdot F_1, f \cdot F_2, f \cdot F_3)$  a platí

$$\begin{aligned} L = \operatorname{div}(f \cdot \vec{\mathbf{F}}) &= \operatorname{div}(f \cdot F_1, f \cdot F_2, f \cdot F_3) = \frac{\partial(f \cdot F_1)}{\partial x} + \frac{\partial(f \cdot F_2)}{\partial y} + \frac{\partial(f \cdot F_3)}{\partial z} = \\ &= \frac{\partial f}{\partial x} \cdot F_1 + f \cdot \frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot F_2 + f \cdot \frac{\partial F_2}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial z} \cdot F_3 + f \cdot \frac{\partial F_3}{\partial z} = \\ &= f \cdot \left( \frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y} + \frac{\partial F_3}{\partial z} \right) + \left( \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial z} \right) \cdot (F_1, F_2, F_3) = \\ &= f \cdot \operatorname{div} \vec{\mathbf{F}} + \operatorname{grad} f \cdot \vec{\mathbf{F}} = P. \end{aligned}$$

Identita je dokázána.

Divergenci vektorového pole lze definovat obecně v  $\mathbb{R}^n$ :

**Definice 1.58.** Nechť  $\vec{\mathbf{F}} = (F_1, \dots, F_n) : G \rightarrow V(\mathbb{R}^n)$ ,  $G \subset \mathbb{R}^n$ , je vektorové pole třídy  $C_1$  na  $G$ , pak definujeme *divergenci*

$$\operatorname{div} \vec{\mathbf{F}} = \frac{\partial F_1}{\partial x_1} + \frac{\partial F_2}{\partial x_2} + \dots + \frac{\partial F_n}{\partial x_n}.$$

**Definice 1.59.** Nechť  $\vec{\mathbf{F}} = (F_1, F_2, F_3) : G \rightarrow V(\mathbb{R}^3)$ ,  $G \subset \mathbb{R}^3$ , je vektorové pole třídy  $C_1$  na otevřené množině  $G$ . *Rotací* vektorového pole  $\vec{\mathbf{F}}$  nazýváme vektorové pole definované předpisem

$$\operatorname{rot} \vec{\mathbf{F}} = \left( \frac{\partial F_3}{\partial y} - \frac{\partial F_2}{\partial z} \right) \mathbf{i} + \left( \frac{\partial F_1}{\partial z} - \frac{\partial F_3}{\partial x} \right) \mathbf{j} + \left( \frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \right) \mathbf{k}$$

**Poznámka 1.60.** Rotaci vektorového pole lze přehledně napsat pomocí symbolického determinantu třetího řádu

$$\operatorname{rot} \vec{\mathbf{F}} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ F_1 & F_2 & F_3 \end{vmatrix},$$

kde každý součin, např.  $\mathbf{i} \left( \frac{\partial}{\partial y} \right) F_3$ , chápeme jako parciální derivaci násobenou vektorem standardní báze, tedy  $\frac{\partial F_3}{\partial y} \mathbf{i}$ .

Výhodnější je však počítat rotaci vektorového pole  $\vec{\mathbf{F}}$  rozvojem výše uvedeného determinantu podle prvního řádku, viz následující příklad.

**Příklad 1.61.** Vypočtěte rotaci vektorového pole  $\vec{\mathbf{F}} = (xyz, x + y + z, xz^2)$ .

**Řešení.**

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \vec{\mathbf{F}} &= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ xyz & x + y + z & xz^2 \end{vmatrix} = \mathbf{i} \cdot \left( \frac{\partial(xz^2)}{\partial y} - \frac{\partial(x + y + z)}{\partial z} \right) - \\ &\quad - \mathbf{j} \cdot \left( \frac{\partial(xz^2)}{\partial x} - \frac{\partial(xyz)}{\partial z} \right) + \mathbf{k} \cdot \left( \frac{\partial(x + y + z)}{\partial x} - \frac{\partial(xyz)}{\partial y} \right) = \\ &= \mathbf{i} \cdot (0 - 1) - \mathbf{j} \cdot (z^2 - xy) + \mathbf{k} \cdot (1 - xz) = \underline{(-1, xy - z^2, 1 - xz)}. \end{aligned}$$

□

Nechť  $\vec{\mathbf{F}}, \vec{\mathbf{H}} : G \rightarrow V(\mathbb{R}^3)$ ,  $G \subset \mathbb{R}^3$ , jsou vektorová pole třídy  $C_1$  na otevřené množině  $G$ ,  $f : G \rightarrow \mathbb{R}$  funkce třídy  $C_1$  na  $G$ , pak platí:

- 1)  $\operatorname{rot}(\vec{\mathbf{F}} + \vec{\mathbf{H}}) = \operatorname{rot} \vec{\mathbf{F}} + \operatorname{rot} \vec{\mathbf{H}}$
- 2)  $\operatorname{rot}(f \cdot \vec{\mathbf{H}}) = f \cdot \operatorname{rot} \vec{\mathbf{H}} + (\operatorname{grad} f) \times \vec{\mathbf{H}}$
- 3)  $\operatorname{div}(\vec{\mathbf{F}} \times \vec{\mathbf{H}}) = \vec{\mathbf{H}} \cdot \operatorname{rot} \vec{\mathbf{F}} - \vec{\mathbf{F}} \cdot \operatorname{rot} \vec{\mathbf{H}}$
- 4)  $\operatorname{rot} \operatorname{grad} f = \mathbf{o}$
- 5)  $\operatorname{div} \operatorname{rot} \vec{\mathbf{F}} = 0$
- 6)  $\operatorname{div} \operatorname{grad} f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$

V tvrzeních 4), 5), 6) je třeba, aby  $f, \vec{\mathbf{F}} \in C_2(G)$ .

Ukažme si například platnost identity 2):

$f \cdot \vec{\mathbf{H}} = (f \cdot H_1, f \cdot H_2, f \cdot H_3)$  a platí

$$\begin{aligned} L = \operatorname{rot}(f \cdot \vec{\mathbf{H}}) &= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ f \cdot H_1 & f \cdot H_2 & f \cdot H_3 \end{vmatrix} = \mathbf{i} \cdot \left( \frac{\partial(f \cdot H_3)}{\partial y} - \frac{\partial(f \cdot H_2)}{\partial z} \right) - \\ &\quad - \mathbf{j} \cdot \left( \frac{\partial(f \cdot H_3)}{\partial x} - \frac{\partial(f \cdot H_1)}{\partial z} \right) + \mathbf{k} \cdot \left( \frac{\partial(f \cdot H_2)}{\partial x} - \frac{\partial(f \cdot H_1)}{\partial y} \right) = \\ &= \mathbf{i} \cdot \left( \frac{\partial f}{\partial y} \cdot H_3 + f \cdot \frac{\partial H_3}{\partial y} - \frac{\partial f}{\partial z} \cdot H_2 - f \cdot \frac{\partial H_2}{\partial z} \right) - \mathbf{j} \cdot \left( \frac{\partial f}{\partial x} \cdot H_3 + f \cdot \frac{\partial H_3}{\partial x} - \right. \\ &\quad \left. - \frac{\partial f}{\partial z} \cdot H_1 - f \cdot \frac{\partial H_1}{\partial z} \right) + \mathbf{k} \cdot \left( \frac{\partial f}{\partial x} \cdot H_2 + f \cdot \frac{\partial H_2}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y} \cdot H_1 - f \cdot \frac{\partial H_1}{\partial y} \right) = \\ &= f \cdot \left( \mathbf{i} \cdot \left( \frac{\partial H_3}{\partial y} - \frac{\partial H_2}{\partial z} \right) - \mathbf{j} \cdot \left( \frac{\partial H_3}{\partial x} - \frac{\partial H_1}{\partial z} \right) + \mathbf{k} \cdot \left( \frac{\partial H_2}{\partial x} - \frac{\partial H_1}{\partial y} \right) \right) + \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
& +\mathbf{i} \cdot \left( \frac{\partial f}{\partial y} \cdot H_3 - \frac{\partial f}{\partial z} \cdot H_2 \right) - \mathbf{j} \cdot \left( \frac{\partial f}{\partial x} \cdot H_3 - \frac{\partial f}{\partial z} \cdot H_1 \right) + \mathbf{k} \cdot \left( \frac{\partial f}{\partial x} \cdot H_2 - \frac{\partial f}{\partial y} \cdot H_1 \right) = \\
& = f \cdot \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ H_1 & H_2 & H_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} & \frac{\partial f}{\partial z} \\ H_1 & H_2 & H_3 \end{vmatrix} = f \cdot \operatorname{rot} \vec{\mathbf{H}} + (\operatorname{grad} f) \times \vec{\mathbf{H}} = P.
\end{aligned}$$

Identita je dokázána.

**Definice 1.62.** Nechť nyní  $\vec{\mathbf{F}} = (F_1, F_2) : G \rightarrow V(\mathbb{R}^2)$ ,  $G \subset \mathbb{R}^2$ , je třídy  $C_1$  na otevřené množině  $G$ . *Rotací rovinného pole*  $\vec{\mathbf{F}}$  nazýváme skalární pole

$$\operatorname{rot} \vec{\mathbf{F}} = \frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y}.$$

V aplikacích se používá operátor  $\nabla$  (čteme „nabla“), zavedený anglickým matematikem W. R. Hamiltonem:

$$\nabla = \left( \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial}{\partial z} \mathbf{k},$$

pomocí něhož lze  $\operatorname{grad} f$ ,  $\operatorname{div} \vec{\mathbf{F}}$ ,  $\operatorname{rot} \vec{\mathbf{F}}$  formálně zapsat:

V teorii parciálních diferenciálních rovnic se setkáváme s *Laplaceovým operátorem*  $\Delta$  definovaným předpisem

$$\Delta f = \operatorname{div} \operatorname{grad} f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}.$$

Platí tedy  $\Delta = \nabla \cdot \nabla$  („skalární součin nabla operátorů“).

Samozřejmě analogickým způsobem jako u zavedení  $\operatorname{div} \vec{\mathbf{F}}$  v  $\mathbb{R}^n$  můžeme v  $\mathbb{R}^n$  zavést nabla operátor  $\nabla$  i Laplaceův operátor  $\Delta$ .

## Maplety

Odkaz na maplety k procvičení diferenciálního počtu funkce více proměnných:

1. [parciální derivace](#),
2. [výpočet tečné roviny](#),
3. [gradient funkce](#).

## Cvičení

1. Vypočítejte následující limity:

$$\begin{array}{ll} \text{a)} \quad \lim_{(x,y) \rightarrow (1,3)} \frac{x^2 y}{4x^2 - y}, & \text{b)} \quad \lim_{(x,y) \rightarrow (2,-1)} \frac{1 - \sqrt{(x-2)(y+1) + 1}}{(x-2)(y+1)}, \\ \text{c)} \quad \lim_{(x,y) \rightarrow (\pi,1)} \frac{\cos xy}{y^2 + 1}, & \text{d)} \quad \lim_{(x,y) \rightarrow (0,-1)} \left(1 + x \sin \frac{1}{y+1}\right)^{x \sin \frac{1}{y+1}}, \\ \text{e)} \quad \lim_{(x,y,z) \rightarrow (1,0,2)} \frac{4xz}{y^2 + z^2}, & \text{f)} \quad \lim_{(x,y,z) \rightarrow (1,1,0)} \frac{e^{2(x+y-z)} - 1}{e^{x+y-z} - 1}. \end{array}$$

2. Ukažte, že neexistuje limita  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{3x^2}{x^2 + y^2}$ .

3. Zjistěte body nespojitosti následujících funkcí:

$$\text{a)} \quad f(x, y) = \frac{x^2 + 3y^2 + 5}{y^2 - 2x}, \quad \text{b)} \quad f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^3 y - xy^3}{x^2 - y^2}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & (x, y) = (0, 0) \end{cases}.$$

4. Vypočtěte derivaci funkce  $f : G \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $G \subset \mathbb{R}^n$  v bodě  $p \in G$  podle vektoru  $\mathbf{u} \in V(\mathbb{R}^n)$ , když

$$\begin{array}{ll} \text{a)} \quad f(x, y) = x^y, \quad p = (1, 0), \quad \mathbf{u} = (1, 1) \\ \text{b)} \quad f(x, y, z) = x^3 + y^2 + z^3 - 3xyz, \quad p = (1, 0, 1), \quad \mathbf{u} = \left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right) \end{array}$$

5. Zjistěte, zda existuje parciální derivace  $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0, 0)$  funkce  $f$  zadané předpisem

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{2xy}{x^2 + y^2}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

6. Najděte přírůstek funkce (diferenci)  $\Delta f$  a diferenciál  $df$  funkce  $f(x, y) = 4x^2 + 2xy - y^2 + 2$ , jestliže z bodu  $p = (3, -1)$  přejdeme do bodu  $x = (-1, 2)$ .

7. Vyjádřete diferenciál funkce  $f$  v bodě  $p = (x, y) \neq (0, 0)$  resp.  $p = (x, y, z) \neq (0, 0, 0)$ , je-li  $f(x, y)$  resp.  $f(x, y, z)$  rovno:

$$\begin{array}{lll} \text{a)} \quad x^2 - 2xy + y^2, & \text{b)} \quad \ln \sqrt{x^2 + y^2}, & \text{c)} \quad \arctg \frac{x-y}{x+y}, \\ \text{d)} \quad \sqrt{x^2 + y^2 + y^2}, & \text{e)} \quad e^{ax} \cos b \frac{y}{z}, & \text{f)} \quad 3x^{yz}. \end{array}$$

8. Vypočtěte Jacobiovu matici zobrazení

$$\begin{array}{ll} \text{a)} \quad \Psi = (\Psi_1, \Psi_2) : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad \Psi(x, y, z) = (x^2 y z, y \sin(x + z)) \\ \text{b)} \quad \Psi = (\Psi_1, \Psi_2) : G \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad G = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \neq 0, y \neq 0\}, \quad \Psi(x, y) = \left(\frac{x}{y}, \frac{y}{x}, xy\right) \end{array}$$

9. Najděte  $d^3 f(X)$  pro  $\mathbf{h} = (dx, dy, dz)$ , je-li  $f(x, y, z)$  rovno

$$\text{a)} \quad xyz, \quad \text{b)} \quad \sin(x^2 + y^2), \quad \text{c)} \quad \ln(x^x y^y z^z).$$

10. Najděte Taylorův polynom funkce  $f$  v bodě  $p$  pro dané  $n$ :

a)  $f(x, y) = 3x^2 - 2xy + y^2 - 2x - 3y + 1, \quad p = (1, 2), \quad n = 3,$

b)  $f(x, y) = x^3 + y^3 - 2xy, \quad p = (1, 1), \quad n = 2, \quad n = 3.$

11. Najděte Taylorův polynom funkce  $f$  v bodě  $p = (0, 0)$  pro dané  $n$ :

a)  $f(x, y) = \frac{1}{1 - x - y + xy}, \quad n = 2,$

b)  $f(x, y) = \cos(x^2 + y^2), \quad n = 5,$

c)  $f(x, y) = e^x \sin y, \quad n = 3,$

d)  $f(x, y) = \ln(1 - x) \ln(1 - y), \quad n = 3.$

12. Najděte Taylorův polynom třetího stupně funkce  $f(x, y, z) = \sin x \sin y \sin z$  v bodě  $p = (\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4})$ .

13. Nahraďte funkci  $f(x, y) = x^y$  v okolí bodu  $p = (1, 1)$  polynomem třetího stupně. Pomocí tohoto polynomu určete přibližně  $(1, 1)^{1,02}$ .

14. Vypočítejte divergenci vektorových polí  $\vec{\mathbf{F}} : \mathbb{R}^3 \rightarrow V(\mathbb{R}^3)$ :

a)  $\vec{\mathbf{F}}(x, y, z) = xyz \mathbf{i} + (2x + 3y + z)\mathbf{j} + (x^2 + y^2)\mathbf{k}$

b)  $\vec{\mathbf{F}}(x, y, z) = (6x^2y^2 - z^3 + yz - 5)\mathbf{i} + (4x^3y + xz + 2)\mathbf{j} + (xy - 3xz^2 - 3)\mathbf{k}$

15. Nechť  $f, g : G \rightarrow \mathbb{R}, G \subset \mathbb{R}^3$ , vypočítejte a)  $\operatorname{div}(f \operatorname{grad} f)$  a b)  $\operatorname{div}(f \operatorname{grad} g)$ .

16. Vypočítejte rotaci vektorového pole  $\vec{\mathbf{F}}$ :

a)  $\vec{\mathbf{F}}(x, y, z) = y^2z \mathbf{i} + z^2x \mathbf{j} + x^2y \mathbf{k}$

b)  $\vec{\mathbf{F}}(x, y, z) = xyz \mathbf{i} + (2x + 3y - z)\mathbf{j} + (x^2 + y^2)\mathbf{k}$

17. Dokažte, že pro vektorové pole  $\vec{\mathbf{F}} = (F_1, F_2, F_3)$  platí

$$\operatorname{rot}(\operatorname{rot} \vec{\mathbf{F}}) = \operatorname{grad}(\operatorname{div} \vec{\mathbf{F}}) - \Delta \vec{\mathbf{F}}, \quad \text{kde} \quad \Delta \vec{\mathbf{F}} = \Delta F_1 \mathbf{i} + \Delta F_2 \mathbf{j} + \Delta F_3 \mathbf{k}.$$

## Výsledky

1. a) 3  
b)  $\frac{1}{2}$   
c)  $-\frac{1}{2}$   
d)  $e^2$   
e) 2  
f)  $e^2 + 1$

2. Provedte zúžení funkce na přímky procházející počátkem  $y = kx$ .

3. a)  $y^2 = 2x$ ,  
b) všude spojitá.
4. a)  $f'_{\mathbf{u}}(1, 0) = 0$   
b)  $f'_{\mathbf{u}}(1, 0, 1) = 1$
5.  $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0, 0)$  neexistuje.
6.  $\Delta f = -33$ ,  $df = -96$
- 7.
8. a)  $\Psi' = \begin{pmatrix} 2xyz & x^2z & x^2y \\ y \cos(x+z) & \sin(x+z) & y \cos(x+z) \end{pmatrix}$   
b)  $\Psi' = \begin{pmatrix} \frac{1}{y} & -\frac{x}{y^2} \\ -\frac{y}{x^2} & \frac{1}{x} \\ y & x \end{pmatrix}$
9. a)  $6dx dy dz$   
b)  $-12 \sin(x^2 + y^2)(x dx + y dy)(dx^2 + dy^2) - 8 \cos(x^2 + y^2)(x dx + y dy)^3$   
c)  $-\frac{1}{x^2} dx^3 - \frac{1}{y^2} dy^3 - \frac{1}{z^2} dz^3$
10. a)  $-2 - y + (y - 2)^2 - 2(x - 1)(y - 2) + 3(x - 1)^2$   
b)  $y - 2 + x + 3(x - 1)^2 + 3(y - 1)^2 - 2(x - 1)(y - 1)$ ,  $y - 2 + x + 3(x - 1)^2 + 3(y - 1)^2 - 2(x - 1)(y - 1) + (x - 1)^3 + (y - 1)^3$
11. a)  $1 + y + x + x^2 + xy + y^2$   
b)  $1 - \frac{1}{2}x^4 - y^2x^2 - \frac{1}{2}y^4$   
c)  $y + xy - \frac{1}{6}y^3 + \frac{1}{2}x^2y$   
d)  $xy + \frac{1}{2}xy^2 + \frac{1}{2}x^2y$
12.  $\frac{\sqrt{2}}{4}(1 + (x - \frac{\pi}{4}) + (z - \frac{\pi}{4}) + (y - \frac{\pi}{4}) - \frac{1}{2}(x - \frac{\pi}{4})^2 + (y - \frac{\pi}{4})(x - \frac{\pi}{4}) + (z - \frac{\pi}{4})(x - \frac{\pi}{4}) - \frac{1}{2}(z - \frac{\pi}{4})^2 + (y - \frac{\pi}{4})(z - \frac{\pi}{4}) - \frac{1}{2}(y - \frac{\pi}{4})^2 - \frac{1}{6}(x - \frac{\pi}{4})^3 - \frac{1}{2}(y - \frac{\pi}{4})(x - \frac{\pi}{4})^2 - \frac{1}{2}(z - \frac{\pi}{4})(x - \frac{\pi}{4})^2 - \frac{1}{2}(y - \frac{\pi}{4})^2(x - \frac{\pi}{4}) + (z - \frac{\pi}{4})(y - \frac{\pi}{4})(x - \frac{\pi}{4}) - \frac{1}{2}(z - \frac{\pi}{4})^2(x - \frac{\pi}{4}) - \frac{1}{6}(z - \frac{\pi}{4})^3 - \frac{1}{6}(y - \frac{\pi}{4})^3 - \frac{1}{2}(y - \frac{\pi}{4})^2(z - \frac{\pi}{4}) - \frac{1}{2}(y - \frac{\pi}{4})(z - \frac{\pi}{4})^2)$
13.  $1 + (x - 1) + (x - 1)(y - 1) + \frac{1}{2}(x - 1)^2(y - 1)$ ,  
 $1 + 0,1 + 0,1 \cdot 0,02 + 0,5 \cdot 0,01 \cdot 0,02 = 1,1021$
14. a)  $\operatorname{div} \vec{\mathbf{F}} = yz + 3$   
b)  $\operatorname{div} \vec{\mathbf{F}} = 12xy^2 + 4x^3 - 6xz$
15. a)  $\operatorname{div}(f \operatorname{grad} f) = |\operatorname{grad} f|^2 + f \cdot \Delta f$   
b)  $\operatorname{div}(f \operatorname{grad} g) = \operatorname{grad} f \cdot \operatorname{grad} g + f \cdot \Delta g$
16. a)  $\operatorname{rot} \vec{\mathbf{F}} = (x^2 - 2xz) \mathbf{i} + (y^2 - 2xy) \mathbf{j} + (z^2 - 2yz) \mathbf{k}$   
b)  $\operatorname{rot} \vec{\mathbf{F}} = (2y + 1) \mathbf{i} + (xy - 2x) \mathbf{j} + (2 - xz) \mathbf{k}$

## 2 Extrémy funkce více proměnných

### 2.1 Lokální extrémy funkce více proměnných

**Definice 2.1.** Řekneme, že funkce  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $A \subset \mathbb{R}^n$  má v bodě  $p \in A$  *lokální maximum* (resp. *minimum*), jestliže existuje okolí  $U_\delta(p)$  tak, že platí

$$\forall x \in P_\delta(p) : f(x) \leq f(p) \quad (\text{resp. } f(x) \geq f(p)).$$

V případě, že platí ostré nerovnosti, říkáme, že lokální maximum (minimum) je *ostré*. Lokální maximum a minimum se nazývá společným pojmem *lokální extrém*.

Pod pojmem lokální extrém budeme nadále rozumět ostré lokální extrémy, v případě neostrých extrémů na to upozorníme.

#### 2.1.1 Nutná podmínka pro extrém

**Věta 2.2. (Fermatova)** *Nechť  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$  je hladká na nějakém okolí  $U_\delta(p)$  bodu  $p$  a nechť má funkce  $f$  v bodě  $p$  lokální extrém. Pak platí:*

$$\text{grad}f(p) = f'(p) = \mathbf{0}.$$

#### 2.1.2 Postačující podmínka pro extrém

**Definice 2.3.** Platí-li v bodě  $p$  vztah  $\text{grad}f(p) = \mathbf{0}$ , říkáme, že  $p$  je *stacionární bod* funkce  $f$ . Stacionární bod, ve kterém extrém nenastane, se nazývá *sedlový bod*.

**Věta 2.4.** *Nechť  $p$  je stacionárním bodem funkce  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ . Pak platí-li pro každý nenulový přírůstkový vektor  $\mathbf{h}$*

- 1)  $d^2f(p, \mathbf{h}) > 0$ , je v bodě  $a$  lokální minimum,
- 2)  $d^2f(p, \mathbf{h}) < 0$ , je v bodě  $a$  lokální maximum,
- 3)  $d^2f(p, \mathbf{h}) \geq 0$ , extrém v bodě  $a$  může a nemusí nastat,
- 4)  $d^2f(p, \mathbf{h}) \leq 0$ , extrém v bodě  $a$  může a nemusí nastat.

*Jestliže pro některé  $\mathbf{h}$  je  $d^2f(p, \mathbf{h}) > 0$  a pro jiné  $\mathbf{h}$  je  $d^2f(p, \mathbf{h}) < 0$ , extrém nenastane.*

**Poznámka 2.5.** Druhý diferenciál můžeme napsat ve tvaru  $d^2 f(p, \mathbf{h}) = \mathbf{h}^T \cdot f''(p) \cdot \mathbf{h}$ . Například pro funkci  $f$  tří proměnných se spojitými parciálními derivacemi alespoň druhého řádu můžeme druhý diferenciál napsat ve tvaru

$$d^2 f = [dx, dy, dz] \cdot \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z} & \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z} & \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} dx \\ dy \\ dz \end{pmatrix}.$$

Označme determinant matice  $f''$  jako  $D_n$  a jeho subdeterminanty obsahující prvních  $k$  řádků a sloupců tohoto determinantu jako  $D_k$ , je tedy

$$D_1 = \left| \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \right|, \quad D_2 = \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \end{vmatrix}, \quad \dots, \quad D_n = |f''|.$$

Pomocí těchto determinantů můžeme obvykle rozhodnout, zda ve stacionárním bodě nastane extrém a jaký:

**Věta 2.6. (Sylvestrovo kritérium)** *Nechť  $f$  je funkce  $n$  proměnných a bod  $p \in \mathbb{R}^n$  je stacionárním bodem funkce  $f$ .*

- Jsou-li v bodě  $p$  subdeterminanty  $D_1, D_2, \dots, D_n$  matice  $f''$  všechny kladné, má funkce  $f$  v bodě  $p$  lokální minimum.
- Jsou-li v bodě  $p$  subdeterminanty  $D_1, D_3, \dots$  záporné a subdeterminanty  $D_2, D_4, \dots$  kladné (tedy jsou střídavě záporné a kladné s  $D_1$  záporným), má funkce  $f$  v bodě  $p$  lokální maximum.
- Je-li některý subdeterminant se sudým indexem v bodě  $p$  záporný, potom v bodě  $p$  extrém nenastane.
- Je-li některý subdeterminant s lichým indexem kladný a jiný záporný, extrém nenastane.

Je-li některý subdeterminant v bodě  $p$  roven nule a předchozí dvě podmínky extrém nevyšloučily, nelze pomocí tohoto kritéria o existenci extrému rozhodnout.

**Příklad 2.7.** Vyšetřete lokální extrémy funkce  $f(x, y) = x^3 + y^3 - 3xy$ .

**Řešení.** Hledejme stacionární body – body, ve kterých má funkce nulový gradient:

$$\text{grad} f = (3x^2 - 3y, 3y^2 - 3x) = \mathbf{0} \Rightarrow \begin{cases} y = x^2 \\ x = y^2 \end{cases} \Rightarrow x = x^4 \Leftrightarrow x(x^3 - 1) = 0$$

Dostáváme dva stacionární body  $p_1 = (0, 0)$ ,  $p_2 = (1, 1)$ . Vyšetříme druhý diferenciál v těchto bodech:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 6x, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = -3, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 6y; \quad d^2 f = 6x dx^2 - 6 dx dy + 6y dy^2;$$

Druhá derivace má tvar

$$f'' = \begin{pmatrix} 6x & -3 \\ -3 & 6y \end{pmatrix}; \quad f''(p_1) = \begin{pmatrix} 0 & -3 \\ -3 & 0 \end{pmatrix}; \quad f''(p_2) = \begin{pmatrix} 6 & -3 \\ -3 & 6 \end{pmatrix};$$

Podle Sylvestrova kriteria máme zjistit znaménka příslušných determinantů:

$$D_2(p_1) = |f''(p_1)| = -9 < 0 \Rightarrow \text{v bodě } p_1 \text{ extrém nenastane};$$

$$D_2(p_2) = |f''(p_2)| = 27 > 0 \Rightarrow \text{v bodě } p_2 \text{ extrém může nastat};$$

$$D_1(p_2) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(p_2) = 6 > 0 \Rightarrow \text{v bodě } p_2 \text{ nastane minimum.}$$

□

**Příklad 2.8.** Vyšetřete lokální extrémy funkce  $f(x, y, z) = x^3 + y^2 + \frac{1}{2}z^2 - 3xz - 2y + 2z$ .

**Řešení.**  $\text{grad}f(x, y, z) = (3x^2 - 3z, 2y - 2, z - 3x + 2) = \mathbf{0} \Rightarrow$  dva stacionární body  $p_1 = (1, 1, 1)$ ,  $p_2 = (2, 1, 4)$ .

$$f'' = \begin{pmatrix} 6x & 0 & -3 \\ 0 & 2 & 0 \\ -3 & 0 & 1 \end{pmatrix}; \quad \begin{array}{lll} D_3(p_1) = -6 & D_2(p_1) = 12 & D_1(p_1) = 6 \Rightarrow \text{neexistuje} \\ D_3(p_2) = 6 & D_2(p_2) = 24 & D_1(p_2) = 12 \Rightarrow \text{minimum} \end{array}$$

□

## 2.2 Vázané extrémy

**Definice 2.9.** Nechť  $M \subset \mathbb{R}^n$  je libovolná množina,  $p \in M$ . Řekneme, že funkce  $f : M \rightarrow \mathbb{R}$  má v bodě  $p$  *lokální maximum (resp. minimum) vzhledem k množině  $M$* , jestliže existuje okolí  $U(p)$  tak, že platí:

$$\forall x \in (U(p) \cap M) \quad \text{je } f(x) \leq f(p) \quad (\text{resp. } f(x) \geq f(p)).$$

Nejčastěji se vyšetřují extrémy, kdy množina je popsána podmínkami ve tvaru rovností; pak hovoříme o *vázaných extrémech* a podmínky nazýváme *vazbami*. Funkci, jejíž extrém hledáme, nazýváme někdy *účelovou funkcí*.

Budeme vyšetřovat úlohy, ve kterých mají podmínky takový tvar, že z nich lze některé proměnné explicitně vyjádřit, eventuálně vazební podmínku umíme vyjádřit v parametrickém tvaru. Potom můžeme dosadit za vyjádřené proměnné a hledat lokální extrémy vzniklé funkce méně proměnných.

**Příklad 2.10.** Rozložme kladné číslo  $a$  na čtyři kladné sčítance tak, aby jejich součin byl maximální.

**Řešení.** Hledáme extrém (maximum) funkce

$$f(x, y, z, u) = xyzu \quad \text{za podmínky } x + y + z + u = a, \quad x > 0, \quad y > 0, \quad z > 0, \quad u > 0.$$

Z vazební podmínky vyjádříme proměnnou  $u$ , dosadíme do účelové funkce a dostáváme formalizaci

$$F(x, y, z) = xyz(a - x - y - z) \rightarrow \text{maximum}, \quad x > 0, y > 0, z > 0.$$

Hledáme body, ve kterých platí

$$F' = (yz(a - 2x - y - z), xz(a - x - 2y - z), xy(a - x - y - 2z)) = \mathbf{0}.$$

Vzhledem k tomu, že žádná proměnná nemůže být rovna nule, řešíme soustavu

$$\begin{aligned} 2x + y + z &= a \\ x + 2y + z &= a \\ x + y + 2z &= a \end{aligned} \Rightarrow x = y = z = \frac{a}{4} (= u)$$

Dostáváme stacionární bod  $p = \left(\frac{a}{4}, \frac{a}{4}, \frac{a}{4}\right)$ .

Z charakteru úlohy vyplývá, že jsme našli řešení úlohy; přesto se přesvědčíme pomocí Sylvestrova kriteria, že se jedná o maximum:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} &= -2yz, & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} &= z(a - 2x - 2y - z); & \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(p) &= \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(p) = \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}(p) = -\frac{a^2}{8}, \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} &= -2xz, & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z} &= y(a - 2x - y - 2z); & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(p) &= f''_{xz}(p) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z}(p) = -\frac{a^2}{16}. \\ \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} &= -2xy, & \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z} &= x(a - x - 2y - 2z); \end{aligned}$$

$$f''(p) = \left(-\frac{a^2}{16}\right)^3 \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix},$$

$$D_3(p) = -\frac{a^6}{4^6} \cdot 6 < 0, \quad D_2(p) = \frac{a^4}{4^4} \cdot 3 > 0, \quad D_1(p) = -\frac{a^2}{8} < 0.$$

V bodě  $p$  nastane maximum  $f(p) = \frac{a^4}{4^4}$ . Číslo je třeba rozdělit na čtyři stejné díly.  $\square$

**Příklad 2.11.** Máme najít extrémy funkce  $f(x, y) = xy$  za podmínky  $x^2 + y^2 = 2$ .

**Řešení.** V tomto případě nemůžeme vyjádřit z podmínky žádnou proměnnou jednoznačně, je vhodnější použít parametrické rovnice. Podmínka je rovnice kružnice se středem v počátku a poloměrem  $\sqrt{2}$ , parametrické rovnice mají tedy tvar

$$x = \sqrt{2} \cos t, \quad y = \sqrt{2} \sin t, \quad t \in \langle 0, 2\pi \rangle.$$

Dosadíme do účelové funkce a dostaneme funkci

$$g(t) = f(\sqrt{2} \cos t, \sqrt{2} \sin t) = 2 \cos t \sin t = \sin 2t.$$



Úlohu jsme převedli na problém nalezení největší a nejmenší hodnoty funkce jedné proměnné  $t$  na uzavřeném intervalu  $t \in \langle 0, 2\pi \rangle$ .

$$g'(t) = 2 \cos 2t, \quad g'(t) = 0 \Rightarrow 2t = \frac{\pi}{2} + k\pi \Rightarrow t = \frac{\pi}{4} + k \frac{\pi}{2}.$$

Z nalezených stacionárních bodů leží v daném intervalu čtyři, a to

$$t_1 = \frac{\pi}{4}, \quad t_2 = \frac{3\pi}{4}, \quad t_3 = \frac{5\pi}{4}, \quad t_4 = \frac{7\pi}{4}.$$

Vzhledem k tomu, že funkce  $g$  je na intervalu  $\langle 0, 2\pi \rangle$  spojitá, má zde největší a nejmenší hodnotu, a to buď ve stacionárních bodech, nebo v krajních bodech intervalu. Stačí tedy porovnat funkční hodnoty v těchto bodech:

$$g(t_1) = \sin\left(2 \cdot \frac{\pi}{4}\right) = 1, \quad g(t_2) = \sin\left(2 \cdot \frac{3\pi}{4}\right) = -1,$$

$$g(t_3) = \sin\left(2 \cdot \frac{5\pi}{4}\right) = 1, \quad g(t_4) = \sin\left(2 \cdot \frac{7\pi}{4}\right) = -1, \quad g(0) = g(2\pi) = 0.$$

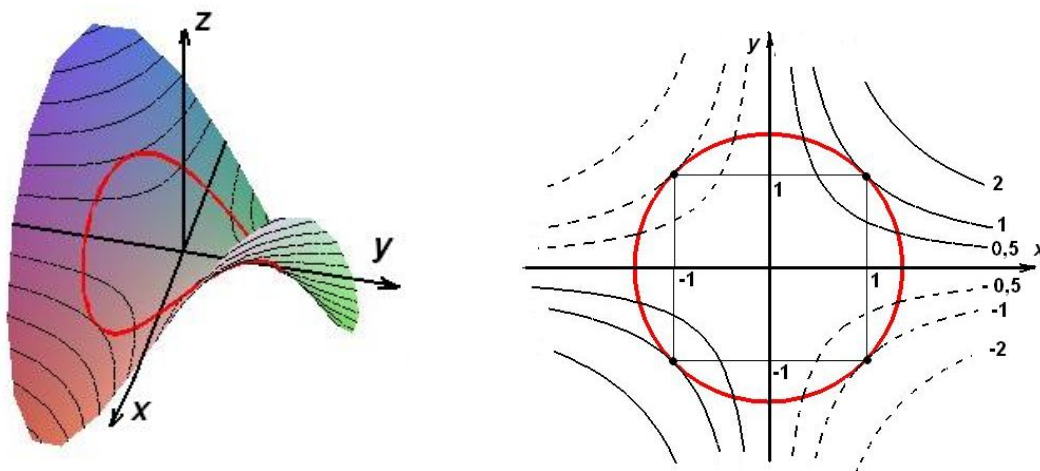
Funkce  $g$  má maximum 1 v bodech  $t_1$  a  $t_3$ , minimum  $-1$  v bodech  $t_2$  a  $t_4$ .

Funkce  $f$  má vázané lokální maximum 1 v bodech  $p_1$  a  $p_2$ , kde

$$p_1 = (\sqrt{2} \cos t_1, \sqrt{2} \sin t_1) = (1, 1), \quad p_2 = (\sqrt{2} \cos t_3, \sqrt{2} \sin t_3) = (-1, -1),$$

a vázané lokální minimum  $-1$  v bodech  $p_3$  a  $p_4$ , kde

$$p_3 = (\sqrt{2} \cos t_2, \sqrt{2} \sin t_2) = (-1, 1), \quad p_4 = (\sqrt{2} \cos t_4, \sqrt{2} \sin t_4) = (1, -1).$$



Obr. 2.1:  $z = xy, x^2 + y^2 = 2$

Pro lepší pochopení si prohlédnete 3-d obrázek.

□

## 2.3 Absolutní extrémý

*Absolutní extrémý* jsou největší a nejmenší hodnoty funkce na množinách zpravidla stejné dimenze jako definiční obor funkce (obvykle popsané nerovnostmi). Jejich existenci zaručuje následující věta:

**Věta 2.12. (Weierstrassova)** *Spojité funkce nabývá na uzavřené oblasti svého absolutního maxima a minima.*

Při hledání absolutních extrémů se budeme opírat o větu:

**Věta 2.13.** *Jestliže funkce  $f$  je hladká v oblasti  $M$  a spojitá v  $M$  i na hranici  $hM$ , potom nabývá své největší a nejmenší hodnoty (tj. absolutních extrémů) buď ve stacionárních bodech uvnitř oblasti, nebo v hraničních bodech.*

V prvním případě jde tedy o hledání volných lokálních extrémů a ve druhém o hledání vázaných extrémů, kde rovnice hranice je vazební podmínkou.

**Příklad 2.14.** Najděte největší a nejmenší hodnotu funkce  $f(x, y) = x^2 - 2y^2 + 4xy - 6x - 1$  na množině  $\{(x, y) \mid x \geq 0, 0 \leq y \leq 3 - x\}$ .

**Řešení.** Funkce je spojitá a je množina uzavřená oblast, proto absolutní extrémy mohou nastat buď v stacionárních bodech uvnitř zadané množiny, nebo v stacionárních bodech pro vázané extrémy na úsečkách

$$\{x = 0, y \in (0, 3)\},$$

$$\{y = 0, x \in (0, 3)\}$$

$$\{y = 3 - x, x \in (0, 3)\}$$

nebo ve vrcholech trojúhelníka. Stačí najít příslušné stacionární body, vypočítat v nich funkční hodnoty a porovnat s hodnotami ve vrcholech. V bodě, kde bude hodnota největší resp. nejmenší, je absolutní maximum resp. minimum. Stacionární body uvnitř množiny:

$$f' = (2x + 4y - 6, -4y + 4x) = \mathbf{0} \Rightarrow p_1 = (1, 1), f(p_1) = -4$$

Vázané extrémy:

$$f(0, y) = f_1(y) = -2y^2 - 1,$$

$$y \in (0, 3); \quad f'_1 = -4y = 0 \Rightarrow y = 0,$$

$$f(x, 0) = f_2(x) = x^2 - 6x - 1,$$

$$x \in (0, 3); \quad f'_2 = 2x - 6 = 0 \Rightarrow x = 3,$$

$$f(x, 3 - x) = f_3(x) = -5x^2 + 18x - 19,$$

$$x \in (0, 3); \quad f'_3 = -10x + 18 = 0 \Rightarrow x = \frac{9}{5}, y = \frac{6}{5}.$$

Vypočítáme příslušné funkční hodnoty:

$$f(1, 1) = -4, \quad f\left(\frac{9}{5}, \frac{6}{5}\right) = -\frac{14}{5}, \quad f(0, 3) = -19, \quad f(3, 0) = -10, \quad f(0, 0) = -1 \Rightarrow$$

funkce má na dané množině absolutní maximum v bodě  $(0, 0)$ ,  $f_{\max} = -1$ ,

funkce má na dané množině absolutní minimum v bodě  $(0, 3)$ ,  $f_{\min} = -19$ .  $\square$

**Příklad 2.15.** Drát délky  $l$  máme rozdělit na tři části, ze kterých vyrobíme kružnici, rovnostranný trojúhelník a čtverec, přičemž připouštíme možnost, že některá část má nulovou délku. Máme zjistit, kdy bude součet plošných obsahů vzniklých obrazců a) minimální, b) maximální.

**Řešení.** Nejdříve musíme úlohu formalizovat, tedy nalézt účelovou funkci, jejíž extrémy máme hledat, a množinu, na které máme hledat extrémy.

Označme jako  $x$  délku kružnice,  
 $y$  obvod trojúhelníka  
 $z$  obvod čtverce.

Potom platí  $x = 2\pi r$ , tedy  $r = \frac{x}{2\pi}$ , kde  $r$  je poloměr kruhu,  
 $y = 3a$ , tedy  $a = \frac{y}{3}$ , kde  $a$  je strana trojúhelníka,  
 $z = 4b$ , tedy  $b = \frac{z}{4}$ , kde  $b$  je strana čtverce.

Pro jednotlivé plošné obsahy platí:

$$\begin{aligned} \text{obsah kruhu:} \quad S_{kr} &= \pi r^2 = \frac{x^2}{4\pi}, \\ \text{obsah trojúhelníka:} \quad S_{tr} &= \frac{\sqrt{3}}{4} a^2 = \frac{\sqrt{3}}{36} y^2, \\ \text{obsah čtverce:} \quad S_{ct} &= b^2 = \frac{z^2}{16}. \end{aligned}$$

Odtud

$$S_{kr} + S_{tr} + S_{ct} = \frac{x^2}{4\pi} + \frac{y^2\sqrt{3}}{36} + \frac{z^2}{16} = \frac{1}{4} \left( \frac{x^2}{\pi} + \frac{y^2\sqrt{3}}{9} + \frac{z^2}{4} \right).$$

Dosadíme za  $z$  z podmínky  $x + y + z = l$  a jako účelovou funkci zvolíme

$$f(x, y) = \frac{1}{\pi} x^2 + \frac{\sqrt{3}}{9} y^2 + \frac{1}{4} (l - x - y)^2.$$

Nyní určíme množinu, na které budeme extrémy hledat. Ze zadání úlohy dostaneme omezení pro  $x, y$  a  $z$ :

$$0 \leq x \leq l, \quad 0 \leq y \leq l, \quad 0 \leq z \leq l,$$

přičemž poslední podmínka znamená

$$0 \leq l - x - y \leq l \Rightarrow 0 \leq x + y \leq l.$$

Úlohu tedy můžeme formalizovat takto:

$$f(x, y) = \frac{1}{\pi} x^2 + \frac{\sqrt{3}}{9} y^2 + \frac{1}{4} (l - x - y)^2 \quad \longrightarrow \quad \text{extrém}, \quad 0 \leq x \leq l, \quad 0 \leq y \leq l - x.$$

Podmínka zřejmě popisuje trojúhelník s vrcholy  $(0, 0)$ ,  $(0, l)$ ,  $(l, 0)$ ; máme tedy najít největší a nejmenší hodnotu účelové funkce na tomto trojúhelníku.

Nejdříve vyšetříme lokální extrémy uvnitř trojúhelníka:

$$\text{grad } f(x, y) = \left( \frac{2}{\pi} x + \frac{1}{2} (x + y - l); \frac{2\sqrt{3}}{9} y + \frac{1}{2} (x + y - l) \right), \quad \text{grad } f(x, y) = \mathbf{0} \Rightarrow$$

$$x_0 = \frac{\pi\sqrt{3}}{9 + (4 + \pi)\sqrt{3}} l \doteq 0,255 l, \quad y_0 = \frac{9}{9 + (4 + \pi)\sqrt{3}} l \doteq 0,421 l.$$

$$f''(x, y) = \begin{pmatrix} \frac{2}{\pi} + \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{2\sqrt{3}}{9} + \frac{1}{2} \end{pmatrix}, \quad D_2 = \frac{9 + (4 + \pi)\sqrt{3}}{9\pi} > 0, \quad D_1 = \frac{2}{\pi} + \frac{1}{2} > 0.$$

V stacionárním bodě  $[x_0, y_0]$  nastane minimum s hodnotou

$$f(x_0, y_0) = \frac{3(4 + \pi + 3\sqrt{3})}{(9 + (4 + \pi)\sqrt{3})^2} l^2 \doteq 0,081 l^2.$$

Vázané extrémny na hranici, tedy na jednotlivých stranách trojúhelníka:

$$\text{a) } x = 0, y \in (0, l): \quad f(0, y) = f_1(y) = \frac{\sqrt{3}}{9} y^2 + \frac{1}{4} (l - y)^2,$$

$$f'_1(y) = \frac{2\sqrt{3}}{9} y + \frac{1}{2} (y - l);$$

$$f'_1(y) = 0 \text{ pro } y_1 = \frac{9}{4\sqrt{3} + 9} l \quad (\in (0, l)), \quad f''_1(y) = \frac{2\sqrt{3}}{9} + \frac{1}{2} > 0$$

v bodě  $y_1 = \frac{9}{4\sqrt{3} + 9} l$  nastane vázané lokální minimum s hodnotou

$$f_1(y_1) = f(0, y_1) = \frac{\sqrt{3}}{4\sqrt{3} + 9} l^2 \doteq 0,109 l^2.$$

$$\text{b) } y = 0, x \in (0, l): \quad f(x, 0) = f_2(x) = \frac{1}{\pi} x^2 + \frac{1}{4} (l - x)^2,$$

$$f'_2(x) = \frac{2}{\pi} x + \frac{1}{2} (x - l);$$

$$f'_2(x) = 0 \text{ pro } x_2 = \frac{\pi}{4 + \pi} l \quad (\in (0, l)), \quad f''_2(x) = \frac{2}{\pi} + \frac{1}{2} > 0$$

v bodě  $x_2 = \frac{\pi}{4 + \pi} l$  nastane vázané lokální minimum s hodnotou

$$f_2(x_2) = f(x_2, 0) = \frac{1}{4 + \pi} l^2 \doteq 0,140 l^2.$$

$$\text{c) } y = l - x, x \in (0, l): \quad f(x, l - x) = f_3(x) = \frac{1}{\pi} x^2 + \frac{\sqrt{3}}{9} (l - x)^2,$$

$$f'_3(x) = \frac{2}{\pi} x + \frac{2\sqrt{3}}{9} (x - l);$$

$$f'_3(x) = 0 \text{ pro } x_3 = \frac{\sqrt{3}}{9 + \sqrt{3}} l \quad (\in (0, l)), \quad f''_3(x) = \frac{2}{\pi} + \frac{2\sqrt{3}}{9} > 0$$

v bodě  $x_3 = \frac{\sqrt{3}}{9 + \sqrt{3}} l$  nastane vázané lokální minimum s hodnotou

$$f_3(x_3) = f(x_3, l - x_3) = \frac{3(\pi + 3\sqrt{3})}{(9 + \pi\sqrt{3})^2} l^2 \doteq 0,120 l^2.$$

Určíme hodnoty účelové funkce v jednotlivých vrcholech trojúhelníka a všechny zjištěné hodnoty porovnáme:

$$f(0, 0) = \frac{1}{4} l^2 = 0,25 l^2, \quad f(0, l) = \frac{\sqrt{3}}{9} l^2 \doteq 0,192 l^2, \quad f(l, 0) = \frac{1}{\pi} l^2 \doteq 0,318 l^2.$$

Vidíme, že nejmenší hodnoty účelová funkce nabude v bodě  $[x_0, y_0]$  a největší v bodě  $[l, 0]$ .

Závěrem výsledky shrneme:

Nejmenší součet plošných obsahů získáme pro

$$\begin{aligned} x &= \frac{\pi\sqrt{3}}{9 + (4 + \pi)\sqrt{3}} l \doteq 0,255 l, \\ y &= \frac{9}{9 + (4 + \pi)\sqrt{3}} l \doteq 0,421 l, \\ z &= \frac{4\sqrt{3}}{9 + (4 + \pi)\sqrt{3}} l \doteq 0,324 l. \end{aligned}$$

Minimální hodnota je

$$\frac{1}{4} f(x_0, y_0) = \frac{3(4 + \pi + 3\sqrt{3})}{4(9 + (4 + \pi)\sqrt{3})^2} l^2 \doteq 0,0202 l^2.$$

Největší součet plošných obsahů získáme pro

$$x = l, \quad y = 0, \quad z = 0,$$

tedy v případě, že z celého drátu utvoříme kruh. Maximální hodnota je

$$\frac{1}{4} f(l, 0) = \frac{1}{4\pi} l^2 \doteq 0,0796 l^2.$$

□

## Cvičení

1. Najděte extrémy následujících funkcí  $f(x, y)$ :

- |  |  |
|--|--|
| a) $f(x, y) = x^2 + 3xy + y^2,$        | b) $f(x, y) = x^2 - 2xy + 2y^2 + 4x,$  |
| c) $f(x, y) = x^4 + 8x^2 + y^2 - 4y,$  | d) $f(x, y) = 2x^2 + 2xy + 5x^2 + 4x,$ |
| e) $f(x, y) = 4xy - x^4 - y^4 - 1,$    | f) $f(x, y) = x^2 + x^2y + y^2 - 2y,$  |
| g) $f(x, y) = 2x^2 + y^3 - x^2y - 3y,$ | h) $f(x, y) = xy^2 - x^2 - y,$         |
| i) $f(x, y) = x^3 - 3xy + y^2,$        | j) $f(x, y) = x^4 - 4xy + 2y^2$        |

2. Najděte lokální extrémy funkcí  $f(x, y, z)$ :

a)  $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + y^2 + zy - z + y - 2x$ ,

b)  $f(x, y, z) = 6x^2 + 5y^2 + 14z^2 + 4xy - 8xz - 2yz + 1$ ,

c)  $f(x, y, z) = x^3 + 3x^2 + y^2 + z^2 + 12xy + 15x + 14y + 4z + 17$ ,

d)  $f(x, y, z) = xyz(4a - x - y - z)$ ,

e)  $f(x, y, z) = (ax + by + cz)e^{x^2 - y^2 - z^2}$ .

3. Najděte vázané extrémy:

a)  $f(x, y) = xy - x + y - 1, \quad x + y = 1$ ,

b)  $f(x, y) = x^2 + y^2, \quad \frac{x}{p} + \frac{y}{q} = 1$ ,

c)  $f(x, y) = \sin^2 x + \sin^2 y, \quad x - y = \frac{\pi}{4}$ ,

d)  $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2, \quad x + y - 3z + 7 = 0, x - y + z - 3 = 0$ .

4. Najděte absolutní extrémy daných funkcí na daných množinách  $M$ :

a)  $f(x, y) = xy^2(4 - x - y), \quad M$  ohraničená přímkami  $x = 0, y = 0, x + y = 6$ ,

b)  $f(x, y) = x^3 + y^3 - 3xy, \quad M$  obdélník s vrcholy  $(0, -1), (2, -1), (2, 2), (0, 2)$ ,

c)  $f(x, y) = x^2 - xy + y^2, \quad M$  zadána nerovností  $|x| + |y| \leq 1$ ,

d)  $f(x, y) = e^{-x^2 - y^2}(3x^2 + 2y^2), \quad M$  kruh  $x^2 + y^2 \leq 4$ ,

e)  $f(x, y, z) = x + y + z, \quad M$  zadána nerovnostmi  $y^2 + z^2 \leq x \leq 1$ .

5. Najděte a) trojúhelník b) obdélník daného obvodu  $2s$  tak, aby rotační těleso, které vznikne rotací tohoto útvaru kolem jedné jeho strany, mělo největší objem.

6. Najděte rovinu procházející bodem  $A = (a, b, c)$  tak, aby spolu se souřadnými rovinami tvořila čtyřstěn nejmenšího objemu.

7. Materiál horní a dolní podstavy pravouhlé uzavřené krabice stojí  $3 \text{ Kč/m}^2$ , cena materiálu bočních stěn je  $2 \text{ Kč/m}^2$ . Vypočtete, jakou nejmenší cenu může mít materiál na výrobu takové krabice s objemem  $1 \text{ m}^3$  a jaké má tato krabice rozměry.

## Výsledky

1. a) nemá extrémy
- b)  $\min -8$  v  $(-4, -2)$
- c)  $\min -4$  v  $(0, 2)$
- d)  $\min -8$  v  $(-4, 2)$
- e)  $\max 1$  v  $(1, 1), (-1, -1)$

- f)  $\min -1$  v  $(0, 1)$   
 g)  $\min 0$  v  $(0, 1)$   
 h) nemá extrémý  
 i)  $\min -\frac{27}{16}$  v  $(\frac{9}{4}, \frac{3}{2})$   
 j)  $\min -1$  v  $(1, 1), (-1, -1)$
2. a)  $\min -2$  v  $(1, -1, 1)$   
 b)  $\min 1$  v  $(0, 0, 0)$   
 c)  $\min -6913$  v  $(23, -143, -2)$   
 d)  $\max a^4$  v  $(a, a, a)$   
 e)  $\max$  v  $(\frac{a}{m}, \frac{b}{m}, \frac{c}{m})$  kde  $m = \sqrt{2(a^2 + b^2 + c^2)}$
3. a)  $\max \frac{1}{4}$  v  $(-\frac{1}{2}, \frac{3}{2})$   
 b)  $\max \frac{p^2q^2}{p^2+q^2}$  v  $(\frac{pq^2}{p^2+q^2}, \frac{p^2q}{p^2+q^2})$   
 c) extrém  $\frac{1+(-1)^k}{\sqrt{2}}$  v  $(5\frac{\pi}{8} + k\frac{\pi}{2}, 3\frac{\pi}{8} + k\frac{\pi}{2}), k \in \mathbb{Z}$   
 d)  $\min 5$  v  $(0, -1, 2)$
4. a)  $\max 4$  v  $(1, 2), \min -64$  v  $(2, 4)$   
 b)  $\max 13$  v  $(2, -1), \min -1$  v  $(1, 1)$  a  $(0, -1)$   
 c)  $\min 0$  v  $(0, 0), \max 1$  v  $(1, 0), (-1, 0), (0, 1), (0, -1)$   
 d)  $\max \frac{8}{e^4}$  v  $(0, \pm 2), \min 0$  v  $(0, 0)$   
 e)  $\max 1 + \sqrt{2}, \min -\frac{1}{2}$
5. krychle s hranou  $\frac{a}{\sqrt{3}}$
6.  $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 3$
7.  $(\sqrt[3]{2}, \sqrt[3]{2}, \frac{1}{2}\sqrt[3]{2})$
8.  $6\sqrt[3]{12}, (\sqrt[3]{\frac{2}{3}}, \sqrt[3]{\frac{2}{3}}, \sqrt[3]{\frac{9}{4}})$ .



## 3 Integrální počet funkcí více proměnných

### 3.1 Pojem $n$ -rozměrného integrálu v $\mathbb{R}^n$

V předmětu BMA1 jste poznali pojem Cauchyova-Riemannova integrálu ohraničené reálné funkce jedné reálné proměnné přes kompaktní (tj. ohraničený uzavřený) interval v  $\mathbb{R}^1$ . Nyní tuto definici zobecníme na funkce více proměnných. Nejprve budeme definovat  $n$ -rozměrný objem  $n$ -rozměrného intervalu v  $\mathbb{R}^n$  (pro  $n = 1$  budeme mluvit přirozeně o délce, pro  $n = 2$  o obsahu).

**Definice 3.1.** Je-li  $I \subset \mathbb{R}^1$  jednorozměrný ohraničený interval o krajních bodech  $a, b$  ( $a < b$ ) ( $I$  může být otevřený, uzavřený či polouzavřený), pak jeho *délkou* („jednorozměrným objemem“) nazýváme číslo

$$\nu_1(I) = b - a.$$

Je-li  $I \subset \mathbb{R}^n$   $n$ -rozměrný ohraničený interval, pak se dá vyjádřit jako kartézský součin  $n$  jednorozměrných ohraničených intervalů  $i_1, \dots, i_n$ :

$$I = i_1 \times i_2 \times \dots \times i_n.$$

Potom  *$n$ -rozměrným objemem intervalu  $I$*  nazýváme číslo

$$\nu_n(I) = \nu_1(i_1)\nu_1(i_2) \cdots \nu_1(i_n).$$

Bude-li patrné, jaké je  $n$ , budeme místo  $\nu_n$  psát pouze  $\nu$ . Jak jsme již poznamenali výše u dvourozměrného intervalu, mluvíme místo o „dvourozměrném objemu“ o obsahu.

**Definice 3.2.** Nechť  $I \subset \mathbb{R}^n$  je kompaktní interval. *Dělením intervalu  $I$*  nazveme konečný soubor

$$\mathcal{D} = (J_1, \dots, J_m)$$

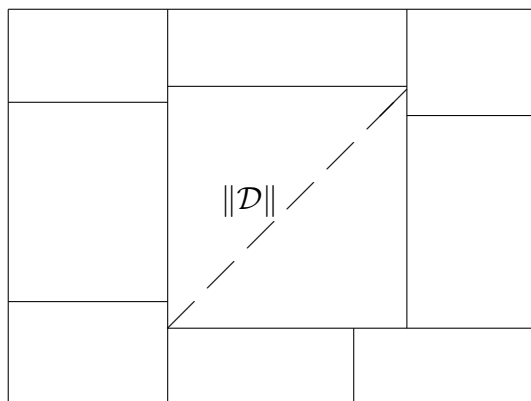
kompaktních intervalů  $J_i$  ( $i = 1, \dots, m$ ), které se nepřekrývají (tj. žádné dva intervaly  $J_i, J_k$ ,  $i \neq k$ , nemají společné vnitřní body) a takových, že  $I = \bigcup_{i=1}^m J_i$ .

*Normou dělení  $\mathcal{D}$*  nazveme největší z průměrů intervalů  $J_i$  ( $i = 1, \dots, m$ ), tuto normu označíme  $\|\mathcal{D}\|$ .

Poznamenejme, že pro (n-rozměrný) objem  $\nu(I)$  platí rovnost

$$\nu(I) = \nu(J_1) + \cdots + \nu(J_m).$$

Říkáme, že objem je *aditivní funkcí intervalu*. Příklad dělení dvourozměrného intervalu je naznačen na obr. 3.1



Obr. 3.1: Dělení dvourozměrného intervalu a jeho norma.

Jsou-li  $J, I$  dva kompaktní intervaly v  $\mathbb{R}^n$ ,  $J \subset I$ , pak existuje takové dělení intervalu  $I$ , že  $J$  je jedním z intervalů tohoto dělení.

Jsou-li  $\mathcal{D} = (J_1, \dots, J_m)$ ,  $\mathcal{D}' = (J'_1, \dots, J'_k)$  dvě dělení intervalu  $I$ , pak říkáme, že  $\mathcal{D}'$  je zjemněním dělení  $\mathcal{D}$ , jestliže každý interval  $J'_i$  je subintervalem některého intervalu  $J_r$ .

**Poznámka 3.3.** Jsou-li  $\mathcal{D}_1 = (J_1, \dots, J_m)$ ,  $\mathcal{D}_2 = (K_1, \dots, K_s)$  dvě dělení intervalu  $I$ , pak existuje dělení  $\mathcal{D}_3$ , které je zjemněním dělení  $\mathcal{D}_1$  i dělení  $\mathcal{D}_2$ . Takové dělení můžeme sestavit tak, že utvoříme všechny možné průniky  $J_i \cap K_j$  ( $i = 1, \dots, m; j = 1, \dots, s$ ) a z nich vezmeme všechny ty, které jsou opět n-rozměrnými intervaly (tj. mají neprázdné vnitřky). Tyto pak tvoří zjemnění obou dělení  $\mathcal{D}_1, \mathcal{D}_2$ .

**Definice 3.4.** Nechť nyní reálná funkce  $f$  je ohraničená na kompaktním intervalu  $I \subset \mathbb{R}^n$ . Nechť  $\mathcal{D}_1 = (J_1, \dots, J_k)$  je dělení intervalu  $I$ . *Dolním součtem funkce  $f$  příslušným  $k$  dělení  $\mathcal{D}$*  nazveme číslo

$$\underline{S}_{\mathcal{D}}(f) = \sum_{i=1}^k m_i \nu(J_i), \quad \text{kde } m_i = \inf_{p \in J_i} f(p).$$

*Horním součtem funkce  $f$  příslušným  $k$  dělení  $\mathcal{D}$*  nazveme číslo

$$\overline{S}_{\mathcal{D}}(f) = \sum_{i=1}^k M_i \nu(J_i), \quad \text{kde } M_i = \sup_{p \in J_i} f(p).$$

Kromě dolních a horních součtů se zavádí též Cauchyovy integrální součty funkce  $f$  příslušné k dělení  $\mathcal{D}$  s vybranými body  $p_i \in J_i$ :

$$S_{\mathcal{D},(p_i)} = \sum_{i=1}^k f(p_i)\nu(J_i).$$

Zřejmě

$$m\nu(I) \leq \underline{S}_{\mathcal{D}}(f) \leq S_{\mathcal{D},(p_i)}(f) \leq \overline{S}_{\mathcal{D}}(f) \leq M\nu(I),$$

kde  $m = \inf_{p \in I} f(p)$ ,  $M = \sup_{p \in I} f(p)$ .

Dále platí: Je-li  $\mathcal{D}'$  zjemněním dělení  $\mathcal{D}$ , pak

$$\underline{S}_{\mathcal{D}}(f) \leq \underline{S}_{\mathcal{D}'}(f) \leq \overline{S}_{\mathcal{D}'}(f) \leq \overline{S}_{\mathcal{D}}(f).$$

**Definice 3.5.** Jestliže se supremum všech dolních součtů funkce  $f$  (příslušných všem možným dělením intervalu  $I$ ) rovná infimu všech horních součtů funkce  $f$ , tj. jestliže

$$\sup_{\mathcal{D}} \underline{S}_{\mathcal{D}}(f) = \inf_{\mathcal{D}} \overline{S}_{\mathcal{D}}(f), \quad (3.1)$$

pak tuto společnou hodnotu nazýváme *Cauchyovým-Riemannovým integrálem* funkce  $f$  přes interval  $I \subset \mathbb{R}^n$ . Mluvíme přesněji o  $n$ -rozměrném integrálu a značíme jej

$$\int_I f d\nu \quad \text{nebo} \quad \int_I f(p) dp \quad \text{nebo} \quad \overbrace{\int_I \cdots \int_I}^{n\text{-krát}} f(x_1, \dots, x_n) dx_1 \dots dx_n.$$

Množinu  $I$  nazýváme *integračním oborem*, funkci  $f$  nazýváme *integrandem*.

Funkci  $f$ , která má integrál přes  $I$ , nazýváme *integrovatelnou* na  $I$ .

Dvourozměrný integrál nazýváme častěji *dvojným integrálem* funkce  $f(x, y)$  a značíme jej

$$\iint_I f(x, y) dx dy;$$

trojrozměrný integrál nazýváme častěji *trojným integrálem* funkce  $f(x, y, z)$  a značíme

$$\iiint_I f(x, y, z) dx dy dz.$$

Ve všech případech však můžeme používat stručnějšího označení  $\int_I f d\nu$ .

K tomu, aby platila rovnost 3.1 je nutné a stačí, aby k libovolnému  $\varepsilon$  existovalo takové dělení  $\mathcal{D}$ , že

$$\overline{S}_{\mathcal{D}}(f) - \underline{S}_{\mathcal{D}}(f) < \varepsilon.$$

**Věta 3.6.** Je-li funkce  $f$  spojitá na kompaktním intervalu  $I$ , pak  $\int_I f d\nu$  existuje.

**Poznámka 3.7.** Dá se ukázat, že ohraničená funkce mající na  $I$  body nespojitosti je integrovatelná na  $I$ , je-li množina bodů nespojitosti v jistém smyslu „malá“, přesně, má-li nulovou míru (pojem množiny nulové míry bude zaveden později).

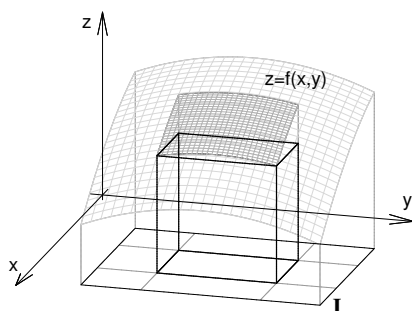
## 3.2 Geometrická interpretace dvojného integrálu

Nechť funkce  $f$  je spojitá na kompaktním intervalu  $I \subset \mathbb{R}^2$  a kladná na  $I^0$ . Uvažujme podgraf funkce  $f$

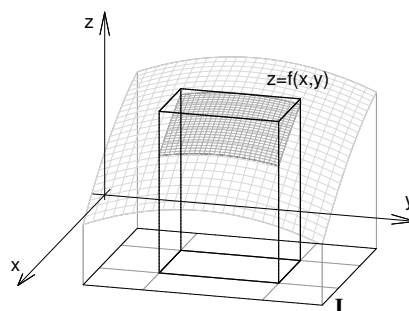
$$\mathcal{G} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (x, y) \in I, 0 \leq z \leq f(x, y)\}. \quad (3.2)$$

Je-li  $f$  konstantní, pak  $\mathcal{G}$  je kvádrem (trojrozměrným kompaktním intervalem) v  $\mathbb{R}^3$ . Není-li  $f$  konstantní, pak těleso  $\mathcal{G}$  připomíná svým tvarem „uražený kus“ kvádrů.

Nechť  $\mathcal{D} = (J_1, \dots, J_k)$  je dělení intervalu  $I$ . Dolní součet  $\sum_{i=1}^k m_i \nu_2(J_i)$  je objem tělesa složeného z kvádrů o podstavách  $J_i$  a výškách  $m_i$  a toto těleso je vepsané do tělesa  $\mathcal{G}$ , viz obr. 3.2. Naopak horní součet  $\sum_{i=1}^k M_i \nu_2(J_i)$  je objem tělesa složeného z kvádrů o podstavách  $J_i$  a výškách  $M_i$  a toto těleso je opsané tělesu  $\mathcal{G}$ , viz obr. 3.3.



Obr. 3.2: Kvádr o výšce  $m_i$



Obr. 3.3: Kvádr o výšce  $M_i$

Chceme-li nějakým rozumným způsobem přiřadit tělesu  $\mathcal{G}$  objem  $\nu_3(\mathcal{G})$ , je přirozené požadovat splnění nerovností

$$\sum_{i=1}^k m_i \nu_2(J_i) \leq \nu_3(\mathcal{G}) \leq \sum_{i=1}^k M_i \nu_2(J_i)$$

pro každé dělení  $\mathcal{D} = (J_1, \dots, J_k)$ . Odtud je patrné, přejdeme-li k suprému na levé straně a k infimu na pravé straně přes všechna dělení  $\mathcal{D}$ , dostaneme, že

$$\nu_3(\mathcal{G}) = \iint_I f(x, y) dx dy.$$

Tedy dvojný integrál funkce  $f$  přes interval  $I$  je objem tělesa  $\mathcal{G}$ , definovaného vztahem 3.2.

Problému zobecnění objemu na jiné množiny než jsou intervaly se budeme věnovat v odstavci 3.6.

### 3.3 Fyzikální interpretace trojného integrálu

Nechť  $I \subset \mathbb{R}^3$  je trojrozměrný kompaktní interval (kvádr), v němž je rozložena hmota, charakterizovaná hustotou  $f \geq 0$ ; předpokládejme, že  $f$  je spojitá funkce.

Z fyzikálního významu hustoty plyne: Je-li  $J \subset I$  kompaktní subinterval, na němž platí

$$\alpha \leq f \leq \beta,$$

pak pro hmotnost  $m(J)$  kvádrů  $J$  platí

$$\alpha \nu_3(J) \leq m(J) \leq \beta \nu_3(J)$$

(čísla  $\alpha \nu_3(J)$ , resp.  $\beta \nu_3(J)$  je možno interpretovat jako hmotnost tělesa  $J$ , na němž je rozložena hmota rovnoměrně s konstantní hustotou  $\alpha$ , resp.  $\beta$ ).

Je-li  $\mathcal{D} = (J_1, \dots, J_k)$  libovolné rozdělení intervalu  $I$ , pak jednou z vlastností hmotnosti je, že hmotnost tělesa  $I$  je rovna součtu hmotností těles  $J_i$  ( $i = 1, 2, \dots, k$ ):

$$m(I) = \sum_{i=1}^k m(J_i).$$

Odtud a z předchozí nerovnosti plyne, že pro dolní a horní součty platí

$$\underline{S}_{\mathcal{D}}(f) \leq m(I) \leq \overline{S}_{\mathcal{D}}(f),$$

neboť

$$m_i \nu_3(J_i) \leq m(J_i) \leq M_i \nu_3(J_i) \quad (i = 1, \dots, k)$$

a stačí tyto nerovnosti sečíst.

Analogickou úvahou jako v předchozím případě dostaneme, že

$$m(I) = \iiint_I f(x, y, z) dx dy dz.$$

### 3.4 Výpočet n-rozměrného integrálu postupnou integrací

Výpočet n-rozměrného integrálu ( $n \geq 2$ ) převádíme postupně na výpočet jednorozměrného integrálu. Uvažujme nejdříve dvojný integrál.

Protože integrál je jakousi „infinitezimální“ analogií součtu, přiblížíme si problém výpočtu integrálu následující úlohou:

Máme sečíst  $mn$  čísel  $c_{pq}$  ( $p = 1, \dots, m$ ,  $q = 1, \dots, n$ ), označme tento součet

$$\sum_{(p,q)} c_{pq}.$$

Obdobou tohoto „dvojného součtu“ je např. dvojný integrál

$$\iint_{I \times J} f(x, y) dx dy, \quad (3.3)$$

kde pro jednoduchost nechť  $I, J$  jsou kompaktní intervaly v  $\mathbb{R}$ ,  $I = \langle a, b \rangle$ ,  $J = \langle c, d \rangle$ , a  $f$  je spojitá funkce na  $I \times J$ . Uspořádejme čísla  $c_{pq}$  do matice typu  $(m, n)$ :

$$\begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_{m1} & c_{m2} & \cdots & c_{mn} \end{pmatrix}.$$

Můžeme nyní sčítat tak, že sečteme nejdříve čísla v jednom řádku - např. součet  $p$ -tého řádku bude  $\sum_{q=1}^n c_{pq}$  - a pak sečteme tyto součty přes všechny řádky. Dostaneme tak dvojnásobný součet

$$\sum_{p=1}^m \left( \sum_{q=1}^n c_{pq} \right).$$

Obdobou tohoto součtu je tzv. *dvojnásobný integrál*

$$\int_I \left( \int_J f(x, y) dy \right) dx, \quad (3.4)$$

který dostaneme takto: Nejdříve při pevném  $x \in I$  integrujeme funkci  $y \mapsto f(x, y)$  přes interval  $J$  podle  $y$ . Tento integrál

$$\int_J f(x, y) dy$$

je funkcí proměnné  $x$  (o níž se za předpokladu spojitosti funkce  $f$  dá dokázat, že je spojitou funkcí na  $I$ ) a tuto funkci integrujeme podle  $x$  přes interval  $I$ .

Můžeme však sčítat čísla  $c_{pq}$  tak, že sečteme čísla v jednotlivých sloupcích a pak sčítáme tyto součty přes všechny sloupce. Dostaneme tak dvojnásobný součet

$$\sum_{q=1}^n \left( \sum_{p=1}^m c_{pq} \right).$$

Obdobou tohoto součtu je dvojnásobný integrál

$$\int_J \left( \int_I f(x, y) dx \right) dy, \quad (3.5)$$

který dostaneme tak, že integrujeme nejdříve při pevném  $y$  funkci  $x \mapsto f(x, y)$  podle  $x$  přes interval  $I$  a výslednou funkci proměnné  $y$  integrujeme podle  $y$  přes interval  $J$ . Víme ovšem, že platí

$$\sum_{(p,q)} c_{pq} = \sum_{p=1}^m \left( \sum_{q=1}^n c_{pq} \right) = \sum_{q=1}^n \left( \sum_{p=1}^m c_{pq} \right),$$

a lze očekávat, že za určitých předpokladů budou si rovny též integrály 3.3, 3.4 a 3.5.

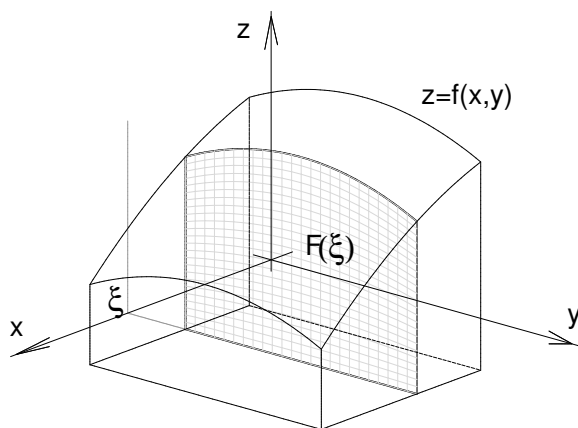
Je-li  $f$  kladná spojitá funkce na intervalu  $I \times J$ , je dvojný integrál 3.3 mírou podgrafu  $\mathcal{G}(f, I \times J)$ .

„Vnitřní“ integrál v 3.4  $F(x) = \int_J f(x, y) dy$

má tuto geometrickou interpretaci: Pro pevné  $x = \xi$  je  $F(\xi)$  obsah řezu podgrafu  $\mathcal{G}(f, I \times J)$  rovinou  $x = \xi$  (viz obr. 3.4). Rozdělíme-li interval  $I$  na intervaly délek  $\Delta x_i$  ( $i = 1, 2, \dots, m$ ) a utvoříme-li Cauchyův integrální součet

$$\sum_{i=1}^m F(\xi_i) \Delta x_i,$$

je limita těchto integrálních součtů rovna integrálu  $\int_I F(x) dx$ , což je integrál 3.4. Přitom každý sčítanec  $F(\xi_i) \Delta x_i$  je objem destičky o konstantním průřezu velikosti  $F(\xi_i)$  a tloušťce  $\Delta x_i$ . Je tedy zřejmé, že integrální součet  $\sum_i F(\xi_i) \Delta x_i$  může sloužit při dostatečně jemném dělení intervalu  $I$  jako dobrá aproximace objemu tělesa  $\mathcal{G}(f, I \times J)$ , což je právě dvojný integrál 3.3. Obdobně můžeme interpretovat i druhý dvojnásobný integrál 3.5.



Obr. 3.4: Řez podgrafu  $\mathcal{G}$  rovinou  $x = \xi$ .

Nyní k výpočtu integrálu na kompaktním intervalu můžeme zformulovat následující větu (Fubiniova věta pro kompaktní interval). Uvedeme ji nejdříve pro dvojrozměrný případ, tedy obdélník.

**Věta 3.8.** *Nechť  $I \subset \mathbb{R}^2$  je kompaktní interval,  $I = \langle a, b \rangle \times \langle c, d \rangle$ . Je-li  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  integrovatelná na  $I$ , pak existují integrály (dvojnásobné)*

$$\mathcal{I}_1 = \int_a^b \left( \int_c^d f(x, y) dy \right) dx, \quad \mathcal{I}_2 = \int_c^d \left( \int_a^b f(x, y) dx \right) dy$$

a platí rovnost

$$\mathcal{I} = \int_I f(x, y) dx dy = \mathcal{I}_1 = \mathcal{I}_2.$$

Dvojměrný integrál se tedy vypočítá pomocí dvou určitých integrálů - postupnou integrací vždy podle jedné proměnné (analogie parciální derivace). Tento postup se přirozeným způsobem rozšíří na trojný (i n-rozměrný) integrál:

Nechť  $I \subset \mathbb{R}^n$  je kompaktní interval,  $I = \langle a_1, b_1 \rangle \times \langle a_2, b_2 \rangle \times \dots \times \langle a_n, b_n \rangle$ , a nechť  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  je integrovatelná funkce na  $I$ . Potom platí

$$\begin{aligned} \int_I f(x_1, x_2, \dots, x_n) dx_1 \dots dx_n &= \int_{a_1}^{b_1} \left( \int_{a_2}^{b_2} \left( \dots \left( \int_{a_n}^{b_n} f(x_1, \dots, x_n) dx_n \right) \dots \right) dx_2 \right) dx_1 = \\ &= \int_{a_{i_1}}^{b_{i_1}} \left( \int_{a_{i_2}}^{b_{i_2}} \left( \dots \left( \int_{a_{i_n}}^{b_{i_n}} f(x_1, \dots, x_n) dx_{i_n} \right) \dots \right) dx_{i_2} \right) dx_{i_1} \end{aligned}$$

pro každou permutaci  $(i_1, i_2, \dots, i_n)$  množiny indexů  $\{1, 2, \dots, n\}$ .

**Příklad 3.9.** Vypočítejte integrál  $\int_I x^2 y \, dx dy$ ,  $I = \langle 0, 2 \rangle \times \langle 1, 2 \rangle$ .

**Řešení.** V tomto případě je kompaktní interval  $I$  obdélník.

$$\begin{aligned} \int_I x^2 y \, dx dy &= \int_0^2 \left( \int_1^2 x^2 y \, dy \right) dx = \\ &= \int_0^2 \left[ x^2 \frac{y^2}{2} \right]_{y=1}^{y=2} dx = \\ &= \frac{3}{2} \int_0^2 x^2 dx = \frac{3}{2} \left[ \frac{x^3}{3} \right]_0^2 = 4. \end{aligned}$$

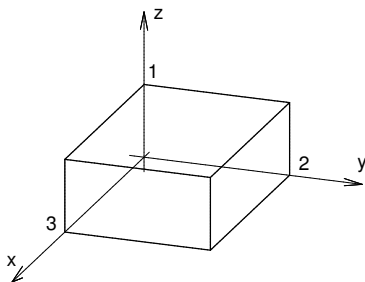
Nebo

$$\int_I x^2 y \, dx dy = \int_1^2 \left( \int_0^2 x^2 y \, dx \right) dy = \int_1^2 \left[ \frac{x^3}{3} y \right]_{x=0}^{x=2} dy = \frac{8}{3} \int_1^2 y \, dy = \frac{8}{3} \left[ \frac{y^2}{2} \right]_1^2 = 4.$$

□

**Příklad 3.10.** Vypočítejte integrál  $\int_I (x + y + z) \, dx dy dz$ ,  $I = \langle 0, 3 \rangle \times \langle 0, 2 \rangle \times \langle 0, 1 \rangle$ .

**Řešení.** V tomto případě je kompaktní interval kvádr.



$$\begin{aligned} &\int_I (x + y + z) \, dx dy dz = \\ &= \int_0^1 \left( \int_0^2 \left( \int_0^3 (x + y + z) \, dx \right) dy \right) dz = \\ &= \int_0^1 \left( \int_0^2 \left[ \frac{x^2}{2} + xy + xz \right]_{x=0}^{x=3} dy \right) dz = \\ &= 3 \int_0^1 \left( \int_0^2 \left( \frac{3}{2} + y + z \right) dy \right) dz = \end{aligned}$$



$$= 3 \int_0^1 \left[ \frac{3}{2}y + \frac{1}{2}y^2 + yz \right]_{y=0}^{y=2} = 3 \int_0^1 (5 + 2z) dz = 3 [5z + z^2]_0^1 = 18.$$

□

### 3.5 Měřitelné množiny, elementární oblasti

Jistě není prakticky možné omezit se při integraci pouze na kompaktní intervaly. V tomto odstavci si budeme všimnout těch množin, přes které budeme schopni našimi prostředky integrovat.

**Definice 3.11.** Nechť  $M \subset \mathbb{R}^n$  je množina. Řekneme, že  $M$  je *měřitelná*, tj. má míru  $\nu_n(M)$ , jestliže pro nějaký kompaktní interval  $I \supset M$  existuje integrál z charakteristické funkce  $\chi_M$  množiny  $M$  na  $I$ . Pak definujeme

$$\nu_n(M) := \int_I \chi_M(x_1, \dots, x_n) dx_1 \dots dx_n.$$

Připomeňme, že charakteristická funkce množiny je definovaná předpisem

$$\chi_M(x) = \begin{cases} 1 & \text{pro } x \in M \\ 0 & \text{pro } x \notin M \end{cases}$$

Při integraci funkcí  $\mathbb{R}^n$  v budou mít nepodstatnou úlohu množiny, které jsou objemově „malé“, budeme je nazývat nulové.

**Definice 3.12.** Množinu  $N \subset \mathbb{R}^n$  nazýváme *nulovou množinou* v  $\mathbb{R}^n$  (nebo množinou *nulové míry*), jestliže k libovolnému  $\varepsilon > 0$  existuje konečná posloupnost intervalů  $(J_k)$ , která pokrývá množinu  $N$ , tj.

$$N \subset \bigcup_k J_k,$$

přičemž

$$\sum_k \nu(J_k) < \varepsilon.$$

**Poznámka 3.13.** i) Prázdná množina a každá jednobodová množina jsou nulové množiny.

ii) Je-li  $N$  nulová,  $M \subset N$ , pak  $M$  je nulová.

iii) Sjednocení konečného souboru nulových množin je nulová množina.

**Příklad 3.14.** Hranice kompaktního intervalu  $I \subset \mathbb{R}^n$  je nulová množina. Hranice  $I$  je sjednocením  $2n$  stěn (pro  $n = 2$  mluvíme o stranách). Je-li

$$I = \langle a_1, b_1 \rangle \times \langle a_2, b_2 \rangle \times \dots \times \langle a_n, b_n \rangle,$$

pak stěny  $I$  jsou množiny

$$\{a_1\} \times \langle a_2, b_2 \rangle \times \dots \times \langle a_n, b_n \rangle,$$

$$\begin{aligned} & \{b_1\} \times \langle a_2, b_2 \rangle \times \cdots \times \langle a_n, b_n \rangle, \\ & \langle a_1, b_1 \rangle \times \{a_2\} \times \cdots \times \langle a_n, b_n \rangle, \\ & \langle a_1, b_1 \rangle \times \{b_2\} \times \cdots \times \langle a_n, b_n \rangle, \\ & \text{atd.} \end{aligned}$$

Vezměme např. první stěnu a pokryjme ji intervalem

$$J = \langle a_1 - \delta, a_1 + \delta \rangle \times \langle a_2, b_2 \rangle \times \cdots \times \langle a_n, b_n \rangle, \quad \delta > 0.$$

Objem tohoto intervalu je

$$\nu(J) = 2\delta(b_2 - a_2) \cdots (b_n - a_n).$$

Nechť  $\varepsilon > 0$  je libovolné. Zvolíme-li nyní  $\delta$  tak, aby

$$\delta < \frac{\varepsilon}{2(b_2 - a_2) \cdots (b_n - a_n)}, \quad \text{pak } \nu(J) < \varepsilon.$$

Je tedy stěna intervalu nulová množina, tedy také celá hranice je nulová množina.

Zobecněním tohoto příkladu je následující tvrzení.

**Věta 3.15.** *Nechť  $I$  je kompaktní interval v  $\mathbb{R}^n$ . Pak graf spojitě funkce  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  je nulová množina v  $\mathbb{R}^{n+1}$ .*

Dá-li se tedy některá množina  $M \subset \mathbb{R}^n$  vyjádřit jako konečné sjednocení grafů spojitých funkcí na kompaktních intervalech, pak  $M$  je nulová množina. Tímto způsobem se dá ukázat, že rozmanité křivky v  $\mathbb{R}^2$  nebo plochy v  $\mathbb{R}^3$  jsou nulové množiny.

**Věta 3.16.**

- Je-li  $M$  ohraničená množina a  $\nu_n(hM) = 0$  (hranice má nulovou míru), pak  $M$  je měřitelná v  $\mathbb{R}^n$ .*
- Sjednocení a průnik konečného systému měřitelných množin je měřitelná množina.*
- Rozdíl dvou měřitelných množin je měřitelná množina.*
- Každá otevřená oblast  $G$  je měřitelná, každá uzavřená oblast je měřitelná a platí  $\nu_n(G) = \nu_n(\overline{G})$ .*

Právě pro měřitelné množiny, tedy takové, jejichž charakteristická funkce je integrovatelná, je obecně definován pojem  $n$ -rozměrného integrálu. My se speciálně zaměříme na takzvané elementární oblasti, které, jak uvidíme z definice (užitím předchozích tvrzení) jsou měřitelné:

**Definice 3.17.** V rovině rozumíme *elementární oblastí typu  $[x, y]$*  množinu všech bodů  $(x, y) \in M \subset \mathbb{R}^2$ , jejichž souřadnice vyhovují nerovnostem

$$\begin{aligned} a & \leq x \leq b \\ f(x) & \leq y \leq g(x), \end{aligned}$$

kde  $a, b, a < b$  jsou čísla a  $f, g$  jsou funkce spojitě na intervalu  $\langle a, b \rangle$ . Tedy

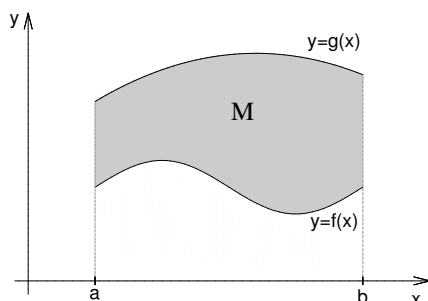
$$M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : a \leq x \leq b, f(x) \leq y \leq g(x)\}. \quad \text{Viz obr.3.5}$$

Podobně je jistě možno definovat elementární oblast typu  $[y, x]$ ; je jí taková množina  $A \subset \mathbb{R}^2$  v rovině, pro jejíž body  $(x, y) \in A$  platí nerovnosti

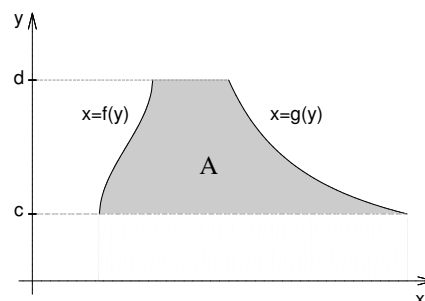
$$\begin{aligned} c \leq y \leq d \\ f(y) \leq x \leq g(y), \end{aligned}$$

kde funkce  $f, g$  jsou spojité na intervalu  $\langle c, d \rangle$ , tedy

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : c \leq y \leq d, f(y) \leq x \leq g(y)\}. \quad \text{Viz obr.3.6}$$



Obr. 3.5: Elem. oblast typu  $[x, y]$



Obr. 3.6: Elem. oblast typu  $[y, x]$

Jak tyto pojmy zobecníme do trojrozměrného prostoru?

Předně průmět do některé ze souřadných rovin musí být elementární oblast v rovině; mějme tedy množinu  $M \subset \mathbb{R}^3$  takovou, že pro její body  $(x, y, z) \in M$  platí  $a \leq x \leq b$ ,  $f_1(x) \leq y \leq g_1(x)$  – to znamená, že průmět množiny  $M$  do roviny  $xy$  je elementární oblast typu  $[x, y]$ .

Dále je potřeba omezit  $z$ -ové souřadnice; zde se již mohou vyskytovat funkce dvou proměnných. Tedy elementární oblastí typu  $[x, y, z]$  v prostoru rozumíme množinu  $M$ , pro jejíž body  $(x, y, z) \in M$  platí

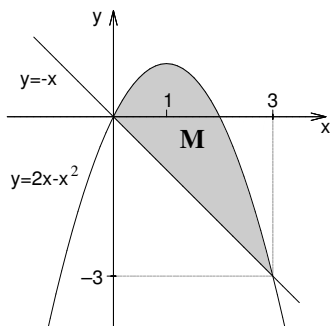
$$\begin{aligned} a \leq x \leq b \\ f_1(x) \leq y \leq g_1(x) \\ f_2(x, y) \leq z \leq g_2(x, y). \end{aligned}$$

Podobně je možno definovat elementární oblasti typu  $[y, z, x]$ ,  $[z, y, x]$  atd.

Chceme-li tedy nějakou množinu  $M \subset \mathbb{R}^3$  popsat jako elementární oblast, promítneme ji do některé souřadné roviny, průmět popíšeme jako elementární oblast a zbývající proměnnou ohraničíme dvěma funkcemi (plochami) obecně dvou proměnných.

**Příklad 3.18.** Rozhodněte, zda dané množiny jsou elementárními množinami.

a) Množina  $M$  ohraničená parabolou  $y = 2x - x^2$  a přímkou  $y = -x$ .



Parabola  $y = 2x - x^2$  má rovnici

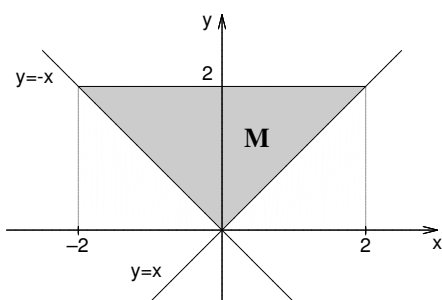
$$y - 1 = -(x - 1)^2,$$

tedy vrchol v bodě  $(1, 1)$ , otevřená směrem dolů. Průsečíky s přímkou  $y = -x$  jsou v bodech  $(0, 0)$ ,  $(3, -3)$ . Pro  $(x, y) \in M$  tedy platí

$$\begin{aligned} 0 &\leq x \leq 3 \\ -x &\leq y \leq -x^2 + 2x \end{aligned}$$

Tedy  $M$  je elementární oblastí typu  $[x, y]$ .

b) Množina  $M$  zadaná nerovností  $|x| \leq y \leq 2$ .



Grafy funkcí  $y = |x|$  a  $y = 2$  se protínají v bodech  $(-2, 2)$  a  $(2, 2)$ . Platí

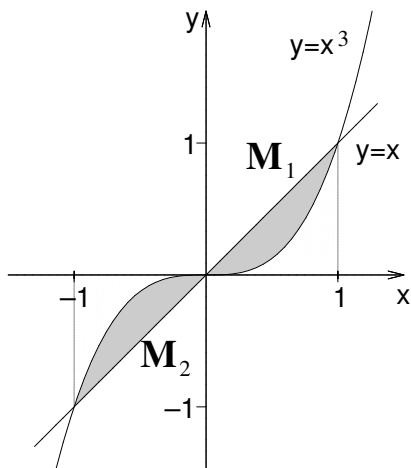
$$(x, y) \in M \Rightarrow \begin{cases} -2 \leq x \leq 2 \\ |x| \leq y \leq 2 \end{cases}$$

Výhodnější je v tomto případě vyjádření

$$(x, y) \in M \Rightarrow \begin{cases} 0 \leq y \leq 2 \\ -y \leq x \leq y \end{cases}$$

Tedy  $M$  je elementární oblastí typu  $[y, x]$ .

c) Množina  $M$  ohraničená grafy funkcí  $y = x$ ,  $y = x^3$ .



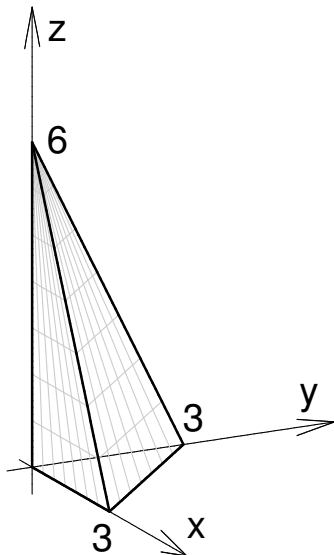
Množina  $M$  v tomto případě není elementární oblast; dá se vyjádřit jako sjednocení dvou elementárních oblastí, např. typu  $[x, y]$ :

$$M = M_1 \cup M_2$$

$$M_1 = \{(x, y) \mid 0 \leq x \leq 1, x^3 \leq y \leq x\}$$

$$M_2 = \{(x, y) \mid -1 \leq x \leq 0, x \leq y \leq x^3\}.$$

d)  $M$  je ohraničená plochami  $2x + 2y + z = 6$ ,  $x = 0$ ,  $y = 0$ ,  $z = 0$ .



Rovina  $2x + 2y + z = 6$  protíná souřadné osy v bodech o souřadnicích  $x = 3$ ,  $y = 3$ ,  $z = 6$ . Průmět množiny  $M$  do roviny je trojúhelník o vrcholech  $(0, 0)$ ,  $(0, 3)$ ,  $(3, 0)$ . Platí tedy

$$(x, y, z) \in M \Rightarrow \begin{cases} 0 \leq x \leq 3 \\ 0 \leq y \leq 3 - x \\ 0 \leq z \leq 6 - 2x - 2y \end{cases}$$

$M$  je v tomto případě čtyřstěn a jedná se o elementární oblast typu  $[x, y, z]$ .

### 3.6 Integrované na měřitelných množinách

V této kapitole rozšíříme pojem  $n$ -rozměrného integrálu na měřitelné množiny:

**Definice 3.19.** Řekneme, že funkce  $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $M \subset \mathbb{R}^n$  je integrovatelná na množině  $M$ , tj. že existuje integrál (Riemannův) z funkce  $f$  na množině  $M$ , existuje-li interval  $I \subset \mathbb{R}^n$  tak, že  $M \subset I$  a funkce  $f \cdot \chi_M$  je na  $I$  integrovatelná.

Potom klademe

$$\int_M f(x_1, \dots, x_n) dx_1 \dots dx_n = \int_I (f \cdot \chi_M)(x_1, \dots, x_n) dx_1 \dots dx_n$$

V následujících úvahách se omezíme na  $n = 2, 3$ .

Postačující podmínku pro existenci integrálu udává následující věta:

**Věta 3.20.** Je-li  $M \subset \mathbb{R}^2(\mathbb{R}^3)$  měřitelná množina a  $f : M \rightarrow \mathbb{R}$  je na  $M$  ohraničená a skoro všude spojitá, pak je  $f$  na  $M$  integrovatelná.

(Připomeňme, že nějaké tvrzení platí na množině  $M$  skoro všude, jestliže platí  $\forall x \in M \setminus A \subset \mathbb{R}^k$  a neplatí  $\forall x \in A$ , kde  $\nu_k(A) = 0$  (tj. platí s výjimkou množiny nulové míry).)

Fubiniova věta pro výpočet integrálů se dá snadno rozšířit na elementární oblasti:

**Věta 3.21.** Necht

$$M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid a \leq x \leq b, d(x) \leq y \leq h(x)\}, \quad \text{resp.}$$

$$M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid a \leq x \leq b, d_1(x) \leq y \leq h_1(x), d_2(x, y) \leq z \leq h_2(x, y)\},$$

kde  $d, h$ , resp.  $d_1, h_1, d_2, h_2$  jsou spojité funkce. Pak, existuje-li

$$\mathcal{I} = \iint_M f(x, y) dx dy \quad \text{resp.} \quad \mathcal{I} = \iiint_M f(x, y, z) dx dy dz,$$

platí

$$\mathcal{I} = \int_a^b \left( \int_{d(x)}^{h(x)} f(x, y) dy \right) dx$$

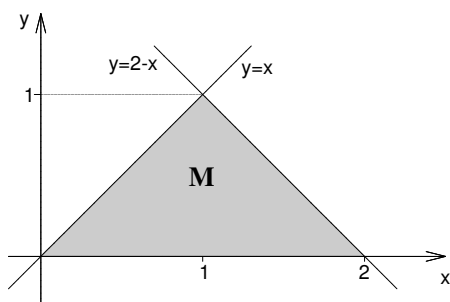
resp.

$$\mathcal{I} = \int_a^b \left( \int_{d_1(x)}^{h_1(x)} \left( \int_{d_2(x,y)}^{h_2(x,y)} f(x, y, z) dz \right) dy \right) dx$$

Věta platí analogicky pro elementární oblasti typu  $[y, x]$  nebo  $[y, x, z]$  atd.

**Příklad 3.22.** Vypočtěte integrály

- a)  $\iint_M (x^2 + y) dx dy$ , kde  $M$  je ohraničená přímkami  $y = 0, y = x, x + y = 2$ .

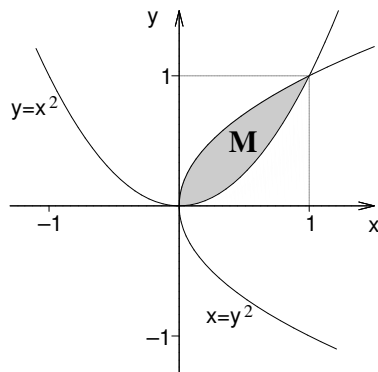


$M$  je elementární oblast typu  $[y, x]$  popsaná nerovnostmi

$$\begin{aligned} 0 &\leq y \leq 1 \\ y &\leq x \leq 2 - y \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \iint_M (x^2 + y) dx dy &= \\ &= \int_0^1 \left( \int_y^{2-y} (x^2 + y) dx \right) dy = \\ &= \int_0^1 \left[ \frac{x^3}{3} + xy \right]_{x=y}^{x=2-y} dy = \int_0^1 \frac{2}{3} (4 - 3y - y^3) dy = \frac{2}{3} \left[ 4y - \frac{3y^2}{2} - \frac{y^4}{4} \right]_0^1 = \frac{3}{2}. \end{aligned}$$

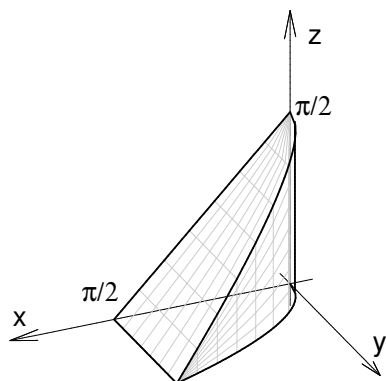
- b)  $\iint_M (x - y) dx dy$ , kde  $M$  je ohraničená křivkami  $y = x^2, y^2 = x$ .



$$\begin{aligned} \iint_M (x - y) dx dy &= \\ &= \int_0^1 \left( \int_{x^2}^{\sqrt{x}} (x - y) dy \right) dx = \\ &= \int_0^1 \left[ xy - \frac{y^2}{2} \right]_{y=x^2}^{y=\sqrt{x}} dx = \end{aligned}$$

$$= \int_0^1 \left( x^{3/2} - \frac{x}{2} - x^3 + \frac{x^4}{2} \right) dx = \left[ \frac{2}{5} x^{5/2} - \frac{x^2}{4} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{10} \right]_0^1 = 0.$$

c)  $\iiint_M y \cos(z+x) dx dy dz$ , kde  $M$  je ohraničená plochami  $y = \sqrt{x}$ ,  $y = 0$ ,  $z = 0$ ,  $x + z = \frac{\pi}{2}$ .



Množina  $M$  je shora ohraničená rovinou  $x + z = \frac{\pi}{2}$ , dále souřadnicovými rovinami a parabolickou válcovou plochou  $y = \sqrt{x}$ . Průmět do souřadné roviny  $xy$  je shora ohraničen grafem funkce  $y = \sqrt{x}$ , dále osou  $x$  a přímkou  $x = \frac{\pi}{2}$ . Proto platí

$$\begin{aligned} \iiint_M y \cos(z+x) dx dy dz &= \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left( \int_0^{\sqrt{x}} \left( \int_0^{\frac{\pi}{2}-x} y \cos(z+x) dz \right) dy \right) dx = \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left( \int_0^{\sqrt{x}} [y \sin(z+x)]_{z=0}^{z=\frac{\pi}{2}-x} dy \right) dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left( \int_0^{\sqrt{x}} y(1 - \sin x) dy \right) dx = \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} x(1 - \sin x) dx = \frac{1}{2} \left[ \frac{x^2}{2} + x \cos x - \sin x \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi^2}{16} - \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

### 3.7 Transformace integrálů

Připomeňme, jak se počítal určitý integrál pomocí věty o substituci - stručně můžeme formulovat tuto větu takto:

Nechť  $f$  je integrovatelná funkce na intervalu  $\langle a, b \rangle$ ,  $\varphi$  diferencovatelná funkce. Potom

$$\int_a^b f(x) dx = \left| \begin{array}{l} x = \varphi(t) \\ dx = \varphi'(t) dt \end{array} \right| = \int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(t)) \varphi'(t) dt,$$

přitom nové meze jsme obdrželi jako řešení rovnic  $a = \varphi(t)$ ,  $b = \varphi(t)$ ; tedy je-li  $\varphi$  prosté zobrazení, je  $\langle \alpha, \beta \rangle = \varphi^{-1}(\langle a, b \rangle)$  -úplný vzor intervalu  $\langle a, b \rangle$ .

Analogicky budeme postupovat u transformací vícerozměrných integrálů, ovšem integrační obory již budou složitější a cílem při transformaci bude hlavně zjednodušit integrační obor - v určitém integrálu jsme zaváděli substituci, abychom zjednodušili integrand (k tomu budeme jistě přihlížet také).

Věta o transformaci vícerozměrného integrálu má tedy následující tvar

**Věta 3.23.** *Nechť  $\Phi$  je zobrazení z  $\mathbb{R}^n$  do  $\mathbb{R}^n$ , které je prosté a regulární (tj. jakobián zobrazení  $D\Phi \neq 0$ ) na měřitelné otevřené množině  $G \subset \mathbb{R}^n$ ,  $\Phi \in C_1(G)$ . Nechť  $A \subset G$  je měřitelná množina,  $B = \Phi(A)$  a funkce  $f$  ohraničená a skoro všude spojitá na  $B$ , pak platí*

$$\int_B f d\nu = \int_A (f \circ \Phi) |D\Phi| d\nu \quad (3.6)$$

Vzorec 3.6 též zapisujeme ve tvaru

$$\int_B f(p) dp = \int_A f(\Phi(q)) \cdot |D\Phi| dq. \quad (3.7)$$

**Poznámka 3.24.** Je-li  $\Phi = (\varphi_1, \dots, \varphi_n)$  a označíme-li  $p = (x_1, \dots, x_n)$ ,  $q = (u_1, \dots, u_n)$ , pak vzorec 3.7 můžeme zapsat v „klasickém tvaru“

$$\begin{aligned} & \int_B f(x_1, \dots, x_n) dx_1 \cdots dx_n = \\ & = \int_A f(\varphi_1(u_1, \dots, u_n), \dots, \varphi_n(u_1, \dots, u_n)) \cdot |D\Phi(u_1, \dots, u_n)| du_1 \cdots du_n \end{aligned}$$

Pro  $n = 2$  je  $\Phi(u, v) = (\varphi_1(u, v), \varphi_2(u, v))$  a platí

$$\iint_B f(x, y) dx dy = \iint_A f(\varphi_1(u, v), \varphi_2(u, v)) |D\Phi(u, v)| du dv$$

Pro  $n = 3$  je  $\Phi(u, v, w) = (\varphi_1(u, v, w), \varphi_2(u, v, w), \varphi_3(u, v, w))$  a platí

$$\iiint_B f(x, y, z) dx dy dz = \iiint_A f(\varphi_1(u, v, w), \varphi_2(u, v, w), \varphi_3(u, v, w)) |D\Phi(u, v, w)| du dv dw.$$

**Poznámka 3.25.** V případě vícerozměrných integrálů hovoříme místo o substituci o transformaci, protože přecházíme od kartézských souřadnic k novým tzv. křivočarým souřadnicím - transformujeme souřadnice.

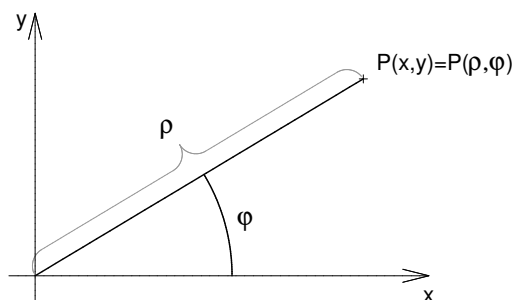
### 3.7.1 Polární souřadnice

Nejčastěji užívanou transformací v rovině je zobrazení pomocí *polárních souřadnic*. Zobrazení  $\Phi$  je tvaru  $\Phi(\rho, \varphi) = (\Phi_1(\rho, \varphi), \Phi_2(\rho, \varphi)) = (\rho \cos \varphi, \rho \sin \varphi)$ .

Transformační rovnice mají tvar

$$x = \Phi_1(\rho, \varphi) = \rho \cos \varphi$$

$$y = \Phi_2(\rho, \varphi) = \rho \sin \varphi$$



$$D\Phi(\rho, \varphi) = \begin{vmatrix} \frac{\partial \Phi_1}{\partial \rho} & \frac{\partial \Phi_1}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial \Phi_2}{\partial \rho} & \frac{\partial \Phi_2}{\partial \varphi} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos \varphi & -\rho \sin \varphi \\ \sin \varphi & \rho \cos \varphi \end{vmatrix} = \rho \cos^2 \varphi + \rho \sin^2 \varphi = \rho.$$

Jedná se o zobrazení  $\Phi : \langle 0, \infty \rangle \times \langle 0, 2\pi \rangle \rightarrow \mathbb{R}^2$  (nebo též  $\Phi : \langle 0, \infty \rangle \times \langle -\pi, \pi \rangle \rightarrow \mathbb{R}^2$ ) a platí tedy vzorec

$$\iint_B f(x, y) dx dy = \iint_A f(\rho \cos \varphi, \rho \sin \varphi) \cdot \rho d\rho d\varphi$$



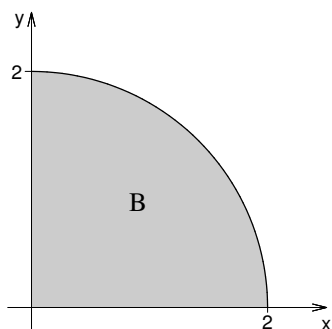
**Příklad 3.26.** Vypočtěte  $\iint_B \sqrt{x^2 + y^2} dx dy$ , kde

$$B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0, y \geq 0, x^2 + y^2 \leq 4\}.$$

**Řešení.** Máme

$$\begin{aligned} x &= \rho \cos \varphi & \varphi &\in \langle 0, \frac{\pi}{2} \rangle \\ y &= \rho \sin \varphi & \rho &\in \langle 0, 2 \rangle \end{aligned}$$

V našem případě je tedy  $A = \{(\rho, \varphi) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq \rho \leq 2, 0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}\}$ .



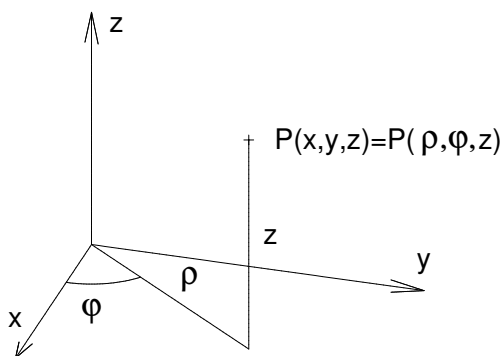
$$\begin{aligned} \iint_B \sqrt{x^2 + y^2} dx dy &= \iint_A \sqrt{\rho^2} \cdot \rho d\rho d\varphi = \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left( \int_0^2 \rho^2 d\rho \right) d\varphi = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[ \frac{\rho^3}{3} \right]_0^2 d\varphi \\ &= \frac{8}{3} \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi = \frac{4}{3}\pi. \end{aligned}$$

□

### 3.7.2 Cylindrické souřadnice

Zobrazení  $\Phi$  je tvaru

$$\Phi(\rho, \varphi, z) = (\Phi_1(\rho, \varphi, z), \Phi_2(\rho, \varphi, z), \Phi_3(\rho, \varphi, z)) = (\rho \cos \varphi, \rho \sin \varphi, z).$$



Transformační rovnice mají tvar

$$\begin{aligned} x &= \Phi_1(\rho, \varphi, z) = \rho \cos \varphi \\ y &= \Phi_2(\rho, \varphi, z) = \rho \sin \varphi \\ z &= \Phi_3(\rho, \varphi, z) = z \end{aligned}$$

$$D\Phi(\rho, \varphi, z) = \begin{vmatrix} \cos \varphi & -\rho \sin \varphi & 0 \\ \sin \varphi & \rho \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \rho.$$

Jedná se o zobrazení  $\Phi : \langle 0, \infty \rangle \times \langle 0, 2\pi \rangle \times (-\infty, \infty) \rightarrow \mathbb{R}^3$  (nebo též  $\Phi : \langle 0, \infty \rangle \times \langle -\pi, \pi \rangle \times (-\infty, \infty) \rightarrow \mathbb{R}^3$ ) a platí

$$\iiint_B f(x, y, z) dx dy dz = \iiint_A f(\rho \cos \varphi, \rho \sin \varphi, z) \cdot \rho d\rho d\varphi dz.$$

Cylindrické souřadnice používáme u integračních oborů, jejichž průměty do vhodné souřadnicové roviny lze vyšetřovat v polárních souřadnicích.

**Příklad 3.27.** Vypočtete  $\iiint_B (x^2 + y^2) dx dy dz$ , kde

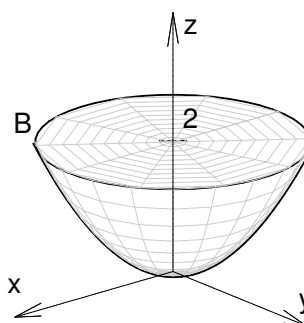
$$B = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \frac{1}{2}(x^2 + y^2) \leq z \leq 2\}.$$

**Řešení.** Máme

$$\begin{aligned} x &= \rho \cos \varphi & \varphi &\in \langle 0, 2\pi \rangle \\ y &= \rho \sin \varphi & \rho &\in \langle 0, 2 \rangle & |D\Phi| &= \rho \\ z &= z & z &\in \left\langle \frac{\rho^2}{2}, 2 \right\rangle \end{aligned}$$

Tedy  $A = \{(\rho, \varphi, z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \leq \rho \leq 2, 0 \leq \varphi \leq 2\pi, \frac{\rho^2}{2} \leq z \leq 2\}$ .

$$\begin{aligned} \iiint_B (x^2 + y^2) dx dy dz &= \iiint_A \rho^2 \cdot \rho d\rho d\varphi dz = \\ &= \int_0^{2\pi} \left( \int_0^2 \left( \int_{\frac{\rho^2}{2}}^2 \rho^3 dz \right) d\rho \right) d\varphi = \dots = \frac{16\pi}{3}. \end{aligned}$$

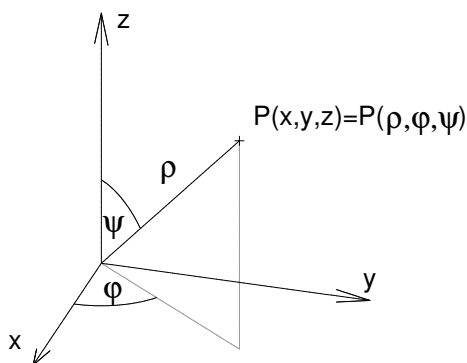


□

### 3.7.3 Sférické souřadnice

Zobrazení  $\Phi$  je tvaru

$$\Phi(\rho, \varphi, \psi) = (\Phi_1(\rho, \varphi, \psi), \Phi_2(\rho, \varphi, \psi), \Phi_3(\rho, \varphi, \psi)) = (\rho \cos \varphi \sin \psi, \rho \sin \varphi \sin \psi, \rho \cos \psi).$$



Transformační rovnice mají tvar

$$\begin{aligned} x &= \Phi_1(\rho, \varphi, \psi) = \rho \cos \varphi \sin \psi \\ y &= \Phi_2(\rho, \varphi, \psi) = \rho \sin \varphi \sin \psi \\ z &= \Phi_3(\rho, \varphi, \psi) = \rho \cos \psi \end{aligned}$$

$$D\Phi(\rho, \varphi, \psi) = \begin{vmatrix} \cos \varphi \sin \psi & -\rho \sin \varphi \sin \psi & \rho \cos \varphi \cos \psi \\ \sin \varphi \sin \psi & \rho \cos \varphi \sin \psi & \rho \sin \varphi \cos \psi \\ \cos \psi & 0 & -\rho \sin \psi \end{vmatrix} = -\rho^2 \sin \psi.$$

Jedná se o zobrazení  $\Phi : \langle 0, \infty \rangle \times \langle 0, 2\pi \rangle \times \langle 0, \pi \rangle \rightarrow \mathbb{R}^3$  (nebo též  $\Phi : \langle 0, \infty \rangle \times \langle -\pi, \pi \rangle \times \langle 0, \pi \rangle \rightarrow \mathbb{R}^3$ ) a platí

$$\iiint_B f(x, y, z) dx dy dz = \iiint_A f(\rho \cos \varphi \sin \psi, \rho \sin \varphi \sin \psi, \rho \cos \psi) \cdot \rho^2 \sin \psi d\rho d\varphi d\psi.$$

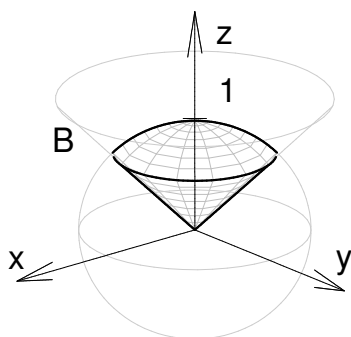
**Příklad 3.28.** Vypočtete  $\iiint_B \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \, dx dy dz$ , kde

$$B = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 \leq 1, z \geq \sqrt{x^2 + y^2}\}.$$

**Řešení.** Máme

$$\begin{aligned} x &= \rho \cos \varphi \sin \psi & \rho &\in \langle 0, 1 \rangle \\ y &= \rho \sin \varphi \sin \psi & \varphi &\in \langle 0, 2\pi \rangle \\ z &= \rho \cos \psi & \psi &\in \langle 0, \frac{\pi}{4} \rangle \end{aligned}$$

Tedy  $A = \{(\rho, \varphi, \psi) \in \mathbb{R}^3 : 0 \leq \rho \leq 1, 0 \leq \varphi \leq 2\pi, 0 \leq \psi \leq \frac{\pi}{4}\}$ .



$$\begin{aligned} \iiint_B \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \, dx dy dz &= \\ &= \iiint_A \sqrt{\rho^2} \cdot \rho^2 \sin \psi \, d\rho d\varphi d\psi = \\ &= \int_0^{2\pi} \left( \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left( \int_0^1 \rho^3 \sin \psi \, d\rho \right) d\psi \right) d\varphi = \\ &= \dots = \frac{\pi}{4} (2 - \sqrt{2}). \end{aligned}$$

□

### 3.8 Aplikace integrálů

Základní aplikace vícenásobných integrálů plynou z matematické a fyzikální interpretace ze začátku této kapitoly. Zde uvedeme některé další příklady použití dvojného a trojného integrálu.

#### Hmotnost hmoty spojitě rozložené na oblasti

- 1) Nechť na rovinné kompaktní oblasti  $I \subset \mathbb{R}^2$  je spojitě rozložena hmota tak, že hustota  $f$  v bodě  $(x, y) \in I$  je určena spojitou funkcí  $f(x, y) \geq 0$ , pak analogickými úvahami jako při zavedení pojmu trojrozměrného integrálu v kap. 1.3. na kvádru dostaneme, že celková hmotnost  $m$  rovinné oblasti  $I$  je určena vzorcem

$$m(I) = \iint_I f(x, y) \, dx dy.$$

- 2) Nechť  $I \subset \mathbb{R}^3$  je trojrozměrná kompaktní oblast, ve které je spojitě rozložena hmota, charakterizovaná hustotou  $f(x, y, z) \geq 0$ . Pak celková hmotnost oblasti  $I$  je určena vzorcem

$$m(I) = \iiint_I f(x, y, z) \, dx dy dz.$$

## Statické momenty a těžiště rovinných a prostorových útvarů

- 1) Nechť na rovinné kompaktní oblasti  $I \subset \mathbb{R}^2$  je spojitě rozložena hmota s hustotou  $f(x, y) \geq 0$ , pak pro statické momenty  $S_x$  a  $S_y$  platí

$$S_x = \iint_I y f(x, y) \, dx dy, \quad S_y = \iint_I x f(x, y) \, dx dy.$$

Souřadnice těžiště  $T = (t_1, t_2)$  oblasti jsou dány vzorci

$$t_1 = \frac{S_x}{m(I)}, \quad t_2 = \frac{S_y}{m(I)}.$$

- 2) Nechť  $I \subset \mathbb{R}^3$  je trojrozměrná kompaktní oblast se spojitě rozloženou hustotou  $f(x, y, z) \geq 0$ . Pak pro statické momenty vzhledem k souřadnicovým rovinám platí tyto vzorce

$$S_{xy} = \iiint_I z f(x, y, z) \, dx dy dz, \quad S_{xz} = \iiint_I y f(x, y, z) \, dx dy dz,$$

$$S_{yz} = \iiint_I x f(x, y, z) \, dx dy dz.$$

Pro souřadnice těžiště platí

$$T = \left( \frac{S_{yz}}{m(I)}, \frac{S_{xz}}{m(I)}, \frac{S_{xy}}{m(I)} \right).$$

## Momenty setrvačnosti těles v rovině a v prostoru

- 1) Momenty setrvačnosti  $I_x$  a  $I_y$  rovinné kompaktní oblasti  $I \subset \mathbb{R}^2$  se spojitě rozloženou hustotou  $f(x, y) \geq 0$  jsou dány vzorci

$$I_x = \iint_I y^2 f(x, y) \, dx dy dz, \quad I_y = \iint_I x^2 f(x, y) \, dx dy dz.$$

- 2) Momenty setrvačnosti  $I_x$ ,  $I_y$  a  $I_z$  vzhledem k souřadnicovým osám pro trojrozměrnou kompaktní oblast  $I \subset \mathbb{R}^3$  se spojitě rozloženou hustotou  $f(x, y, z) \geq 0$  se dají počítat podle vzorců

$$I_x = \iiint_I (y^2 + z^2) f(x, y, z) \, dx dy dz, \quad I_y = \iiint_I (x^2 + z^2) f(x, y, z) \, dx dy dz,$$

$$I_z = \iiint_I (x^2 + y^2) f(x, y, z) \, dx dy dz.$$

**Příklad 3.29.** Vypočtete těžiště osminy koule o poloměru  $r$ , je-li její hustota konstantní.

**Řešení.** Objem osminy koule o poloměru  $r$  je  $V = \frac{1}{6}\pi r^3$ , takže její hmotnost při konstantní hustotě  $c = c(x, y, z)$  bude

$$m = \frac{1}{6}\pi r^3 c.$$

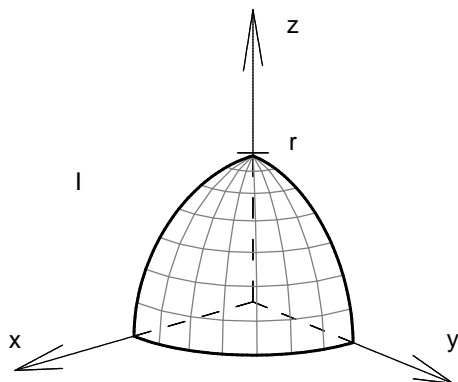
Pro statické momenty platí vztah

$$S_{xy} = c \iiint_I z \, dx dy dz, \quad S_{xz} = c \iiint_I y \, dx dy dz, \quad S_{yz} = c \iiint_I x \, dx dy dz.$$

Použijeme sférické souřadnice.

$$\begin{aligned} x &= \rho \cos \varphi \sin \psi & \rho &\in \langle 0, r \rangle \\ y &= \rho \sin \varphi \sin \psi & \varphi &\in \langle 0, \frac{\pi}{2} \rangle \\ z &= \rho \cos \psi & \psi &\in \langle 0, \frac{\pi}{2} \rangle \end{aligned}$$

Tedy  $I = \{(\rho, \varphi, \psi) \in \mathbb{R}^3 : 0 \leq \rho \leq r, 0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}, 0 \leq \psi \leq \frac{\pi}{2}\}$  a  $|\mathbf{D}\Phi| = \rho^2 \sin \psi$ .



$$\begin{aligned} S_{yz} &= c \iiint_I x \, dx dy dz = \\ &= c \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left( \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left( \int_0^r \rho^3 \cos \varphi \sin^2 \psi \, d\rho \right) d\varphi \right) d\psi = \\ &= \dots = \frac{\pi r^4}{16} c. \end{aligned}$$

Potom pro  $x$ -ovou souřadnici těžiště platí

$$T_x = \frac{S_{yz}}{m} = \frac{6}{\pi r^3 c} \frac{\pi r^4 c}{16} = \frac{3r}{8}.$$

Snadno se nahlédne, že pro další statické momenty je  $S_{xy} = c \iiint_I z \, dx dy dz = \frac{\pi r^4}{16} c$

a podobně  $S_{xz} = c \iiint_I y \, dx dy dz = \frac{\pi r^4}{16} c$ . Proto hledané těžiště má souřadnice

$$T = \left( \frac{3r}{8}, \frac{3r}{8}, \frac{3r}{8} \right).$$

□

**Příklad 3.30.** Určete momenty setrvačnosti tělesa omezeného válcem  $x^2 + y^2 = a^2$  a rovinami  $z = 0$  a  $z = b$  vzhledem k souřadnicovým osám, je-li jeho hustota konstantní.

**Řešení.** Označme hustotu tělesa  $c = f(x, y, z)$ . Pro momenty setrvačnosti tělesa platí vztah

$$I_x = c \iiint_I (y^2 + z^2) dx dy dz, \quad I_y = c \iiint_I (x^2 + z^2) dx dy dz, \quad I_z = c \iiint_I (x^2 + y^2) dx dy dz.$$

Použijeme cylindrické souřadnice. Máme

$$\begin{aligned} x &= \rho \cos \varphi & \varphi &\in \langle 0, 2\pi \rangle \\ y &= \rho \sin \varphi & \rho &\in \langle 0, a \rangle & |D\Phi| &= \rho \\ z &= z & z &\in \langle 0, b \rangle \end{aligned}$$

Tedy  $I = \{(\rho, \varphi, z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \leq \rho \leq a, 0 \leq \varphi \leq 2\pi, 0 \leq z \leq b\}$ . Potom

$$\begin{aligned} I_x &= c \iiint_I (y^2 + z^2) dx dy dz = c \int_0^{2\pi} \left( \int_0^a \left( \int_0^b (\rho^3 \sin^2 \varphi + \rho z^2) dz \right) d\rho \right) d\varphi = \\ &= \dots = \pi c \left( \frac{a^2 b^3}{3} + \frac{a^4 b}{4} \right), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} I_y &= c \iiint_I (x^2 + z^2) dx dy dz = c \int_0^{2\pi} \left( \int_0^a \left( \int_0^b (\rho^3 \cos^2 \varphi + \rho z^2) dz \right) d\rho \right) d\varphi = \\ &= \dots = \pi c \left( \frac{a^2 b^3}{3} + \frac{a^4 b}{4} \right), \end{aligned}$$

$$I_z = c \iiint_I (x^2 + y^2) dx dy dz = c \int_0^{2\pi} \left( \int_0^a \left( \int_0^b \rho^3 dz \right) d\rho \right) d\varphi = \pi c \left( \frac{a^4 b}{2} \right).$$

□

## Maplety

Odkaz na maplety:

1. [dvojný integrál](#),
2. [polární transformace](#),
3. [trojný integrál](#),
4. [cylindrická transformace](#),
5. [sférická transformace](#).

## Cvičení

1. V následujících příkladech vypočítejte zadané integrály

a)  $\iint_B dx dy$ , kde  $B$  je množina ohraničená přímkami  $x = 3$ ,  $x = 5$ ,  $3x - 2y + 4 = 0$ ,  $3x - 2y + 1 = 0$ .

b)  $\iint_B (2x + 3y + 1) dx dy$ , kde  $B$  je množina ohraničená parabolou  $y^2 = 2x$  a její tětivou jdoucí body  $A = (2, -2)$ ,  $B = (8, 4)$ .

c)  $\iint_B dx dy$ ,  $B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \geq x^2, y \leq 4 - x^2\}$

d)  $\iint_B xy^2 dx dy$ , kde  $B$  je množina ohraničená parabolou  $y^2 = 2px$  a přímkou  $x = \frac{p}{2}$ .

e)  $\iiint_B xy dx dy dz$ , kde  $B$  je množina ohraničená plochami  $z = xy$ ,  $x + y = 1$  a  $z = 0$ .

f)  $\iiint_B dx dy dz$ , kde  $B$  je množina ohraničená plochami  $z = xy$ ,  $y = \sqrt{x}$  a rovinami  $x + y = 2$ ,  $y = 0$ ,  $z = 0$ .

g)  $\iiint_B dx dy dz$ , kde  $B$  je množina ohraničená plochami  $z = 1 - 4x^2 - y^2$  a  $z = 0$ .

h)  $\iiint_B xyz dx dy dz$ , kde  $B$  je množina ohraničená plochami  $x = 1$ ,  $y = x$ ,  $z = y$  a souřadnými rovinami.

2. Vypočítejte následující dvojné integrály pomocí transformace do polárních souřadnic:

a)  $\iint_M (1 - x^2 - y^2) dx dy$ ,  $M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$ .

b)  $\iint_M (x^2 + y^2) dx dy$ ,  $M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4, y \leq |x|\}$ .

c)  $\iint_M e^{-(x^2+y^2)} dx dy$ ,  $M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0, x^2 + y^2 \leq a^2\}$ .

d)  $\iint_M \sin \sqrt{x^2 + y^2} dx dy$ ,  $M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \pi^2 \leq x^2 + y^2 \leq 4\pi^2\}$ .

e)  $\iint_M x dx dy$ ,  $M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + (y - R)^2 \leq R^2, y \geq x, y \geq -x\}$ .

3. Vypočítejte následující trojné integrály pomocí transformace do cylindrických nebo sférických souřadnic

a)  $\iiint_M dx dy dz$ ,  $M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \leq 1, x \geq 0, 0 \leq z \leq 6\}$ .

b)  $\iiint_M z dx dy dz$ ,  $M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 \leq a^2, x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0\}$ .

c)  $\iiint_M dx dy dz$ ,  $M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z \leq x^2 + y^2, z \leq y\}$ .

d)  $\iiint_M z dx dy dz$ ,  $M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \frac{1}{3}(x^2 + y^2) \leq z \leq \sqrt{4 - x^2 - y^2}\}$ .

$$e) \iiint_M dx dy dz, M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \leq 4x, z \geq 0, z \leq x + 1\}.$$

4. V následujících příkladech vypočítejte zadané integrály

$$a) \iint_B dx dy, \text{ kde } B \text{ je množina ohraničená přímkami } x = 3, x = 5, 3x - 2y + 4 = 0, 3x - 2y + 1 = 0.$$

$$b) \iint_B (2x + 3y + 1) dx dy, \text{ kde } B \text{ je množina ohraničená parabolou } y^2 = 2x \text{ a její tětivou jdoucí body } A = (2, -2), B = (8, 4).$$

$$c) \iint_B dx dy, B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \geq x^2, y \leq 4 - x^2\}.$$

$$d) \iint_B xy^2 dx dy, \text{ kde } B \text{ je množina ohraničená parabolou } y^2 = 2px \text{ a přímkou } x = \frac{p}{2}.$$

$$e) \iiint_B xy dx dy dz, \text{ kde } B \text{ je množina ohraničená plochami } z = xy, x + y = 1 \text{ a } z = 0.$$

$$f) \iiint_B dx dy dz, \text{ kde } B \text{ je množina ohraničená plochami } z = xy, y = \sqrt{x} \text{ a rovinami } x + y = 2, y = 0, z = 0.$$

$$g) \iiint_B dx dy dz, \text{ kde } B \text{ je množina ohraničená plochami } z = 1 - 4x^2 - y^2 \text{ a } z = 0.$$

$$h) \iiint_B xyz dx dy dz, \text{ kde } B \text{ je množina ohraničená plochami } x = 1, y = x, z = y \text{ a souřadnicovými rovinami.}$$

5. V následujících příkladech vypočítejte těžiště těles, ohraničených plochami:

$$a) x^2 + y^2 = z, x + y = a, x = 0, y = 0, z = 0.$$

$$b) x^2 + y^2 = 2z, x + y = z.$$

6. Vypočítejte momenty setrvačnosti těles vzhledem k ose  $z$ , když těleso je ohraničené plochami:

$$a) z^2 = 2ax, x^2 + y^2 = ax, z = 0.$$

$$b) x^2 + y^2 = z, x + y = 1, x - y = 1, z = 0.$$

$$c) x^2 + y^2 + z^2 = 2, x^2 + y^2 = z^2, z > 0.$$

## Výsledky

1. a) 3
- b)  $187\frac{1}{5}$
- c)  $\frac{16}{3}\sqrt{2}$
- d)  $\frac{p^5}{21}$
- e)  $\frac{1}{180}$
- f)  $\frac{3}{8}$
- g)  $\frac{\pi}{4}$



- h)  $\frac{1}{48}$
2. a)  $\frac{\pi}{2}$   
b)  $\frac{15\pi}{8}$   
c)  $\frac{\pi}{2}(1 - e^{-a^2})$   
d)  $-6\pi^2$   
e) 0
3. a)  $3\pi$   
b)  $\frac{\pi}{16} a^4$   
c)  $\frac{\pi}{32}$   
d)  $\frac{13}{4}\pi$   
e)  $12\pi$
4. a) 3  
b)  $187\frac{1}{5}$   
c)  $\frac{16}{3}\sqrt{2}$   
d)  $\frac{p^5}{21}$   
e)  $\frac{1}{180}$   
f)  $\frac{3}{8}$   
g)  $\frac{\pi}{4}$   
h)  $\frac{1}{48}$
5. a)  $(\frac{2}{5}a, \frac{2}{5}a, \frac{7}{30}a^2)$   
b)  $(1, 1, \frac{5}{3})$
6. a)  $I_z = \frac{35}{135}\sqrt{2} a^5$   
b)  $I_z = \frac{14}{15}$   
c)  $I_z = \frac{4}{15}\pi (4\sqrt{2} - 5)$

## 4 Křivkový integrál

### 4.1 Křivky v $\mathbb{R}^n$

Intuitivně jasný pojem křivky je třeba v matematice přesně definovat. To lze udělat mnoha způsoby, které nemusí být všechny ekvivalentní. Pro naše účely postačí omezit se na kompaktní křivky takové, které se dají složit z tzv. *regulárních oblouků*. Takový oblouk si můžeme představit, že vznikne pružnou deformací elastické tyčinky (úsečky); tato deformace je popsána zobrazením jistých vlastností, které nazýváme parametrizací daného oblouku. S pojmem parametrizace jsme se seznámili již dříve. Abychom nemuseli diskutovat zvlášť případy křivek v  $\mathbb{R}^2$  a v  $\mathbb{R}^3$ , budeme pracovat v prostoru  $\mathbb{R}^n$ .

**Definice 4.1.** Nechť je dáno zobrazení  $\varphi : \langle \alpha, \beta \rangle \rightarrow \mathbb{R}^n$ ,  $\langle \alpha, \beta \rangle \subset \mathbb{R}$ . Toto zobrazení je určeno  $n$ -ticí reálných funkcí  $\varphi_i : \langle \alpha, \beta \rangle \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $i = 1, \dots, n$ . Píšeme jako obvykle

$$\varphi = (\varphi_1, \dots, \varphi_n).$$

Zobrazení  $\varphi$  nazýváme *parametrizací* množiny  $\varphi(\langle \alpha, \beta \rangle)$  a rovnici

$$p = \varphi(t), \quad t \in \langle \alpha, \beta \rangle \quad (4.1)$$

nazýváme *parametrickou rovnicí* množiny  $\varphi(\langle \alpha, \beta \rangle)$ ; v souřadnicovém tvaru pak píšeme místo (4.1)

$$\left. \begin{array}{l} x_1 = \varphi_1(t) \\ x_2 = \varphi_2(t) \\ \vdots \\ x_n = \varphi_n(t) \end{array} \right\} t \in \langle \alpha, \beta \rangle \quad (4.2)$$

( $p = (x_1, \dots, x_n)$ ) a rovnice (4.2) nazýváme *parametrickými rovnicemi* množiny  $\varphi(\langle \alpha, \beta \rangle)$ ; proměnnou  $t$  nazýváme *parametrem*.

Množina  $\varphi(\langle \alpha, \beta \rangle)$  může být dosti složitá, neklademe-li na  $\varphi$  další omezující podmínky. I při spojitém zobrazení mohou body  $\varphi(t)$  vyplnit v  $\mathbb{R}^n$  až  $n$ -rozměrnou množinu (např. čtverec v  $\mathbb{R}^2$  či krychli v  $\mathbb{R}^3$ ), ačkoli se zdá, že při jediném reálném parametru  $t$  by měla být množina  $\varphi(\langle \alpha, \beta \rangle)$  z intuitivního hlediska jednorozměrná. Je proto třeba učinit o  $\varphi$  další předpoklady.

**Definice 4.2.** Množina  $A \subset \mathbb{R}^n$ , ( $n \geq 2$ ) se nazývá *hladký oblouk* v  $\mathbb{R}^n$ , existuje-li prosté zobrazení  $\varphi : \langle \alpha, \beta \rangle \rightarrow \mathbb{R}^n$  třídy  $C_1$  (tj.  $\varphi$  má spojitou derivaci) takové, že  $\varphi'(t) \neq \mathbf{o}$  pro každé  $t \in \langle \alpha, \beta \rangle$  a  $\varphi(\langle \alpha, \beta \rangle) = A$ .

Zobrazení  $\varphi$  se nazývá (*regulární*) *parametrizace oblouku*  $A$ .

Vyjádříme-li  $\varphi$  v kartézském tvaru, tedy např. pro  $n = 3$

$$\vec{r}(t) = \varphi_1(t)\mathbf{i} + \varphi_2(t)\mathbf{j} + \varphi_3(t)\mathbf{k},$$

hovoříme o *vektorové rovnici* oblouku  $A$ .

**Definice 4.3.** Nechť  $\varphi : \langle \alpha, \beta \rangle \rightarrow \mathbb{R}^n$  je regulární parametrizace oblouku  $A$ . Nechť  $g : \langle \alpha', \beta' \rangle \rightarrow \mathbb{R}$  je funkce, která zobrazuje interval  $\langle \alpha', \beta' \rangle$  na interval  $\langle \alpha, \beta \rangle$  a má v intervalu  $\langle \alpha', \beta' \rangle$  spojitou derivaci, jež je v každém bodě tohoto intervalu různá od nuly. Takovou funkci budeme dále nazývat *transformací parametru*. Zobrazení

$$\psi = \varphi \circ g : \langle \alpha', \beta' \rangle \rightarrow \mathbb{R}^n$$

je rovněž regulární parametrizací oblouku  $A$ ; říkáme, že *parametrizace  $\psi$  vznikla z parametrizace  $\varphi$  transformací  $g$* .

(Zřejmě  $\psi(\langle \alpha', \beta' \rangle) = \varphi(\langle \alpha, \beta \rangle)$ ,  $\psi$  je prosté zobrazení, spojitost a nenulovost derivace  $\psi'$  plyne z pravidla pro derivování složeného zobrazení:  $\psi'(s) = \varphi'(g(s))g'(s)$ ,  $s \in \langle \alpha', \beta' \rangle$ .)

Oblouk má tedy nekonečně mnoho (regulárních) parametrizací. Vezmeme-li některou jeho parametrizaci, dostaneme z ní každou další parametrizaci vhodnou transformací parametru. To plyne z tohoto tvrzení:

Jsou-li  $\varphi : \langle \alpha, \beta \rangle \rightarrow \mathbb{R}^n$ ,  $\psi : \langle \alpha', \beta' \rangle \rightarrow \mathbb{R}^n$  dvě regulární parametrizace téhož oblouku  $A$ , je funkce  $g$

$$g(s) = \varphi^{-1}(\psi(s)), \quad s \in \langle \alpha', \beta' \rangle,$$

transformací parametru a  $\psi = \varphi \circ g$ .

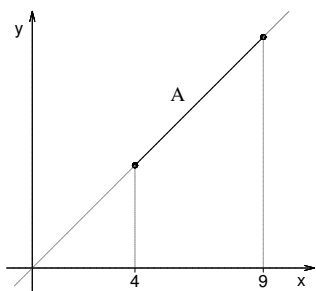
**Definice 4.4.** Je-li transformace parametru  $g$  rostoucí funkce, říkáme, že  $\varphi, \psi$  jsou *souhlasné parametrizace*; je-li  $g$  klesající, říkáme, že  $\varphi, \psi$  jsou *nesouhlasné*.

Speciálně, parametrizace

$$\varphi : \langle \alpha, \beta \rangle \rightarrow \mathbb{R}^n, \quad \psi : \langle -\beta, -\alpha \rangle \rightarrow \mathbb{R}^n, \quad \psi(t) = \varphi(-t)$$

jsou nesouhlasné parametrizace, nazývají se *opačné*.

**Příklad 4.5.** Uvažujme parametrické rovnice oblouku  $A$  tvaru



$$\varphi : \begin{cases} x = t \\ y = t \end{cases} \quad t \in \langle 4, 9 \rangle$$

Jedná se tedy o úsečku ležící na přímce  $y = x$  (viz obrázek). Tedy  $\varphi(t) = (\varphi_1(t), \varphi_2(t)) = (t, t)$ ,  $\varphi : \langle 4, 9 \rangle \rightarrow \mathbb{R}^2$

V našem případě  $\langle \alpha, \beta \rangle = \langle 4, 9 \rangle$ .

1) Zvolme transformaci parametru  $g_1 : \langle 2, 3 \rangle \rightarrow \langle 4, 9 \rangle$  (tj.  $\langle \alpha', \beta' \rangle = \langle 2, 3 \rangle$ ),  $g_1(s) = s^2$ .

Jinou parametrizaci  $\psi_1$  dostaneme následovně:

$$\psi_1(s) = (\varphi \circ g_1)(s) = \varphi(g_1(s)) = \varphi(s^2) = (s^2, s^2)$$

Tedy

$$\psi_1 : \begin{cases} x = s^2 \\ y = s^2 \end{cases} \quad t \in \langle 2, 3 \rangle$$

je také parametrizace úsečky  $A$ .

2) Zvolme nyní transformaci parametru  $g_2 : \langle 16, 81 \rangle \rightarrow \langle 4, 9 \rangle$  (tj.  $\langle \alpha', \beta' \rangle = \langle 16, 81 \rangle$ ),  
 $g_2(u) = \sqrt{u}$

Takže další parametrizace je tvaru

$$\psi_2(u) = (\varphi \circ g_2)(u) = \varphi(g_2(u)) = \varphi(\sqrt{u}) = (\sqrt{u}, \sqrt{u})$$

a zřejmě

$$\psi_2 : \begin{cases} x = \sqrt{u} \\ y = \sqrt{u} \end{cases} \quad t \in \langle 16, 81 \rangle$$

je opět parametrizace úsečky  $A$ . Jelikož jak  $g_1$ , tak  $g_2$  jsou rostoucí funkce,  $\varphi, \psi_1, \psi_2$  jsou souhlasné parametrizace.

Pojmy, které se vztahují k oblouku a jež nezávisí na parametrizaci, jsou *geometrickými pojmy*. Je to např. pojem krajního bodu oblouku.

**Definice 4.6.** *Krajními body oblouku  $A$  jsou body  $a, b$  takové, že pro některou parametrizaci  $\varphi : \langle \alpha, \beta \rangle \rightarrow \mathbb{R}^n$  oblouku  $A$  je  $\varphi(\alpha) = a$ ,  $\varphi(\beta) = b$ . Množina  $\partial A = \{a, b\}$  se nazývá *okraj oblouku*, množina  $A \setminus \partial A$  se nazývá (*geometrický*) *vnitřek oblouku  $A$*  (pozor, nejde o vnitřek množiny  $A$  v  $\mathbb{R}^n$ , jak by definován v kap. (1), to je ovšem prázdná množina).*

Další pojem, který nezávisí na parametrizaci, je pojem jednotkového tečného vektoru oblouku.

**Definice 4.7.** Je-li  $p = \varphi(t)$  libovolný bod oblouku  $A$ , pak v něm existují právě dva *jednotkové tečné vektory*:

$$\frac{\varphi'(t)}{|\varphi'(t)|}, \quad -\frac{\varphi'(t)}{|\varphi'(t)|}. \quad (4.3)$$

O prvním z nich řekneme, že je *indukován parametrizací  $\varphi$* . Je-li  $\psi$  další parametrizace oblouku  $A$  a je-li  $p = \varphi(t) = \psi(s)$ , pak indukované jednotkové tečné vektory

$$\frac{\varphi'(t)}{|\varphi'(t)|}, \quad \frac{\psi'(s)}{|\psi'(s)|}$$

jsou si rovny, jde-li o souhlasné parametrizace, a jsou opačné, jde-li o nesouhlasné parametrizace. (To se snadno dokáže, použijeme-li vzorec pro derivování složeného zobrazení  $\psi = \varphi \circ g$ , kde  $g$  je transformace parametru.)

### Orientace oblouku

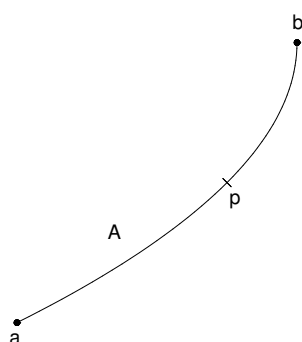
Nechť  $A \subset \mathbb{R}^n$  je oblouk a  $\varphi = \varphi(t) : \langle \alpha, \beta \rangle \rightarrow \mathbb{R}^n$  některá jeho parametrizace. Interpretujeme-li parametr  $t$  jako čas, pak  $p = \varphi(t)$  je poloha pohybujícího se bodu v okamžiku  $t$ . Bod  $a = \varphi(\alpha)$  je v tomto případě počáteční poloha a  $b = \varphi(\beta)$  koncová poloha pohybujícího se bodu.

**Definice 4.8.** Jestliže měl pohybující se bod v čase  $t_1$  polohu  $p_1 = \varphi(t_1)$  a v čase  $t_2 > t_1$  polohu  $p_2 = \varphi(t_2)$ , je přirozené říci, že  $p_2$  je za  $p_1$  (nebo také, že  $p_1$  je před  $p_2$ ), a píšeme  $p_2 \succ p_1$  (nebo  $p_1 \prec p_2$ ).

Tedy

$$p_1, p_2 \in A : p_1 \prec p_2 \Leftrightarrow t_1 = \varphi^{-1}(p_1) < t_2 = \varphi^{-1}(p_2).$$

Tím jsme zavedli na  $A$  relaci  $\prec$ , která je uspořádáním v množině  $A$ .



O tomto uspořádání řekneme, že určuje *orientaci* oblouku  $A$ , a oblouk s tímto uspořádáním nazveme *orientovaným obloukem*. Budeme jej značit  $\mathbf{A}$ . O parametrizaci  $\varphi$  říkáme, že určuje *orientaci oblouku*  $\mathbf{A}$  nebo že *souhlasí s orientací*  $\mathbf{A}$ . (Říkáme též, že orientace je dána růstem parametru dané parametrizace.)

Pro každý bod  $p \in A$ ,  $p \neq a$ ,  $p \neq b$ , zřejmě platí  $a \prec p \prec b$  (viz obr.).

Bod  $a = \varphi(\alpha)$ , resp.  $b = \varphi(\beta)$  nazveme *počátečním*, resp. *koncovým bodem orientovaného oblouku*  $A$ .

Jestliže parametrizace  $\varphi$  souhlasí s orientací  $\mathbf{A}$  a je-li  $\varphi_1$  parametrizace souhlasná s  $\varphi$ , pak  $\varphi_1$  rovněž souhlasí s orientací  $\mathbf{A}$ .

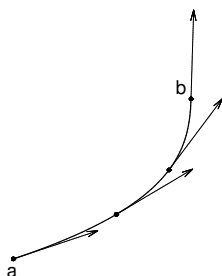
Dále platí: Je-li  $\prec^{-1}$  inverzní relace k  $\prec$ , pak určuje rovněž orientaci oblouku  $A$ , která se nazývá *opačná*; oblouk  $A$  s tímto uspořádáním nazýváme *opačně orientovaným obloukem* k oblouku  $\mathbf{A}$ . Označíme jej  $-\mathbf{A}$ .

Z předchozího výkladu plyne, že *orientace oblouku je určena tím, který z krajních bodů prohlásíme za počáteční a který za koncový*. Dále je zřejmé, že *jsou možné právě dvě orientace oblouku*, neboť všechny parametrizace oblouku lze rozdělit do dvou tříd tak, že v jedné třídě jsou všechny parametrizace souhlasné a libovolné dvě parametrizace z různých tříd jsou nesouhlasné. Parametrizace z jedné třídy určují vždy tutéž orientaci, parametrizace z druhé třídy určují pak orientaci opačnou.

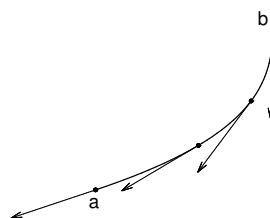
Orientace oblouku úzce souvisí s volbou jednotkového tečného pole.

**Definice 4.9.** *Jednotkové tečné pole oblouku*  $A \subset \mathbb{R}^n$  je spojitě vektorové pole  $\vec{T} : A \rightarrow V(\mathbb{R}^n)$  takové, že  $\vec{T}(p)$  je jednotkový tečný vektor oblouku  $A$  v bodě  $p \in A$ .

Na oblouku existují právě dvě jednotková tečná pole  $\vec{T}$  a  $-\vec{T}$ , která jsou navzájem opačná (viz obr. (4.1) a (4.2)).



Obr. 4.1: Jednotkové tečné pole...



Obr. 4.2: ...a pole k němu opačné

**Definice 4.10.** Je-li  $\varphi : \langle \alpha, \beta \rangle \rightarrow \mathbb{R}^n$  parametrizace oblouku  $A$ , která souhlasí se zvolenou orientací  $\mathbf{A}$ , nazýváme jednotkové tečné pole definované vztahem

$$\vec{\tau}(p) = \frac{\varphi'(\varphi^{-1}(p))}{|\varphi'(\varphi^{-1}(p))|}, \quad p \in A, \quad (4.4)$$

(viz (4.3)) *orientujícím polem oblouku  $\mathbf{A}$* . Orientovaný oblouk  $\mathbf{A}$  je účelné chápat jako dvojici  $(A, \vec{\tau})$ , oblouk  $-\mathbf{A}$  jako dvojici  $(A, -\vec{\tau})$ .

**Příklad 4.11.** Nechť  $A$  je polokružnice v  $\mathbb{R}^2$  poloměru  $R$  se středem v počátku, ležící v polorovině  $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2; y \geq 0\}$  (viz obrázek). Zvolme orientaci  $\mathbf{A}$  tak, aby bod  $a = (R, 0)$  byl počáteční, bod  $b = (-R, 0)$  koncový.

**Řešení.** Parametrizace, která souhlasí s touto orientací, je např.

$$\varphi(t) = (R \cos t, R \sin t), \quad t \in \langle 0, \pi \rangle$$

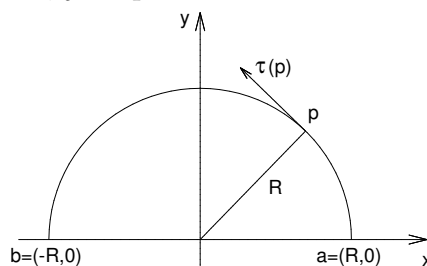
$$\varphi'(t) = (-R \sin t, R \cos t), \quad |\varphi'(t)| = R,$$

$$\varphi'(t)/|\varphi'(t)| = (-\sin t, \cos t).$$

$$\text{Je-li } p = (x, y) \in A, \quad x = R \cos t, \quad y = R \sin t,$$

$$\text{je } \vec{\tau} = \left(-\frac{y}{R}, \frac{x}{R}\right), \quad \text{kde } p = (x, y) \in A.$$

Pole  $\vec{\tau}$  je orientující pole. □



V předmětu BMA1 jsme se seznámili s pojmem *délky oblouku*. Každý hladký oblouk  $A \subset \mathbb{R}^n$  má konečnou délku  $s(A)$ . Je-li  $\varphi : \langle \alpha, \beta \rangle \rightarrow \mathbb{R}^n$  libovolná parametrizace oblouku  $A$ , pak

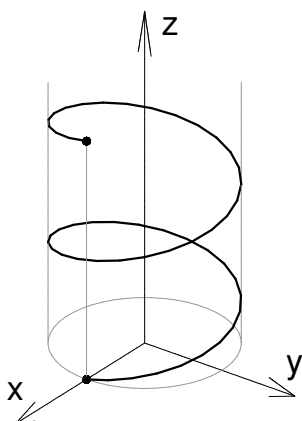
$$s(A) = \int_{\alpha}^{\beta} |\varphi'(t)| dt.$$

**Příklad 4.12.** Nechť  $A = \varphi(\langle 0, 4\pi \rangle)$ , kde

$$\varphi : \langle 0, 4\pi \rangle \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad \varphi(t) = (a \cos t, a \sin t, bt), \quad a > 0, \quad b > 0.$$

Oblouk  $A$  jsou dva závitů šroubovice na rotačním válci  $x^2 + y^2 = a^2$  (viz obrázek). Tedy

$$\begin{aligned}\varphi'(t) &= (-a \sin t, a \cos t, b) \\ |\varphi'(t)| &= \sqrt{a^2 \sin^2 t + a^2 \cos^2 t + b^2} = \sqrt{a^2 + b^2} \neq 0.\end{aligned}$$



Zobrazení  $\varphi$  je třídy  $C_1$ , má nenulovou derivaci a je prosté (všimněte si třetí komponenty), je tedy regulární parametrizací oblouku  $A$  a platí

$$\begin{aligned}s(A) &= \int_{\alpha}^{\beta} |\varphi'(t)| dt = \\ &= \int_0^{4\pi} \sqrt{a^2 + b^2} dt = \\ &= 4\pi \sqrt{a^2 + b^2}.\end{aligned}$$

Hladké oblouky jsou nejjednodušší jednorozměrné útvary v  $\mathbb{R}^n$ . Složitější jednorozměrné útvary lze tvořit z oblouků. Můžeme-li oblouky spojovat, vznikne křivka. Představíme-li si křivku, jak vzniká souvislým tahem hrotu tužky na papíře jako postupné vytváření oblouků, aniž by některý oblouk byl proběhnut více než jednou, můžeme definovat křivku takto:

**Definice 4.13.** Množinu  $C \subset \mathbb{R}^n$  nazveme (po částech hladkou) křivkou, existuje-li konečná posloupnost oblouků v  $\mathbb{R}^n$

$$(A_1, A_2, \dots, A_r), \quad (r \geq 1) \quad (4.5)$$

a konečná posloupnost bodů

$$(a_0, a_1, \dots, a_r) \quad (4.6)$$

tak, že platí

- (1)  $A_i$  je oblouk s krajními body  $a_{i-1}, a_i$  ( $a_{i-1} \neq a_i$ ) ( $i = 1, \dots, r$ )
- (2) libovolné dva oblouky  $A_i, A_j$  ( $i \neq j$ ) mají společné nejvýše krajní body
- (3)  $C = \bigcup_{i=1}^r A_i$ .

Je-li kromě podmínek (1) až (3) splněna ještě podmínka

- (4)  $A_i \cap A_j \cap A_k = \emptyset$  pro  $i \neq j \neq k \neq i$  (tj. každý z bodů  $a_i$  je krajním bodem nejvýše dvou oblouků),

nazveme křivku  $C$  *jednoduchou* (též *prostou* nebo *neprotínající se*) křivkou.

Je-li splněna podmínka

- (5)  $a_0 = a_r$ ,

nazveme  $C$  *uzavřenou křivkou*.

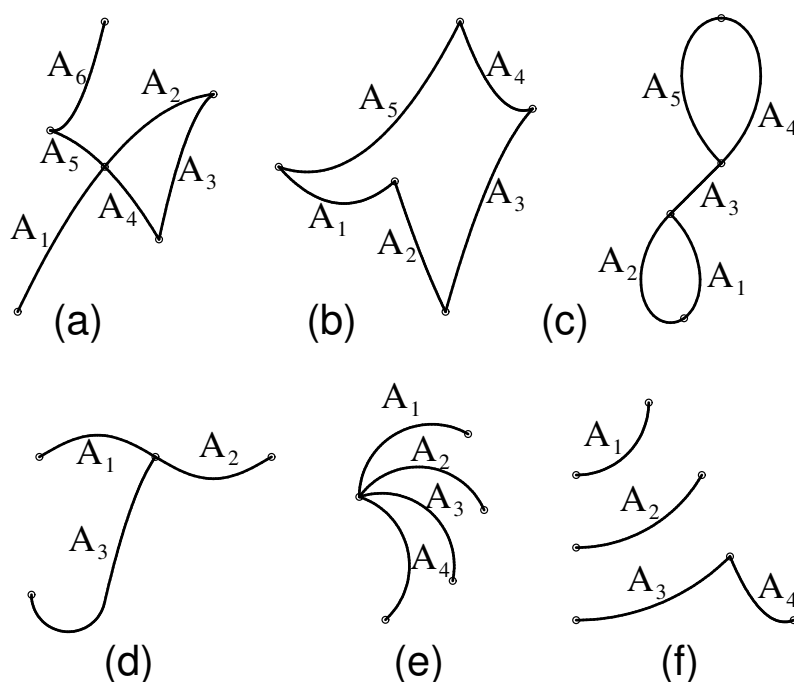
Soubor  $(A_1, A_2, \dots, A_r)$  nazveme *rozkladem křivky  $C$* . Jednoduchá křivka  $C$ , pro niž  $a_0 \neq a_r$ , se nazývá *po částech hladký oblouk*, body  $a_0, a_r$  *krajní body oblouku  $C$* .

Z podmínky (1) vyplývá, že  $a_i \in A_i \cap A_{i+1}$ , což znamená, že oblouky  $A_i, A_{i+1}$  se spojují v bodě  $a_i$ .

**Definice 4.14.** Bod  $p \in C$  nazýváme *regulárním bodem křivky  $C$* , existuje-li otevřené okolí  $U(p)$  tak, že  $\overline{U(p)} \cap C$  je hladký oblouk, v opačném případě se  $p$  nazývá *singulární bod křivky  $C$* .

Singulárními body mohou být nejvýše body  $a_i$  ( $i = 0, \dots, n$ ). Jednoduchá křivka bez singulárních bodů se nazývá *hladká*. Hladký oblouk je zřejmě speciální případ jednoduché hladké křivky. Příkladem jednoduché hladké uzavřené křivky je např. kružnice.

Podle definice křivky jsou z geometrických útvarů na obr. (4.3) křivkami pouze útvary (a),(b),(c), přitom křivka (b) je jednoduchá uzavřená křivka.



Obr. 4.3: Příklady útvarů, které jsou ((a),(b),(c)) a nejsou ((d),(e),(f)) křivkami

**Definice 4.15.** *Délkou křivky  $C$  s rozkladem (4.5) nazýváme číslo*

$$s(C) = \sum_{i=1}^r s(A_i).$$

**Poznámka 4.16.** Pomocí zjemnění se snadno dokáže, že číslo  $s(C)$  nezávisí na rozkladu křivky  $C$  na oblouky.



## 4.2 Neorientovaný křivkový integrál v $\mathbb{R}^n$

Nechť  $C \subset \mathbb{R}^n$  je křivka. Tak jako při výstavbě  $n$ -rozměrného integrálu v  $\mathbb{R}^n$  měly základní význam  $n$ -rozměrné intervaly a jejich objem, mají při výstavbě křivkového integrálu analogický význam oblouky, jejich délka a tzv. stupňovité funkce na  $C$ .

**Definice 4.17.** *Stupňovitou funkcí na  $C$  nazveme takovou funkci  $f : C \rightarrow \mathbb{R}$ , k níž existuje rozklad  $C$  na oblouky  $(A_1, \dots, A_k)$  takový, že na každém vnitřku oblouku  $A_i$  je  $f$  konstantní. Je-li  $a_i$  hodnota funkce  $f$  na vnitřku oblouku  $A_i$  ( $i = 1, \dots, k$ ), pak integrál stupňovité funkce  $f$  po křivce  $C$  definujeme vztahem*

$$\int_C f \, ds = \sum_{i=1}^k a_i s(A_i), \quad (4.7)$$

kde  $s(A_i)$  je délka oblouku  $A_i$  ( $i = 1, \dots, k$ ).

Řekneme, že  $N \subset C$  je *nulová množina na  $C$*  (množina křivkové míry 0), existuje-li k libovolnému  $\varepsilon > 0$  konečná posloupnost oblouků  $A'_j$ ,  $j = 1, \dots, k$ ,  $A'_j \subset C$ , pokrývající  $N$  a taková, že  $\sum_{j=1}^k s(A'_j) < \varepsilon$ .

Nulové množiny na  $C$  mají tytéž vlastnosti jako nulové množiny v  $\mathbb{R}^n$  (vzhledem k  $n$ -rozměrné geometrické míře  $\nu_n$ ). Nulovou množinou na  $C$  je každá konečná množina.

Označme  $\mathcal{E}(C)$  množinu všech stupňovitých funkcí na  $C$  a necht'  $\overline{\mathcal{E}}(C)$  je množina všech reálných funkcí definovaných skoro všude na  $C$ , pro něž platí:

Ke každé funkci  $f \in \overline{\mathcal{E}}(C)$  existuje neklesající posloupnost stupňovitých funkcí  $(f_k)_{k=1}^\infty$  tak, že  $f_k \rightarrow f$  skoro všude na  $C$ . Pro takovou funkci definujeme

$$\int_C f \, ds = \lim_{k \rightarrow \infty} \int_C f_k \, ds.$$

V množině  $\overline{\mathcal{E}}(C)$  se nedá obecně odčítat ani násobit zápornou konstantou. Provedeme proto ještě jedno rozšíření, a to tvořením rozdílů funkcí z  $\overline{\mathcal{E}}(C)$ .

Označme  $\overline{\mathcal{L}}(C)$  množinu všech reálných funkcí definovaných skoro všude na  $C$ , pro něž platí:

Ke každé funkci  $f \in \overline{\mathcal{L}}(C)$  existují funkce  $g, h \in \overline{\mathcal{E}}(C)$  takové, že  $f = g - h$  skoro všude na  $C$ , přičemž aspoň jeden z integrálů  $\int_C g \, ds$ ,  $\int_C h \, ds$  je konečný. Pro takovou funkci  $f$  definujeme

$$\int_C f \, ds = \int_C g \, ds - \int_C h \, ds$$

Jestliže  $\int_C f \, ds$  je konečný, říkáme, že  $f$  má na  $C$  konvergentní integrál nebo že  $f$  je *integrovatelná* na  $C$  a píšeme  $f \in \mathcal{L}(C)$  ( $\mathcal{L}(C)$  je tedy množina všech integrovatelných funkcí na  $C$ .)

Platí

$$\mathcal{E}(C) \subset \overline{\mathcal{E}}(C) \subset \overline{\mathcal{L}}(C), \quad \mathcal{E}(C) \subset \mathcal{L}(C) \subset \overline{\mathcal{L}}(C).$$

Abyste uvedená definice byla korektní, je zřejmé, že  $\int_C f \, ds$  nesmí záviset na vyjádření  $f$  pomocí funkcí z množiny  $\overline{\mathcal{E}}(C)$ .

Integrál takto vybudovaný se nazývá *neorientovaný křivkový integrál* na  $C$ . Integrál funkce  $f : C \rightarrow \mathbb{R}$  přes podmnožinu  $M \subset C$  definujeme vztahem

$$\int_M f \, ds = \int_C f \chi_M \, ds,$$

existuje-li integrál vpravo ( $\chi_M$  je charakteristická funkce množiny  $M$ ).

Vlastnosti neorientovaného křivkového integrálu jsou stejné jako vlastnosti  $n$ -rozměrného integrálu v  $\mathbb{R}^n$ . Zejména pak platí věta:

**Věta 4.18.** *Je-li  $(A_1, \dots, A_k)$  rozklad  $C$ , pak*

$$\int_C f \, ds = \sum_{i=1}^k \int_{A_i} f \, ds, \quad (4.8)$$

*mají-li obě strany smysl.*

Postačující podmínku konvergence křivkového integrálu dává věta:

**Věta 4.19.** *Nechť  $N \subset C$  je nulová množina a nechť  $f$  je spojitá na  $C \setminus N$  a ohraničená. Pak  $\int_C f \, ds$  konverguje.*

Vzorec (4.8) ukazuje, že budeme-li umět počítat integrál po oblouku, budeme umět počítat integrál i po libovolné křivce.

Nechť  $A \subset \mathbb{R}^n$  je oblouk,  $\varphi : \langle \alpha, \beta \rangle \rightarrow \mathbb{R}^n$  jeho parametrizace. Nechť nejdříve  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$  je stupňovitá funkce taková, že  $f$  nabývá hodnotu  $a_i$  na vnitřku oblouku  $A_i$  ( $i = 1, \dots, k$ ), kde  $(A_1, \dots, A_k)$  je rozklad oblouku  $A$ . Oblouky  $A_i$  můžeme uspořádat tak, aby parametrizace oblouku  $A_i$  byla

$$\varphi_i : \langle t_{i-1}, t_i \rangle \rightarrow \mathbb{R}^n \quad (i = 1, \dots, k),$$

kde  $t_0 = \alpha$ ,  $t_k = \beta$ ,  $\varphi_i = \varphi|_{\langle t_{i-1}, t_i \rangle}$ . Potom

$$s(A_i) = \int_{t_{i-1}}^{t_i} |\varphi'_i(t)| \, dt = \int_{t_{i-1}}^{t_i} |\varphi'(t)| \, dt.$$

Použijeme-li (4.7), dostaneme

$$\int_A f \, ds = \sum_{i=1}^k a_i \int_{t_{i-1}}^{t_i} |\varphi'(t)| \, dt = \sum_{i=1}^k \int_{t_{i-1}}^{t_i} a_i |\varphi'(t)| \, dt. \quad (4.9)$$

Pro  $t \in \langle t_{i-1}, t_i \rangle$  je  $\varphi(t)$  vnitřním bodem oblouku  $A_i$ , takže  $f(\varphi(t)) = a_i$ . Můžeme proto (4.9) psát ve tvaru

$$\int_A f \, ds = \sum_{i=1}^k \int_{t_{i-1}}^{t_i} f(\varphi(t)) |\varphi'(t)| \, dt = \int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(t)) |\varphi'(t)| \, dt.$$

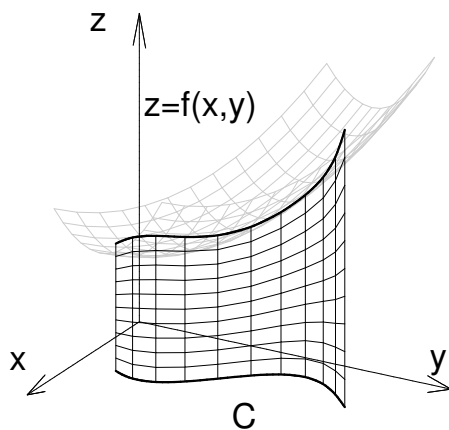
Platí tedy pro stupňovitou funkci  $f$  na oblouku  $A$  vzorec

$$\int_A f \, ds = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t)) |\varphi'(t)| \, dt. \quad (4.10)$$

Limitním procesem a použitím linearit integrálu zjistíme, že (4.10) platí pro každou integrovatelnou funkci na  $A$  a naopak, konverguje-li integrál vpravo v (4.10), je  $f$  integrovatelná na  $A$  a platí (4.10). Přitom integrál vpravo konverguje, právě když funkce  $f \circ \varphi : t \mapsto f(\varphi(t))$  je integrovatelná na  $\langle \alpha, \beta \rangle$  (omezujeme se zde pouze na konvergentní integrál, neboť pro aplikace to zcela postačí). Platí tedy:

**Věta 4.20.** *Nechť  $A$  je oblouk v  $\mathbb{R}^n$ ,  $\varphi : \langle \alpha, \beta \rangle \rightarrow \mathbb{R}^n$  jeho parametrizace. Pak  $f$  je integrovatelná na  $A$ , právě když funkce  $f \circ \varphi$  je integrovatelná na  $\langle \alpha, \beta \rangle$  a platí vzorec (4.10).*

Je-li  $f$  nezáporná funkce na křivce  $C \subset \mathbb{R}^2$ , udává  $\int_C f(x, y) \, ds$  obsah části válcové plochy s řídicí křivkou  $C$  shora ohraničené funkcí  $f$  (viz obr. (4.4)).

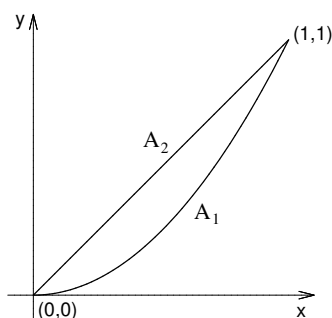


Obr. 4.4: Geometrický význam neorientovaného křivkového integrálu

**Příklad 4.21.** Vypočítejte  $\int_C x \, ds$ , kde křivka  $C$  se skládá z oblouku  $A_1$  paraboly  $y = x^2$ ,  $x \in \langle 0, 1 \rangle$  a z úsečky  $A_2 : y = x$ ,  $x \in \langle 0, 1 \rangle$ ,  $C = A_1 \cup A_2$  (viz obrázek).

**Řešení.** Parametrizace oblouku  $A_1$  je  $\varphi_1(t) = (t, t^2)$ ,  $t \in \langle 0, 1 \rangle$ .

Parametrizace oblouku  $A_2$  je  $\varphi_2(t) = (t, t)$ ,  $t \in \langle 0, 1 \rangle$ .



$$\text{Přítom } \varphi_1'(t) = (1, 2t), \quad |\varphi_1'(t)| = \sqrt{1 + 4t^2},$$

$$\varphi_2'(t) = (1, 1), \quad |\varphi_2'(t)| = \sqrt{2},$$

$$f(\varphi_1(t)) = t, \quad f(\varphi_2(t)) = t.$$

$$\text{Tedy } \int_C x \, ds = \int_{A_1} x \, ds + \int_{A_2} x \, ds = \int_0^1 t \cdot \sqrt{1 + 4t^2} \, dt + \int_0^1 t \cdot \sqrt{2} \, dt = \frac{5\sqrt{5} - 1}{12} + \frac{\sqrt{2}}{2}. \quad \square$$

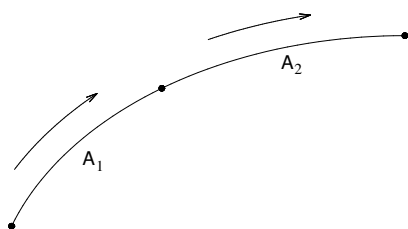
### 4.3 Orientovaný křivkový integrál

**Definice 4.22.** Uvažujme orientovaný oblouk  $\mathbf{A}$ ; budeme jej dále pojímat jako dvojici  $(A, \vec{\tau})$ , kde  $\vec{\tau}$  je orientující tečné pole na  $A$ . Orientovaný oblouk  $\mathbf{A}_1 = (A_1, \vec{\tau}_1)$  nazveme *orientovaným podobloukem* orientovaného oblouku  $\mathbf{A} = (A, \vec{\tau})$ , jestliže  $A_1 \subset A$  a  $\vec{\tau}_1 = \vec{\tau}|_{A_1}$ . Řekneme, že orientovaný oblouk  $\mathbf{A}$  je *součtem orientovaných oblouků*  $\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2$ , a píšeme  $\mathbf{A} = \mathbf{A}_1 + \mathbf{A}_2$ , jestliže  $\{A_1, A_2\}$  je rozklad oblouku  $A$ . Je-li  $\mathbf{A} = (A, \vec{\tau})$ ,  $\mathbf{A}_1 = (A_1, \vec{\tau}_1)$ ,  $\mathbf{A}_2 = (A_2, \vec{\tau}_2)$ , pak  $A = A_1 \cup A_2$ ,  $\vec{\tau}_1 = \vec{\tau}|_{A_1}$ ,  $\vec{\tau}_2 = \vec{\tau}|_{A_2}$ .

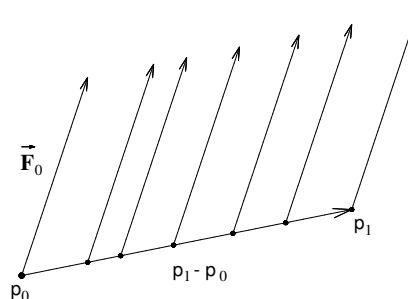
Analogicky definujeme, že orientovaný oblouk  $\mathbf{A}$  je součet orientovaných oblouků  $\mathbf{A}_1, \dots, \mathbf{A}_k$ . Píšeme  $\mathbf{A} = \mathbf{A}_1 + \dots + \mathbf{A}_k$ .

Zřejmě platí: Je-li  $\mathbf{A} = \mathbf{A}_1 + \mathbf{A}_2$ , pak  $-\mathbf{A} = (-\mathbf{A}_1) + (-\mathbf{A}_2)$ .

Orientovaný oblouk  $\mathbf{A}$  znázorňujeme tak, že u oblouku  $A$  šipkou vyznačíme orientaci. Součet  $\mathbf{A}_1 + \mathbf{A}_2$  je znázorněn na obr. (4.5).



Obr. 4.5: Součet oblouků  $A_1$  a  $A_2$



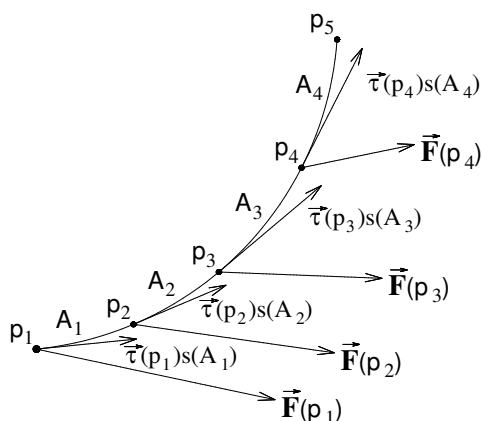
Obr. 4.6: Konst. vektorové pole

Nechť  $\mathbf{L}$  je orientovaná úsečka s počátečním bodem  $p_0$  a koncovým bodem  $p_1$  a nechť na  $\mathbf{L}$  je definováno konstantní vektorové pole  $\vec{\mathbf{F}} = \vec{\mathbf{F}}_0$  (viz obr. (4.6)). Z fyziky je známo,

že práce pole po orientované úsečce  $\mathbf{L}$  je

$$\mathcal{A} = \vec{\mathbf{F}}_0 \cdot (p_1 - p_0)$$

(kde vpravo je skalární součin). Nechť nyní  $\mathbf{A} = (A, \vec{\tau})$  je orientovaný oblouk. Rozdělme jej na orientované podoblouky  $\mathbf{A}_1, \dots, \mathbf{A}_k$  tak, že  $\mathbf{A} = \mathbf{A}_1 + \dots + \mathbf{A}_k$ ; počáteční bod oblouku  $\mathbf{A}_i$  nechť je  $p_i$  ( $i = 1, \dots, k$ ).



Nechť  $\vec{\mathbf{F}}$  je spojité vektorové pole na  $A$ . Bude-li dělení na podoblouky dostatečně jemné, můžeme oblouk  $\mathbf{A}_i$  nahradit přibližně orientovanou úsečkou vycházející z bodu  $p_i$  a určenou vektorem  $\tau(p_i)s(\mathbf{A}_i)$ , kde  $\tau(p_i)$  je tečný vektor oblouku  $\mathbf{A}_i$  v bodě  $p_i$ . Vzhledem k tomu, že pole  $\vec{\mathbf{F}}$  je spojité, můžeme jej na malém oblouku  $\mathbf{A}_i$  aproximovat konstantním polem  $\vec{\mathbf{F}}_i = \vec{\mathbf{F}}(p_i)$  (viz obrázek). Práce pole  $\vec{\mathbf{F}}$  na  $\mathbf{A}$  je tedy přibližně rovna

$$\mathcal{A} \approx \sum_{i=1}^k \vec{\mathbf{F}}(p_i) \cdot \vec{\tau}(p_i)s(\mathbf{A}_i). \quad (4.11)$$

Součet vpravo bude tím přesněji určovat práci pole  $\vec{\mathbf{F}}$  po oblouku  $A$ , čím jemnější bude dělení oblouku  $A$ . Součet (4.11) je integrální součet pro křivkový integrál

$$\int_A (\vec{\mathbf{F}} \cdot \vec{\tau}) \, ds,$$

kde integrujeme skalární funkci  $f = \vec{\mathbf{F}} \cdot \vec{\tau}$ . Lze ukázat, že pro spojité pole  $\vec{\mathbf{F}}$  integrální součty v (4.11) konvergují k tomuto integrálu, jestliže rozdělení na podoblouky mají normy konvergující k nule (*normou rozdělení na podoblouky*  $\mathbf{A}_1, \dots, \mathbf{A}_k$  s danými počátečními body  $p_1, \dots, p_k$  nazýváme největší z délek  $|p_2 - p_1|, |p_3 - p_2|, \dots$ ). To nás vede k této definici:

**Definice 4.23.** Orientovaným křivkovým integrálem pole  $\vec{\mathbf{F}}$  po orientovaném oblouku  $\mathbf{A}$  nazýváme integrál

$$\int_{\mathbf{A}} \vec{\mathbf{F}} \cdot \vec{ds} = \int_A (\vec{\mathbf{F}} \cdot \vec{\tau}) \, ds, \quad (4.12)$$

existuje-li neorientovaný integrál vpravo. Přitom  $\vec{\tau}$  je orientující tečné pole oblouku  $\mathbf{A}$  a  $\vec{\mathbf{F}}$  je pole definované na  $A$ .

Z předchozích úvah je patrné, že integrál (4.12) určuje práci pole  $\vec{\mathbf{F}}$  po orientovaném oblouku  $\mathbf{A}$ . Integrál existuje např. tehdy, je-li  $\vec{\mathbf{F}}$  spojité pole na  $A$ , což budeme dále předpokládat.

Protože orientovaný integrál jsme vztahem (4.12) definovali pomocí neorientovaného integrálu, plynou vlastnosti orientovaného integrálu z vlastností neorientovaného integrálu.

Tak např. platí:

Je-li  $\mathbf{A} = \mathbf{A}_1 + \dots + \mathbf{A}_k$ , je

$$\int_{\mathbf{A}} \vec{\mathbf{F}} \cdot \vec{ds} = \int_{\mathbf{A}_1} \vec{\mathbf{F}} \cdot \vec{ds} + \dots + \int_{\mathbf{A}_k} \vec{\mathbf{F}} \cdot \vec{ds}. \quad (4.13)$$

Tento vzorec vyjadřuje *aditivitu práce*.

Dále platí

$$\int_{-\mathbf{A}} \vec{\mathbf{F}} \cdot \vec{ds} = - \int_{\mathbf{A}} \vec{\mathbf{F}} \cdot \vec{ds}, \quad (4.14)$$

neboť pro  $\mathbf{A} = (A, \vec{\tau})$  je  $-\mathbf{A} = (A, -\vec{\tau})$ .

Výpočet orientovaného integrálu lze provést převedením na neorientovaný integrál.

Je-li  $\varphi : \langle \alpha, \beta \rangle \rightarrow \mathbb{R}^n$  parametrizace orientovaného oblouku  $\mathbf{A}$  (tj. parametrizace oblouku  $A$  souhlasí s danou orientací), pak pro  $p = \varphi(t)$  je  $\vec{\tau}(p) = \varphi'(t)/|\varphi'(t)|$ , takže

$$\left( \vec{\mathbf{F}} \cdot \vec{\tau} \right) (p) = \vec{\mathbf{F}}(\varphi(t)) \cdot \frac{\varphi'(t)}{|\varphi'(t)|}.$$

Odtud

$$\int_A \left( \vec{\mathbf{F}} \cdot \vec{\tau} \right) ds = \int_{\alpha}^{\beta} \vec{\mathbf{F}}(\varphi(t)) \cdot \frac{\varphi'(t)}{|\varphi'(t)|} |\varphi'(t)| dt = \int_{\alpha}^{\beta} \vec{\mathbf{F}}(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t) dt.$$

Máme tedy vzorec

$$\int_{\mathbf{A}} \vec{\mathbf{F}} \cdot \vec{ds} = \int_{\alpha}^{\beta} \vec{\mathbf{F}}(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t) dt. \quad (4.15)$$

Je-li  $\vec{\mathbf{F}} = (F_1, \dots, F_n)$ ,  $\varphi = (\varphi_1, \dots, \varphi_n)$ , můžeme (4.15) rozepsat ve „složkovém tvaru“:

$$\int_{\mathbf{A}} \vec{\mathbf{F}} \cdot \vec{ds} = \int_{\alpha}^{\beta} (F_1(\varphi(t))\varphi_1'(t) + \dots + F_n(\varphi(t))\varphi_n'(t)) dt, \quad (4.16)$$

kde  $F_i(\varphi(t)) = F_i(\varphi_1(t), \dots, \varphi_n(t))$ , ( $i = 1, \dots, n$ ).

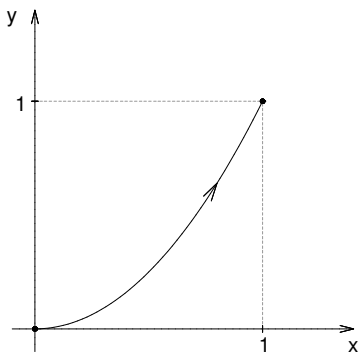
Tradiční označení integrálu  $\int_{\mathbf{A}} \vec{\mathbf{F}} \cdot \vec{ds}$  je

$$\int_{\mathbf{A}} \vec{\mathbf{F}} \cdot \vec{ds} = \int_{\mathbf{A}} F_1 dx_1 + \dots + F_n dx_n \quad (4.17)$$

(v  $\mathbb{R}^2$  zpravidla  $\int_{\mathbf{A}} F_1 dx + F_2 dy$ , v  $\mathbb{R}^3$   $\int_{\mathbf{A}} F_1 dx + F_2 dy + F_3 dz$ ). Označení na pravé straně (4.17) naznačuje, jak máme integrál převést na jednorozměrný: Za  $dx_1, \dots, dx_n$  dosadíme diferenciály funkcí  $x_i = \varphi_i(t)$  ( $i = 1, \dots, n$ ), za proměnné vystupující ve funkcích  $F_i(x_1, \dots, x_n)$  dosadíme  $x_i = \varphi_i(t)$  ( $i = 1, \dots, n$ ) a integrujeme pak v mezích od  $\alpha$  do  $\beta$ , jak je uvedeno ve vzorci (4.16).

**Příklad 4.24.** Vypočítejte práci rovinného pole  $\vec{\mathbf{F}} = (y, -x)$  po oblouku  $\mathbf{A}$  paraboly  $y = x^2$  z bodu  $(0, 0)$  do bodu  $(1, 1)$  (viz obrázek).

**Řešení.** Parametrizace oblouku  $\mathbf{A}$  je  $\varphi(t) = (t, t^2)$ ,  $t \in \langle 0, 1 \rangle$ , a je souhlasná se zadanou orientací.



Přitom

$$\varphi'(t) = (1, 2t), \quad \vec{\mathbf{F}}(\varphi(t)) = (t^2, -t).$$

Tedy

$$\begin{aligned} \mathcal{A} &= \int_A \vec{\mathbf{F}} \cdot \vec{ds} = \int_0^1 (t^2, -t) \cdot (1, 2t) dt = \\ &= \int_0^1 (t^2 - 2t^2) dt = - \int_0^1 t^2 dt = -\frac{1}{3}. \end{aligned}$$

□

S orientovanými křivkovými integrály po orientovaných obloucích bychom v aplikacích nevystačili. Pohyb v daném vektorovém poli nemusí být vždy jednoduchý pohyb po oblouku (tj. pohyb od počátečního ke koncovému bodu), může jít např. i o takový pohyb, kdy bod se po proběhnutí určité dráhy opět vrací po témže oblouku apod. Abychom matematicky popsali takové situace, zavedeme pojem cesty.

**Definice 4.25.** Konečný soubor orientovaných oblouků

$$\mathbf{A}_1, \dots, \mathbf{A}_k \tag{4.18}$$

takový, že koncový bod oblouku  $\mathbf{A}_i$  se rovná počátečnímu bodu oblouku  $\mathbf{A}_{i+1}$  ( $i = 1, \dots, k-1$ ), nazveme *cestou*. Budeme tuto cestu zapisovat ve tvaru

$$\mathbf{L} = \mathbf{A}_1 + \dots + \mathbf{A}_k. \tag{4.19}$$

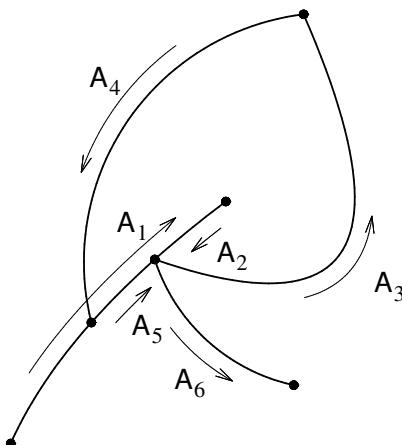
Počáteční bod  $\mathbf{A}_1$ , resp. koncový bod  $\mathbf{A}_k$  nazýváme *počátečním*, resp. *koncovým bodem cesty*  $\mathbf{L}$ . Jestliže je počáteční bod  $\mathbf{A}_1$  roven koncovému bodu  $\mathbf{A}_k$ , nazýváme cestu  $\mathbf{L}$  *uzavřenou*. Množinu

$$\bigcup_{i=1}^k A_i$$

nazýváme *trajektorií* (též *nosičem*) cesty  $\mathbf{L}$  (zpravidla bývá tato trajektorie křivka).

Je-li  $(A_1, \dots, A_k)$  rozklad křivky, nazýváme  $\mathbf{L}$  též *orientovanou křivkou*; tento termín budeme užívat zejména tehdy, je-li  $(A_1, \dots, A_k)$  rozklad jednoduché křivky. Pak  $\mathbf{L}$  nazýváme *jednoduchou cestou* nebo *jednoduchou orientovanou křivkou*.

Může se ovšem stát, že některé úseky cesty (tj. oblouky  $A_i$ ) mají společnou část, přičemž jejich orientace může být na společném úseku shodná nebo opačná (viz obrázek (4.7)). Potom vytvoření cesty sečtením orientovaných oblouků, jak ukazuje vztah (4.19), neznamená pouhé sjednocení množin  $A_i$ , ale zároveň obsahuje předpis, že trajektorie se má probíhat v pořadí, jak tento součet naznačuje. Pojem cesty není geometrický pojem, má vyjádřit dynamický proces pohybu bodu.

Obr. 4.7: Cesta  $\mathbf{L} = \mathbf{A}_1 + \cdots + \mathbf{A}_6$ 

**Definice 4.26.** Cestou *opačnou* k cestě (4.19) nazýváme cestu

$$-\mathbf{L} = (-\mathbf{A}_k) + (-\mathbf{A}_{k-1}) + \cdots + (-\mathbf{A}_1).$$

Je-li  $\mathbf{L}' = \mathbf{A}'_1 + \cdots + \mathbf{A}'_j$  taková cesta, že počáteční bod  $\mathbf{A}'_1$  je roven koncovému bodu  $\mathbf{A}_k$ , nazýváme cestu

$$\mathbf{A}_1 + \cdots + \mathbf{A}_k + \mathbf{A}'_1 + \cdots + \mathbf{A}'_j$$

*součtem cest*  $\mathbf{L}, \mathbf{L}'$  a značíme je  $\mathbf{L} + \mathbf{L}'$ . *Rozdíl*  $\mathbf{L} - \mathbf{L}'$  definujeme jako součet  $\mathbf{L} + (-\mathbf{L}')$ , pokud tento součet je cestou.

Je-li  $\mathbf{L}$  uzavřená cesta (např. kružnice orientovaná ve směru hodinových ručiček), pak má smysl tvořit např.  $\mathbf{L} + \mathbf{L} = 2\mathbf{L}$ ,  $\mathbf{L} + \mathbf{L} + \mathbf{L} = 3\mathbf{L}$  atd. (což je např. dvakrát, třikrát, ... proběhnutá kružnice).

**Definice 4.27.** Nechť  $\mathbf{L} = \mathbf{A}_1 + \cdots + \mathbf{A}_k$  je cesta,  $\vec{\mathbf{F}}$  vektorové pole definované na trajektorii

$$\bigcup_{i=1}^k A_i.$$

*Orientovaný integrál pole*  $\vec{\mathbf{F}}$  *po cestě*  $\mathbf{L}$  definujeme vzorcem

$$\int_{\mathbf{L}} \vec{\mathbf{F}} \cdot d\vec{s} = \sum_{i=1}^k \int_{A_i} \vec{\mathbf{F}} \cdot d\vec{s}, \quad (4.20)$$

existují-li integrály na pravé straně. Integrál (4.20) nazýváme *prací pole*  $\vec{\mathbf{F}}$  *po cestě*  $\mathbf{L}$ . Integrál po uzavřené cestě  $\mathbf{L}$  nazýváme *církulací pole*  $\vec{\mathbf{F}}$  *na*  $\mathbf{L}$ .



Integrál po uzavřené cestě  $\mathbf{L}$  se značí v literatuře též  $\oint_{\mathbf{L}} \vec{\mathbf{F}} \cdot \vec{ds}$ .

Zřejmě platí

$$\begin{aligned}\int_{\mathbf{L}+\mathbf{L}'} \vec{\mathbf{F}} \cdot \vec{ds} &= \int_{\mathbf{L}} \vec{\mathbf{F}} \cdot \vec{ds} + \int_{\mathbf{L}'} \vec{\mathbf{F}} \cdot \vec{ds}, \\ \int_{-\mathbf{L}} \vec{\mathbf{F}} \cdot \vec{ds} &= - \int_{\mathbf{L}} \vec{\mathbf{F}} \cdot \vec{ds}.\end{aligned}$$

**Příklad 4.28.** Je-li  $\mathbf{L}$  dvakrát proběhnutá kružnice

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x^2 + y^2 = R^2\}$$

s počátečním bodem  $(R, 0)$ , je parametrizace této cesty

$$\begin{aligned}\varphi(t) &= (R \cos t, R \sin t), \quad t \in (0, 4\pi), \\ \int_{\mathbf{L}} \vec{\mathbf{F}} \cdot \vec{ds} &= \int_0^{4\pi} \vec{\mathbf{F}}(R \cos t, R \sin t) \cdot (-R \sin t, R \cos t) dt.\end{aligned}$$

Máme-li vyjádřit tuto cestu jako součet orientovaných oblouků, lze to udělat mnoha způsoby, výsledný integrál bude vždy tentýž. Lze dokonce vyjít i z jiného bodu než z bodu  $(R, 0)$  a opět dostaneme tentýž výsledek. Abychom mohli tuto situaci vyjádřit obecně, zavedeme pojem ekvivalence cest.

**Definice 4.29.** Řekneme, že cesty  $\mathbf{L}_1, \mathbf{L}_2$  jsou *ekvivalentní*, a píšeme  $\mathbf{L}_1 \equiv \mathbf{L}_2$ , jestliže od cesty  $\mathbf{L}_1 = \mathbf{A}_1 + \dots + \mathbf{A}_k$  k cestě  $\mathbf{L}_2 = \mathbf{A}'_1 + \dots + \mathbf{A}'_m$  lze dospět konečným počtem těchto transformací:

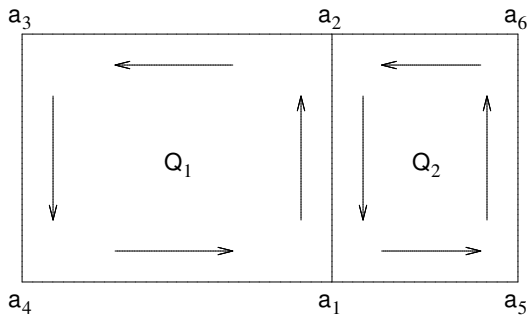
- záměna pořadí sčítanců (oblouků  $\mathbf{A}_i$ )
- vyjádření oblouku  $\mathbf{A}_i$  součtem podoblouků
- vyskytují-li se v součtu oblouky  $\mathbf{A}_i, \mathbf{A}_j$  tak, že  $\mathbf{A}_i + \mathbf{A}_j$  je orientovaný oblouk  $\mathbf{A}$ , nahrazení sčítanců  $\mathbf{A}_i, \mathbf{A}_j$  tímto obloukem
- odstranění sčítanců  $\mathbf{A}, -\mathbf{A}$ , vyskytují-li se v součtu, nebo naopak
- přidání těchto sčítanců k danému součtu

Je zřejmé, že po každé z uvedených transformací se součet orientovaných integrálů nezmění.

Platí tedy:

**Věta 4.30.** Jestliže  $\mathbf{L}_1 \equiv \mathbf{L}_2$ , pak  $\int_{\mathbf{L}_1} \vec{\mathbf{F}} \cdot \vec{ds} = \int_{\mathbf{L}_2} \vec{\mathbf{F}} \cdot \vec{ds}$ .

**Příklad 4.31.** Uvažujme dvě cesty (viz obrázek):



$$\begin{aligned} \mathbf{L}_1 &= \overrightarrow{a_1 a_2} + \overrightarrow{a_2 a_3} + \overrightarrow{a_3 a_4} + \overrightarrow{a_4 a_1} \\ \mathbf{L}_2 &= \overrightarrow{a_1 a_5} + \overrightarrow{a_5 a_6} + \overrightarrow{a_6 a_2} + \overrightarrow{a_2 a_1}, \end{aligned}$$

které jsou orientovanými obvody obdélníků  $Q_1, Q_2$ .

Tyto cesty lze sečíst; dostaneme tak cestu

$$\mathbf{L}_3 = \overrightarrow{a_1 a_2} + \overrightarrow{a_2 a_3} + \overrightarrow{a_3 a_4} + \overrightarrow{a_4 a_1} + \overrightarrow{a_1 a_5} + \overrightarrow{a_5 a_6} + \overrightarrow{a_6 a_2} + \overrightarrow{a_2 a_1}.$$

Tato cesta je ekvivalentní s cestou

$$\mathbf{L}_4 = \overrightarrow{a_2 a_3} + \overrightarrow{a_3 a_4} + \overrightarrow{a_4 a_1} + \overrightarrow{a_1 a_5} + \overrightarrow{a_5 a_6} + \overrightarrow{a_6 a_2}$$

(cesty  $\overrightarrow{a_1 a_2}, \overrightarrow{a_2 a_1}$  se zruší) a tato cesta je opět ekvivalentní s cestou

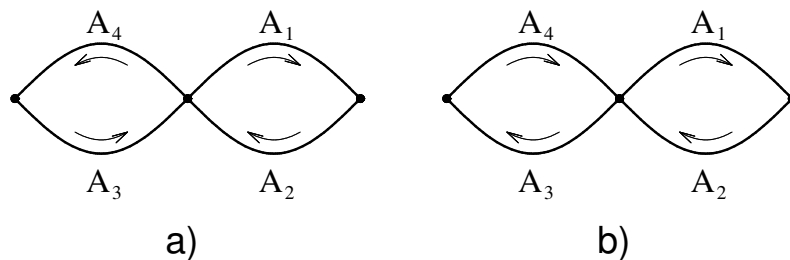
$$\mathbf{L} = \overrightarrow{a_4 a_5} + \overrightarrow{a_5 a_6} + \overrightarrow{a_6 a_3} + \overrightarrow{a_3 a_4}$$

která je orientovaným obvodem obdélníka  $Q_1 \cup Q_2$ . Platí tedy  $\mathbf{L}_1 + \mathbf{L}_2 \equiv \mathbf{L}$ .

Je pak

$$\int_{\mathbf{L}_1} \vec{\mathbf{F}} \cdot d\vec{\mathbf{s}} + \int_{\mathbf{L}_2} \vec{\mathbf{F}} \cdot d\vec{\mathbf{s}} = \int_{\mathbf{L}} \vec{\mathbf{F}} \cdot d\vec{\mathbf{s}}.$$

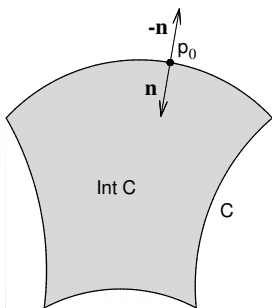
Nechť nyní  $C$  je křivka (neorientovaná) s rozkladem  $A_1, \dots, A_k$ ,  $C = \bigcup_{i=1}^k A_i$ . Každý z oblouků  $A_i$  lze orientovat dvojím způsobem; tak dostaneme řadu cest tvaru  $A_1 + \dots + A_k$  ( $k$  pořadí členů nyní vzhledem k ekvivalenci nepřihlížíme). Z těchto cest budou pouze některé orientovanými křivkami, ne každé dvě pak budou spolu ekvivalentní. Jistě nebudou ekvivalentní opačně orientované křivky, avšak mohou se vyskytovat i dvojice neekvivalentních orientovaných křivek, které nebudou vzájemně opačné.



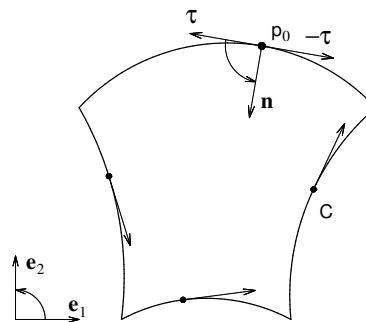
Na obrázku je vidět, jak z oblouků  $A_1, A_2, A_3, A_4$ , které tvoří rozklad křivky, lze utvořit neekvivalentní orientované křivky, které nejsou k sobě opačné. Tato situace však nemůže nastat u *prostých křivek*. Je-li  $C$  prostá křivka s rozkladem  $(A_1, \dots, A_k)$ , pak existují (až na ekvivalenci) právě dvě orientované křivky tvaru  $A_1 + \dots + A_k$ , které jsou k sobě opačné.

K orientaci jednoduché uzavřené křivky  $C \subset \mathbb{R}^2$  stačí stanovit jednotkové tečné pole a k tomu stačí určit tečný vektor  $\boldsymbol{\tau}(p_0)$  v jednom regulárním bodě  $p_0 \in C$ . Tento bod je vnitřním bodem některého oblouku  $A \subset C$ . Tím získáme orientovaný oblouk  $\mathbf{A}$ ; tato orientace se přenese na navazující oblouk, až je orientovaná celá křivka.

**Definice 4.32.** Je-li  $p_0$  regulární bod křivky  $C$ , pak v něm existují právě dva jednotkové normálové vektory, z nichž právě jeden - označme jej  $\mathbf{n}$  - „vniká“ do  $\text{Int}C$  (vnitřek křivky  $C$ ). Vektor  $\mathbf{n}$  nazveme *vnitřním normálovým vektorem*, opačný vektor  $-\mathbf{n}$  nazveme *vnějším normálovým vektorem* (viz obr. (4.8))



Obr. 4.8



Obr. 4.9

Nyní zvolíme ze dvou jednotkových tečných vektorů křivky  $C$  v bodě  $p_0$  vektor  $\vec{\boldsymbol{\tau}} = \vec{\boldsymbol{\tau}}(p_0)$  takový, že uspořádaná dvojice  $(\vec{\boldsymbol{\tau}}, \mathbf{n})$  určuje tutéž orientaci roviny jako dvojice  $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)$  standardní báze, tj. je-li  $\vec{\boldsymbol{\tau}} = (\tau_1, \tau_2)$ ,  $\mathbf{n} = (n_1, n_2)$ , pak

$$\begin{vmatrix} \vec{\boldsymbol{\tau}}_1 & \vec{\boldsymbol{\tau}}_2 \\ n_1 & n_2 \end{vmatrix} = 1$$

(viz obr. (4.9)). Vektorem  $\vec{\boldsymbol{\tau}} = \vec{\boldsymbol{\tau}}(p_0)$  je určena orientace celé křivky  $C$ . Takto orientovanou křivku  $\mathbf{C}$  nazýváme *kladně orientovanou*, o opačně orientované křivce  $-\mathbf{C}$  říkáme, že je *záporně orientována*.

(Názorně řečeno, kladně orientovanou uzavřenou křivkou budeme rozumět orientaci uzavřené křivky „proti směru hodinových ručiček“, záporně orientovanou „ve směru hodinových ručiček“.)

## 4.4 Nezávislost orientovaného křivkového integrálu na cestě

Je známo, že v gravitačním poli práce, která se vykoná při pohybu hmotného bodu v tomto poli, nezávisí na dráze, ale pouze na počátečním a koncovém bodu. Budeme nyní formulovat problém nezávislosti práce (tj. křivkového integrálu) pole obecně.

**Definice 4.33.** Nechť  $\vec{F}$  je vektorové pole definované v oblasti  $D \subset \mathbb{R}^n$ . Řekneme, že *křivkový integrál pole  $\vec{F}$  nezávisí v  $D$  na cestě*, jestliže pro libovolné cesty  $C_1, C_2$  ležící v  $D$ , které mají též počáteční a též koncový bod, platí

$$\int_{C_1} \vec{F} \cdot d\vec{s} = \int_{C_2} \vec{F} \cdot d\vec{s}.$$

Pole  $\vec{F}$  v takovém případě nazýváme *konzervativním* v  $D$ .

Tento název souvisí s tím, že v takovém poli platí zákon zachování energie.

Pojem nezávislosti integrálu pole na cestě lze též formulovat pomocí pojmu cirkulace pole.

Jsou-li  $C_1, C_2$  dvě cesty s týmž počátečním a s týmž koncovým bodem, pak  $C = C_1 + (-C_2) = C_1 - C_2$  je uzavřená cesta. Naopak každou uzavřenou cestu  $C$  můžeme vyjádřit jako rozdíl dvou cest s týmž počátečním a s týmž koncovým bodem. Odtud již snadno plyne:

**Věta 4.34.** *Křivkový integrál pole  $\vec{F}$  nezávisí na cestě, právě když cirkulace pole  $\vec{F}$  po libovolné uzavřené cestě  $C$  ležící v  $D$  je nulová.*

**Označení.** Jestliže křivkový integrál pole  $\vec{F}$  nezávisí v oblasti  $D$  na cestě, pak znakem  $\int_a^b \vec{F} \cdot d\vec{s}$  označujeme křivkový integrál pole  $\vec{F}$  po libovolné cestě  $C$  ležící v  $D$  takové, že  $a$  je počáteční,  $b$  koncový bod cesty  $C$ .

**Definice 4.35.** Nechť  $\vec{F}$  je spojitě vektorové pole v oblasti  $D \subset \mathbb{R}^n$ . Říkáme, že  $\vec{F}$  je *potenciální* v  $D$ , existuje-li reálná funkce  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  taková, že  $\vec{F} = \text{grad} f$  v  $D$ . Funkci  $f$  pak nazýváme *potenciálem* pole  $\vec{F}$  v  $D$ .

Je-li  $f$  potenciál pole  $\vec{F}$ , je zřejmě také  $f + k$ , kde  $k$  je libovolná konstanta, potenciál. Jsou-li  $f, g$  potenciály pole  $\vec{F}$  v oblasti  $D$ , pak  $\text{grad}(f - g) = 0$  v  $D$ , takže  $\frac{\partial(f-g)}{\partial x_i} = 0$  v  $D$  ( $i = 1, \dots, n$ ) a odtud  $f - g = k$ , kde  $k$  je konstanta. Liší se tedy každé dva potenciály pole  $\vec{F}$  v dané oblasti o aditivní konstantu.

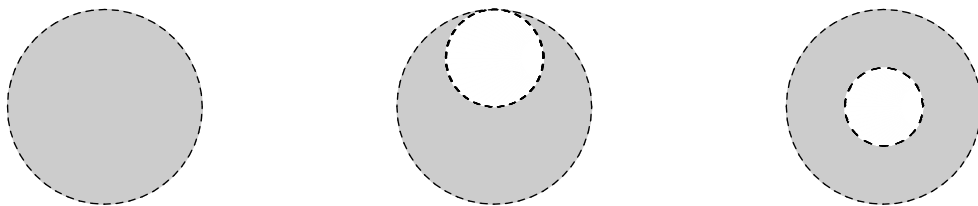
Než zformulujeme nutné a postačující podmínky nezávislosti na integrační cestě, připomeňme si některé důležité pojmy:

**Definice 4.36.** Množinu  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ , ( $n = 2, 3$ ) nazveme *souvislou*, jestliže libovolné dva body v  $\Omega$  lze spojit křivkou  $\gamma$  tak, že  $\gamma \subset \Omega$ .

*Oblastí* rozumíme otevřenou a souvislou množinu.

Oblast  $\Omega$ , v níž libovolnou jednoduchou uzavřenou křivku lze spojitě „stáhnout“ do bodu, přičemž při této deformaci neopustíme  $\Omega$ , nazveme *jednoduše souvislou oblastí*.

Na obrázku jsou znázorněny tři oblasti - první dvě jsou jednoduše souvislé, třetí ne.



Nyní můžeme zformulovat příslušnou větu.

**Věta 4.37.** Necht' pole  $\vec{\mathbf{F}}$  je spojitě na  $\Omega$ , kde  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ , ( $n = 2, 3$ ) je jednoduše souvislá oblast.

- a) Křivkový integrál  $\int_C \vec{\mathbf{F}} \cdot d\vec{\mathbf{s}}$  nezávisí v  $\Omega$  na integrační cestě právě tehdy, když pole  $\vec{\mathbf{F}}$  je potenciální.
- b) Je-li  $f$  potenciál pole  $\vec{\mathbf{F}}$ , pak pro libovolnou cestu  $C$  ležící v  $\Omega$  s počátečním bodem  $p_0$  a koncovým bodem  $p$  platí

$$\int_C \vec{\mathbf{F}} \cdot d\vec{\mathbf{s}} = f(p) - f(p_0). \quad (4.21)$$

Nyní uvedeme kritérium udávající, kdy je vektorové pole  $\vec{\mathbf{F}}$  potenciální.

**Věta 4.38.** Necht' vektorové pole  $\vec{\mathbf{F}}$  je třídy  $C_1$  na  $\Omega$ .

- a) Nutnou podmínkou k tomu, aby vektorové pole  $\vec{\mathbf{F}}$  bylo potenciální, je, aby v každém bodě  $\Omega$  platilo

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \vec{\mathbf{F}} &= \mathbf{0}, & \text{je-li } \Omega \subset \mathbb{R}^2 \\ \operatorname{rot} \vec{\mathbf{F}} &= \mathbf{0}, & \text{je-li } \Omega \subset \mathbb{R}^3 \end{aligned} \quad (4.22)$$

- b) Jestliže  $\Omega$  je jednoduše souvislá oblast, pak podmínka (4.22) je postačující k tomu, aby  $\vec{\mathbf{F}}$  bylo potenciální.

**Příklad 4.39.** Necht'  $\vec{\mathbf{F}} = \left( \frac{-y}{x^2 + y^2}, \frac{x}{x^2 + y^2} \right)$ ,  $(x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ . Ověřme nutnou podmínku věty (4.38)

**Řešení.**

$$\operatorname{rot} \vec{\mathbf{F}} = \frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} = \frac{\partial \left( \frac{x}{x^2 + y^2} \right)}{\partial x} - \frac{\partial \left( \frac{-y}{x^2 + y^2} \right)}{\partial y} = \frac{x^2 + y^2 - 2x^2}{(x^2 + y^2)^2} + \frac{x^2 + y^2 - 2y^2}{(x^2 + y^2)^2} = 0.$$

Tedy podmínka a) je splněna, přičemž jenom její platnost obecně nezaručuje, že  $\vec{\mathbf{F}}$  je potenciální pole, protože podmínka b) věty (4.38) splněna není.  $\square$

Lze dokonce ukázat, že pro kladně orientovanou kružnici  $C \subset \Omega$ ,

$$C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = R^2\}$$

platí:

Je-li  $\varphi(t) = (R \cos t, R \sin t)$ ,  $t \in \langle 0, 2\pi \rangle$ , parametrizace kružnice  $C$ , pak

$$\varphi'(t) = (-R \sin t, R \cos t)$$

a

$$\begin{aligned} \int_C \vec{\mathbf{F}} \cdot d\vec{\mathbf{s}} &= \int_0^{2\pi} \left( \vec{\mathbf{F}} \circ \varphi \right) (t) \cdot \varphi'(t) dt = \int_0^{2\pi} \left( \frac{-R \sin t}{R^2}, \frac{R \cos t}{R^2} \right) \cdot (-R \sin t, R \cos t) dt \\ &= \int_0^{2\pi} (\sin^2 t + \cos^2 t) dt = 2\pi \neq 0. \end{aligned}$$

Tedy  $\oint_C \vec{\mathbf{F}} \cdot d\vec{\mathbf{s}} \neq 0$  a integrál je závislý na integrační cestě, tudíž  $\vec{\mathbf{F}}$  nemůže být potenciální.

Je-li  $\vec{\mathbf{F}}$  potenciální pole na  $\Omega$ , vzniká úloha, jak najít potenciál. Víme, že potenciál je určen jednoznačně, až na aditivní konstantu. Pro jeho výpočet můžeme použít vzorec (4.21), kde bod  $p_0$  zvolíme v  $\Omega$  pevně, bod  $p$  je proměnný bod z  $\Omega$  a za integrační cestu můžeme vzít libovolnou orientovanou křivku v  $\Omega$  spojující bod  $p$  s bodem  $p_0$ . Je-li například  $\Omega$  jednoduše souvislá množina, lze za integrační cestu zvolit úsečku.

**Příklad 4.40.** Ověřte, zda vektorové pole  $\vec{\mathbf{F}} = (2xy, x^2 + 9y^2)$  je potenciální na  $\mathbb{R}^2$  a stanovte potenciál  $f$ .

**Řešení.**

$$\operatorname{rot} \vec{\mathbf{F}} = \frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} = \frac{\partial(x^2 + 9y^2)}{\partial x} - \frac{\partial(2xy)}{\partial y} = 2x - 2x = 0.$$

Jelikož  $\mathbb{R}^2$  je jednoduše souvislá oblast, je  $\vec{\mathbf{F}}$  potenciální.

Určíme nejdříve potenciál  $f$  užitím vzorce (4.21). Za bod  $p_0$  zvolme počátek, tj.  $p_0 = (0, 0)$ ,  $p = (x, y)$ . Parametrizace úsečky  $\overrightarrow{p_0 p}$  je  $\varphi(t) = (tx, ty)$ ,  $t \in \langle 0, 1 \rangle$  a  $\varphi'(t) = (x, y)$ . V našem případě je vzorec (4.21) tvaru

$$\int_{\overrightarrow{p_0 p}} \vec{\mathbf{F}} \cdot d\vec{\mathbf{s}} = f(p) - f(p_0) = f(x, y) - f(0, 0) = f(x, y).$$

Tedy potenciál

$$\begin{aligned} f(x, y) &= \int_0^1 (2t^2 xy, t^2 x^2 + 9t^2 y^2) \cdot (x, y) dt = \int_0^1 (2t^2 x^2 y + t^2 x^2 y + 9t^2 y^3) dt = \\ &= (3x^2 y + 9y^3) \cdot \int_0^1 t^2 dt = \frac{1}{3} (3x^2 y + 9y^3) = x^2 y + 3y^3. \end{aligned}$$

Každý potenciál je tedy tvaru  $x^2 y + 3y^3 + C$ .

Potenciál můžeme též určit řešením rovnice

$$\vec{\mathbf{F}} = \text{grad} f$$

$(F_1, F_2) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}\right)$ , tedy  $F_1 = \frac{\partial f}{\partial x}$ ,  $F_2 = \frac{\partial f}{\partial y}$ , tj.

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2xy, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = x^2 + 9y^2$$

Z první rovnice plyne

$$f(x, y) = \int 2xy \, dx = x^2y + g(y) \quad (4.23)$$

Dosazením do druhé rovnice dostaneme pro neznámou funkci  $g(y)$

$$x^2 + g'(y) = x^2 + 9y^2 \Rightarrow g'(y) = 9y^2 \Rightarrow g(y) = \int 9y^2 \, dy = 3y^3 + C$$

Dosadíme-li za  $g(y)$  do (4.23), potenciál  $f$  je pak tvaru  $f(x, y) = x^2y + 3y^3 + C$ .  $\square$

**Příklad 4.41.** Ověřte, zda vektorové pole  $\vec{\mathbf{F}} = \left(\frac{1}{y} + yz\right)\mathbf{i} + \left(xz - \frac{x}{y^2}\right)\mathbf{j} + (xy + 2z)\mathbf{k}$  je potenciální na oblasti  $\Omega = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : y > 0\}$  a stanovte potenciál  $f$ .

**Řešení.**

$$\begin{aligned} \text{rot } \vec{\mathbf{F}} &= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{1}{y} + yz & xz - \frac{x}{y^2} & xy + 2z \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial}{\partial y}(xy + 2z) - \frac{\partial}{\partial z}\left(xz - \frac{x}{y^2}\right)\right)\mathbf{i} - \\ &- \left(\frac{\partial}{\partial x}(xy + 2z) - \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{y} + yz\right)\right)\mathbf{j} + \left(\frac{\partial}{\partial x}\left(xz - \frac{x}{y^2}\right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{y} + yz\right)\right)\mathbf{k} = \\ &= (x - x)\mathbf{i} - (y - y)\mathbf{j} + \left(z - \frac{1}{y^2} + \frac{1}{y^2} - z\right)\mathbf{k} = \mathbf{o} \end{aligned}$$

Jelikož  $\text{rot } \vec{\mathbf{F}} = \mathbf{o}$  a  $\Omega$  je jednoduše souvislá oblast, je pole  $\vec{\mathbf{F}}$  potenciální a tudíž potenciál  $f$  existuje. Platí tedy

$$\text{grad} f = \vec{\mathbf{F}} \Leftrightarrow \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}\right) = (F_1, F_2, F_3) \quad \text{tj.}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{1}{y} + yz, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = xz - \frac{x}{y^2}, \quad \frac{\partial f}{\partial z} = xy + 2z$$

Z první rovnice dostaneme

$$f(x, y, z) = \int \left(\frac{1}{y} + yz\right) \, dx = \frac{x}{y} + xyz + g(y, z) \quad (4.24)$$

Dosazením tohoto výsledku do druhé rovnice dostaneme pro neznámou funkci  $g(y, z)$

$$-\frac{x}{y^2} + xz + \frac{\partial g(y, z)}{\partial y} = -\frac{x}{y^2} + xz \Rightarrow \frac{\partial g(y, z)}{\partial y} = 0 \Rightarrow g(y, z) = \int 0 \, dy = h(z).$$

Dosadíme-li tento vztah do (4.24), tak platí

$$f(x, y, z) = \frac{x}{y} + xyz + h(z) \quad (4.25)$$

Dosazením tohoto výsledku do třetí rovnice dostaneme pro  $h(z)$

$$xy + h'(z) = xy + 2z \Rightarrow h'(z) = 2z \Rightarrow h(z) = \int 2z \, dz = z^2 + C.$$

Celkově  $f(x, y, z) = \frac{x}{y} + xyz + z^2 + C$ . □

## 4.5 Greenova věta

V tomto odstavci zformulujeme základní větu rovinné vektorové analýzy, která charakterizuje vztah orientovaného křivkového integrálu a dvojného integrálu v případě tzv. regulárních oblastí:

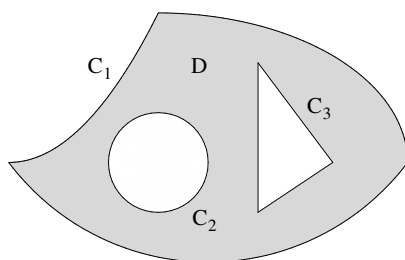
**Definice 4.42.** Ohraničenou množinu  $G \subset \mathbb{R}^2$  nazveme *regulární oblastí*, je-li její hranice disjunktním sjednocením končného počtu jednoduchých uzavřených křivek. Je-li těchto křivek  $k \geq 1$ , hovoříme o *k-násobně souvislé oblasti* (je-li  $k = 1$ , o jednoduše souvislé oblasti).

Uzávěr  $D = \overline{G}$  nazveme *uzavřenou regulární oblastí*.

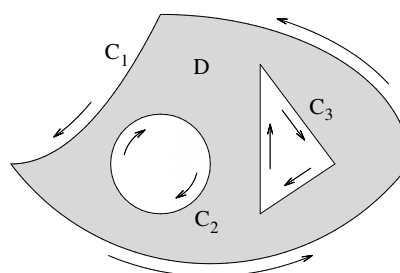
Je-li  $k \geq 2$ , nazýváme hraniční křivku  $C_1$  takovou, že  $D^0 \subset \text{Int } C_1$ , *vnější*, ostatní hraniční křivky  $C_1, \dots, C_k$  nazýváme *vnitřními*.

Hranici oblasti  $D$  označíme  $\partial D$  (hranici množiny  $D$  jsme značili  $hD$ , symbolem  $\partial D$  chceme zdůraznit, že hranice má speciální tvar).

Na obrázku (4.10) je příklad trojnásobně souvislé oblasti.



Obr. 4.10: Trojnásobně souvislá oblast



Obr. 4.11: Kladně orientovaná hranice trojnásobně souvislé oblasti

Nechť  $D$  je uzavřená regulární oblast v  $\mathbb{R}^2$ , jejíž hranice  $\partial D$  je tvořena jednou jednoduchou uzavřenou křivkou  $C$ . *Kladně orientovanou hranicí*  $\partial D$  pak nazveme kladně orientovanou křivku  $C$ .



Je-li hranice  $\partial D$  tvořena uzavřenými křivkami  $C_1, C_2, \dots, C_k$ , z nichž  $C_1$  je vnější a  $C_2, \dots, C_k$  vnitřní, budeme kladně orientovanou hranicí  $\partial D$  rozumět kladně orientovanou křivku  $C_1$  a záporně orientované křivky  $C_2, \dots, C_k$  (viz obr. (4.11)).

Symbolicky píšeme

$$\partial D = C_1 + C_2 + \dots + C_k$$

a definujeme integrál pole  $\vec{F}$  po orientované hranici  $\partial D$  jako

$$\int_{\partial D} \vec{F} \cdot d\vec{s} = \int_{C_1} \vec{F} \cdot d\vec{s} + \int_{C_2} \vec{F} \cdot d\vec{s} + \dots + \int_{C_k} \vec{F} \cdot d\vec{s}$$

**Věta 4.43 (Greenova).** *Nechť  $D \subset \mathbb{R}^2$  je regulární uzavřená oblast,  $\partial D$  kladně orientovaná hranice oblasti  $D$ . Nechť  $\vec{F} = (F_1, F_2)$  je vektorové pole třídy  $C_1$  na  $D$ , pak platí*

$$\oint_{\partial D} \vec{F} \cdot d\vec{s} = \iint_D \operatorname{rot} \vec{F} \, d\nu_2$$

neboli ve složkovém tvaru

$$\oint_{\partial D} F_1 dx + F_2 dy = \iint_D \left( \frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \right) dx dy$$

**Příklad 4.44.** Vypočítejte cirkulaci vektorového pole  $\vec{F} = -x^2y\mathbf{i} + xy^2\mathbf{j}$  podél kladně orientované kružnice  $C$  se středem v počátku a poloměrem  $r > 0$ .

**Řešení.** Jelikož předpoklady věty jsou splněny, platí

$$\begin{aligned} \oint_C \vec{F} \cdot d\vec{s} &= \oint_C -x^2y dx + xy^2 dy = \iint_D (y^2 + x^2) dx dy = \\ &= \left| \begin{array}{l} x = \rho \cos \varphi \quad \varphi \in \langle 0, 2\pi \rangle \\ y = \rho \sin \varphi \quad \rho \in \langle 0, r \rangle \end{array} \right| = \int_0^{2\pi} \left( \int_0^r \rho^3 d\rho \right) d\varphi = \frac{1}{2} \pi r^4. \end{aligned}$$

□

Uvedeme si nyní důsledek Greenovy věty:

Zvolíme-li vektorové pole  $\vec{F} = \frac{1}{2}(-y, x)$ , dostáváme  $\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} = 1$ ,  
a tudíž  $\iint_D \left( \frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \right) dx dy = \iint_D dx dy = \nu_2(D)$ .

Platí tedy:

Obsah regulární oblasti  $D$  s kladně orientovanou hranicí  $\partial D$  se vypočte dle vzorce

$$\nu_2(D) = \frac{1}{2} \oint_{\partial D} -y dx + x dy.$$

## 4.6 Aplikace křivkového integrálu

**Věta 4.45.** Působí-li síla  $\vec{F}$ , jejíž průměty do souřadných os jsou  $F_1(x, y)$ ,  $F_2(x, y)$ , kde  $F_1(x, y)$  a  $F_2(x, y)$  jsou spojité funkce, na hmotný bod pohybující se po křivce  $C$ , pak celková práce vykonaná silou  $\vec{F}$  je rovna

$$L = \int_C F_1(x, y)dx + F_2(x, y)dy.$$

Pohybuje-li se hmotný bod po prostorové křivce  $C$  pod vlivem působení síly  $\vec{F}$ , jejíž průměty do souřadných os jsou  $F_1(x, y, z)$ ,  $F_2(x, y, z)$  a  $F_3(x, y, z)$ , spojité funkce. Potom celková práce vykonaná silou  $\vec{F}$  je rovna

$$L = \int_C F_1(x, y, z)dx + F_2(x, y, z)dy + F_3(x, y, z)dz. \quad (4.26)$$

**Příklad 4.46.** V každém bodě roviny působí síla mající konstantní velikost  $F$  a směr kladné osy  $x$ . Určete práci vykonanou touto silou při pohybu hmotného bodu po části kružnice  $x^2 + y^2 = R^2$  ležící v 1. kvadrantu.

**Řešení.**

$$\begin{aligned} x &= R \cos t, & t &\in \langle 0, \frac{\pi}{2} \rangle; & dx &= -R \sin t dt. \\ y &= R \sin t, \end{aligned}$$

$$\text{Potom } L = \int_C F dx = - \int_0^{\frac{\pi}{2}} F R \sin t dt = -FR. \quad \square$$

**Příklad 4.47.** V každém bodě roviny působí síla  $\vec{F}$ , jejíž průměty do souřadných os jsou rovny  $F_1(x, y) = xy$  a  $F_2(x, y) = x + y$ . Určete práci síly  $\vec{F}$  při přemístění hmotného bodu z bodu  $(0, 0)$  do bodu  $(1, 1)$

a) po přímce  $y = x$ ,                      b) po parabole  $y = x^2$ .

$$\text{Řešení. a) } L = \int_C xy dx + (x + y)dy = - \int_0^1 (t^2 + 2t) dt = \frac{4}{3}.$$

$$\text{b) } L = \int_C xy dx + (x + y)dy = - \int_0^1 (t^3 + t^2 + t) dt = \frac{13}{12}. \quad \square$$

**Příklad 4.48.** Síla má velikost rovnou vzdálenosti jejího působíště od roviny  $xy$  a směřuje k počátku. Určete práci při pohybu hmotného bodu po přímce  $x = at$ ,  $y = bt$ , a  $z = ct$  od bodu  $M = (2a, 2b, 2c)$  do bodu  $N = (a, b, c)$ .

**Řešení.** Jelikož  $\vec{F}$  je rovnoběžná s polohovým vektorem (ale opačného směru), má s ním úměrné souřadnice, t.j.

$$\vec{F} = (-\lambda x, -\lambda y, -\lambda z).$$

Pro velikost vektoru  $\vec{\mathbf{F}}$  platí:

$$|\vec{\mathbf{F}}| = \sqrt{\lambda^2 x^2 + \lambda^2 y^2 + \lambda^2 z^2}.$$

Zároveň však ze zadání plyne  $|\vec{\mathbf{F}}| = z$ , tudíž  $\lambda^2(x^2 + y^2 + z^2) = z^2$ . Z toho

$$\lambda = \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$$

a

$$\vec{\mathbf{F}} = \left( -\frac{xz}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}, -\frac{yz}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}, -\frac{z^2}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \right).$$

Potom

$$L = \int_1^2 \left( \frac{a^2 ct^2}{t\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} + \frac{a^2 ct^2}{t\sqrt{b^2 + b^2 + c^2}} + \frac{c^3 t^2}{t\sqrt{b^2 + b^2 + c^2}} \right) dt = \frac{3}{2} c \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}.$$

□

**Příklad 4.49.** Vektorové pole je určeno silou nepřímo úměrnou vzdálenosti jejího působíště od osy  $z$ , kolmou na tuto osu a k ní směřující. Najděte práci vykonanou touto silou při pohybu hmotného bodu po kružnici  $x = \cos t$ ,  $y = 1$ , a  $z = \sin t$  od bodu  $M = (1, 1, 0)$  do bodu  $N = (0, 0, 1)$ .

**Řešení.** Vektor síly  $\vec{\mathbf{F}}$  je kolmý na osu  $O_z$ , tudíž rovnoběžný s rovinou  $xy$ . Platí

$$\vec{\mathbf{F}} = (-\lambda x, -\lambda y, 0).$$

Pro velikost vektoru  $\vec{\mathbf{F}}$  platí  $|\vec{\mathbf{F}}| = \sqrt{\lambda^2 x^2 + \lambda^2 y^2}$  a zároveň  $|\vec{\mathbf{F}}| = \frac{k}{\sqrt{x^2 + y^2}}$ .

Proto platí

$$\lambda = \frac{k}{x^2 + y^2}, \text{ a odtud } \vec{\mathbf{F}} = \left( -\frac{xk}{x^2 + y^2}, -\frac{yk}{x^2 + y^2}, 0 \right).$$

Rovnice křivky  $C$  jsou:  $x = \cos t$ ,  $y = 1$ ,  $z = \sin t$ ,  $t \in \langle 0, \frac{\pi}{2} \rangle$ .

$$\begin{aligned} L &= \int_C -\frac{xk}{x^2 + y^2} dx - \frac{yk}{x^2 + y^2} dy = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{k \sin t \cos t}{\cos^2 t + 1} dt = \\ &= \left| \begin{array}{l} \text{substituce: } s = \cos t \\ ds = -\sin t dt \end{array} \right| = \int_0^1 \frac{ks}{s^2 + 1} ds = \frac{k}{2} \ln 2, \text{ } k \text{ je konstanta úměrnosti.} \end{aligned}$$

□

## Maplety

Odkaz na maplety:

1. [neorientovaný křivkový integrál](#),
2. [orientovaný křivkový integrál](#),
3. [nezávislost křivkového integrálu na cestě](#),
4. [Greenova věta](#).

## Cvičení

- Vypočtěte  $\int_C \frac{1}{x-y} ds$ , kde  $C$  je úsečka  $AB$ ,  $A = (0, -2)$ ,  $B = (4, 0)$ .
- Vypočtěte  $\int_C (x + y) ds$ , kde  $C$  je obvod trojúhelníka s vrcholy  $A = (1, -1)$ ,  $B = (2, -1)$ ,  $C = (1, 0)$ .
- Vypočtěte  $\int_C x ds$ , kde  $C$  je oblouk  $AB$  paraboly  $y = x^2$ ,  $A = (2, 4)$ ,  $B = (1, 1)$ .
- Vypočtěte  $\int_C xy ds$ , kde  $C$  je obvod obdélníka ohraničeného přímkami  $x = 0$ ,  $x = 4$ ,  $y = 0$ ,  $y = 2$ .
- Vypočtěte  $\int_C xyz ds$ , kde  $C$  je křivka  $x^2 + y^2 = a^2$ ,  $z = 2$ .
- Vypočtěte obsah pláště plochy ohraničené zdola rovinou  $z = 0$ , jejíž řídicí křivka  $C$  leží v rovině  $z = 0$ , kterou vytíná plocha  $z = f(x, y)$ 
  - $C : y = \frac{3}{8}x^2$ ,  $x \in \langle 0, 4 \rangle$ ,  $f : z = x$ .
  - $C : x^2 + y^2 = r^2$ ,  $f : z = mx$ ,  $m > 0$ .
  - $C : x^2 + y^2 = rx$ ,  $r > 0$ ,  $f : x^2 + y^2 = z^2$ .
- Vypočtěte  $\int_C (x - y) dx + (x + y) dy$ , kde
  - $C$  je úsečka  $\overrightarrow{AB}$ ,  $A = (2, 3)$ ,  $B = (3, 5)$ ,  $A$  je počáteční a  $B$  koncový bod.
  - $C$  je oblouk paraboly  $y = x^2$ ,  $A = (0, 0)$  je počáteční,  $B = (2, 4)$  koncový bod.
  - $C$  je oblouk paraboly  $y^2 = x$ ,  $A = (0, 0)$  je počáteční,  $B = (4, 2)$  koncový bod.
- Vypočtěte  $\int_C (x^2 + y^2) dx + (x^2 - y^2) dy$ , kde  $C$  je obvod trojúhelníka  $ABC$ ,  $A = (0, 0)$ ,  $B = (1, 0)$ ,  $C = (0, 1)$ , který je orientován pořadím vrcholů.
- Vypočtěte  $\int_C (x + y) dx + (x - y) dy$ , kde  $C$  kladně orientovaná uzavřená křivka  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ .
- Vypočtěte  $\int_C x dx + y dy + (x + y - 1) dz$ , kde  $C$  je úsečka s počátečním bodem  $A = (0, 0, 0)$  a koncovým bodem  $B = (2, 3, 4)$ .
- Vypočtěte  $\int_C y dx + z dy + x dz$ , kde  $C$  je průsečnice ploch  $z = xy$ ,  $x^2 + y^2 = 1$ , kladně orientovaná.
- Vypočtěte práci síly 1)  $\vec{F} = 3\mathbf{j}$ , 2)  $\vec{F} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j}$  po orientované křivce  $C$ , kde  $C$  je
  - půlkružnice  $x^2 + y^2 = 4$ ,  $y \geq 0$ , orientovaná od bodu  $(-2, 0)$  k bodu  $(2, 0)$ .
  - parabola  $y^2 = 2(x - 1)$ ,  $x \in \langle 1, 3 \rangle$ , orientovaná od bodu  $(1, 0)$  k bodu  $(3, 2)$ .
- Ukažte, že křivkový integrál vektorového pole  $\vec{F}$  je nezávislý na integrační cestě a stanovte jeho hodnotu přes křivku s počátečním bodem  $A$  a koncovým bodem  $B$ .
  - $\vec{F} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j}$ ,  $\Omega = \mathbb{R}^2$ ,  $A = (0, 1)$ ,  $B = (3, -4)$ .
  - $\vec{F} = (x + y)\mathbf{i} + (x - y)\mathbf{j}$ ,  $\Omega = \mathbb{R}^2$ ,  $A = (0, 1)$ ,  $B = (2, 3)$ .
  - $\vec{F} = \left(\frac{y}{x^2}, -\frac{1}{x}\right)$ ,  $\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0\}$ ,  $A = (2, 1)$ ,  $B = (1, 2)$ .

- d)  $\vec{\mathbf{F}} = (x^2 + yz)\mathbf{i} + (y^2 + xz)\mathbf{j} + (z^2 + xy)\mathbf{k}$ ,  $\Omega = \mathbb{R}^3$ ,  $A = (1, -2, 3)$ ,  $B = (2, 3, 4)$ .  
 e)  $\vec{\mathbf{F}} = \left(\frac{a}{y}, -\frac{ax+by}{y^2}, \frac{b}{z}\right)$ ,  $a, b \in \mathbb{R}$ ,  $\Omega = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : y > 0, z > 0\}$ ,  $A = (0, 1, 1)$ ,  
 $B = (-1, 1, 3)$ .

14. Ukažte, že vektorové pole  $\vec{\mathbf{F}}$  je potenciální a najděte jeho potenciál  $f$ .

- a)  $\vec{\mathbf{F}} = z\mathbf{i} + (y^2 + z)\mathbf{j} + (x + y)\mathbf{k}$ ,  $\Omega = \mathbb{R}^3$ .  
 b)  $\vec{\mathbf{F}} = 3\mathbf{i} - 4\mathbf{j} + \mathbf{k}$ ,  $\Omega = \mathbb{R}^3$ .  
 c)  $\vec{\mathbf{F}} = (3x^2y^2 - 2z^4)\mathbf{i} + 2x^3y\mathbf{j} - 8xz^3\mathbf{k}$ ,  $\Omega = \mathbb{R}^3$ .

15. Vypočítejte cirkulaci vektorového pole  $\vec{\mathbf{F}}$  podél kladně orientované křivky  $C$ , jestliže

- a)  $\vec{\mathbf{F}} = (x^2 - y)\mathbf{i} + (x - y^2)\mathbf{j}$ ,  $C$  je hranice oblasti  $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \geq x^2, y \leq 4\}$ .  
 b)  $\vec{\mathbf{F}} = (x - y)\mathbf{i} + 5\mathbf{j}$ ,  $C$  je hranice čtverce o stranách  $x = \pm 2, y = \pm 2$ .  
 c)  $\vec{\mathbf{F}} = (y - x)\mathbf{i} + x^2\mathbf{j}$ ,  $C$  je půlkružnice  $x^2 + y^2 = 4, y \geq 0$  a úsečka spojující body  $(-2, 0), (2, 0)$ .  
 d)  $\vec{\mathbf{F}} = 2y\mathbf{i} + x^2\mathbf{j}$ ,  $C$  je hranice trojúhelníka o vrcholech  $(-3, 0), (3, 0), (0, 3)$ .  
 e)  $\vec{\mathbf{F}} = 3xy\mathbf{i} - 2y\mathbf{j}$ ,  $C = C_1 + C_2 + C_3 + C_4$ , kde  
 $C_1$  je  $x^2 + y^2 = 1, x \geq 0, y \leq 0$ ,  
 $C_2$  je úsečka spojující body  $(1, 0), (1, 1)$ ,  
 $C_3$  je úsečka spojující body  $(0, 0), (1, 1)$ ,  
 $C_4$  je úsečka spojující body  $(0, 0), (0, -1)$ .

16. Silové pole je určeno silou  $\vec{\mathbf{F}} = (x - y, x)$ . Stanovte práci, která se vykoná působením síly  $\vec{\mathbf{F}}$  po obvodě čtverce o stranách  $x = \pm a$  a  $y = \pm a$ ,  $a > 0$ .

17. Silové pole je určeno silou  $\vec{\mathbf{F}} = (x, y, z)$ . Stanovte práci, která se vykoná působením této síly po lomené čáře  $OABC$ , kde  $O$  je počátek,  $A = (0, a, 0)$ ,  $B = (a, a, 0)$  a  $C = (a, a, a)$ .

## Výsledky

1.  $\sqrt{5} \ln 2$
2.  $1 + \sqrt{2}$
3.  $(17\sqrt{17} - 5\sqrt{5})/12$
4. 24
5. 0
6. a)  $\frac{16}{27}(10\sqrt{10} - 1)$   
 b)  $2mr^2$   
 c)  $2r^2$
7. a)  $\frac{23}{2}$

b)  $\frac{38}{3}$   
c)  $\frac{22}{3}$

8. 0

9. 0

10. 13

11.  $\pi$

12. a) 1) 0; 2) 0

b) 1) 3; 2)  $\frac{39}{8}$

13. a) 12

b) 4

c)  $-\frac{3}{2}$

d)  $\frac{169}{3}$

e)  $-\frac{3}{2}$

14. a)  $f(x, y, z) = xz + \frac{y^3}{3} + yz + C$

b)  $f(x, y, z) = 3x - 4y + z + C$

c)  $f(x, y, z) = x^3y^2 - 2xz^4 + C$

15. a)  $\frac{64}{3}$

b) 16

c)  $-2\pi$

d) -18

e) -2

16.  $8a^2$

17.  $\frac{3}{2}a^2$

## 5 Plošný integrál

### 5.1 Plochy v $\mathbb{R}^3$

Při definici po částech hladké plochy budeme postupovat obdobně jako u křivek. Nejdříve se omezíme na hladké kusy ploch s okrajem, které nazveme „listy“ a jež budou dvourozměrnou analogií hladkých oblouků, další plochy z nich dostaneme „slepováním“.

Můžeme si představit, že hladký kus plochy s okrajem vznikne pružnou deformací rovinné elastické destičky. Pro popis takové plochy se hodí parametrický popis

$$\begin{aligned} x &= \Phi_1(u, v) \\ y &= \Phi_2(u, v) \\ z &= \Phi_3(u, v) \end{aligned} \quad (u, v) \in D \subset \mathbb{R}^2, \quad (5.1)$$

kde zobrazení  $\Phi = (\Phi_1, \Phi_2, \Phi_3)$  má vhodné vlastnosti. Chceme-li přitom dostat plochu s po částech hladkým okrajem, je třeba uvažovat i toto zobrazení na hranici oblasti  $D$ , přičemž hranice musí být po částech hladkou křivkou nebo sjednocením takových křivek.

**Definice 5.1.** Zobrazení  $\Phi = (\Phi_1, \Phi_2, \Phi_3) : D \rightarrow \mathbb{R}^3$  nazveme *regulárním* na  $D$ , je-li třídy  $C_1$  na  $D$  a Jacobiova matice

$$\Phi' = \begin{pmatrix} \frac{\partial \Phi_1}{\partial u} & \frac{\partial \Phi_1}{\partial v} \\ \frac{\partial \Phi_2}{\partial u} & \frac{\partial \Phi_2}{\partial v} \\ \frac{\partial \Phi_3}{\partial u} & \frac{\partial \Phi_3}{\partial v} \end{pmatrix}$$

má hodnost 2 na  $D$ .

**Definice 5.2.** Množinu  $B \subset \mathbb{R}^3$  nazveme *kusem hladké plochy* nebo krátce *listem*, existuje-li prosté regulární zobrazení

$$\Phi = (\Phi_1, \Phi_2, \Phi_3) : D \rightarrow \mathbb{R}^3,$$

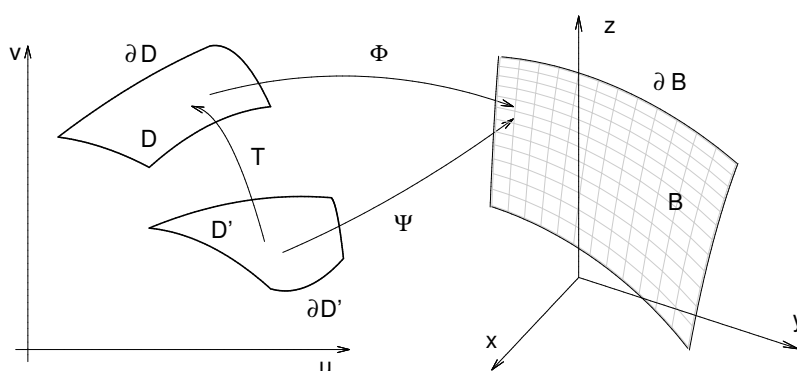
kde  $D \subset \mathbb{R}^2$  je uzavřená regulární oblast, takové, že  $\Phi(D) = B$ .

Zobrazení  $\Phi$  nazýváme (regulární) *parametrizací listu*  $B$ , rovnice (5.1) *parametrickými rovnicemi listu*  $B$ , proměnné  $u, v$  *parametry* a oblast  $D$  *oborem parametrů*.

Množinu  $\Phi(\partial D)$  nazýváme *okrajem listu*  $B$  a značíme  $\partial B$ , množinu  $B^0 = B \setminus \partial B$  *vnitřkem listu*  $B$  (nejde o vnitřek v  $\mathbb{R}^3$ , ten je  $\emptyset$ ).

Okraj listu je jednoduchá uzavřená křivka (je-li  $D$  jednoduše souvislá oblast) nebo disjunkttní sjednocení konečného počtu takových křivek (je-li  $D$  vícenásobně souvislá).

**Definice 5.3.** Nechť  $\Phi : D \rightarrow \mathbb{R}^3$  je parametrizace listu  $B$  a nechť  $\mathbf{T} : D' \rightarrow D$  je prosté regulární zobrazení uzavřené regulární oblasti  $D' \subset \mathbb{R}^2$  na uzavřenou regulární oblast  $D \subset \mathbb{R}^2$  (takové zobrazení budeme dále nazývat *transformací parametrů*). Pak složené zobrazení  $\Psi = \Phi \circ \mathbf{T} : D' \rightarrow \mathbb{R}^3$  je rovněž parametrizací listu  $B$ . Říkáme, že *parametrizace  $\Psi$  vznikla z parametrizace  $\Phi$  transformací parametrů  $\mathbf{T}$* . Tuto situaci ukazuje obrázek.



**Definice 5.4.** Má-li transformace  $\mathbf{T}$  kladný Jacobiův determinant, nazývají se parametrizace  $\Psi, \Phi$  *souhlasné*, v opačném případě (tj. determinant je záporný) *nesouhlasné*.

List má zřejmě nekonečně mnoho (regulárních) parametrizací. Zvolíme-li jednu z nich, pak každou další parametrizaci dostaneme vhodnou transformací parametrů.

**Definice 5.5.** Nechť  $B$  je list. Spojité vektorové pole  $\vec{\nu} : B \rightarrow V(\mathbb{R}^3)$  takové, že pro každý bod  $p \in B$  je  $\vec{\nu}(p)$  jednotkový normálový vektor listu  $B$  v bodě  $p$ , se nazývá *orientací listu  $B$* . Dvojjici  $(B, \vec{\nu})$  nazýváme *orientovaným listem*, dvojjici  $(B, -\vec{\nu})$  *opačně orientovaným listem* k  $(B, \vec{\nu})$ . Označíme-li orientovaný list  $(B, \vec{\nu})$  znakem  $\mathbf{B}$ , označíme  $(B, -\vec{\nu})$  znakem  $-\mathbf{B}$ .

**Tvrzení.** Každý list má právě dvě orientace, jež jsou opačné.

Zvolíme-li jednu z nich, říkáme, že jsme na  $B$  zvolili *stranu plochy*; list má tedy dvě strany - je „*dvoustranný*“ (to u některých jiných ploch neplatí).

**Definice 5.6.** Je-li  $\Phi : D \rightarrow \mathbb{R}^3$  parametrizace listu  $B$ ,  $p = \Phi(u, v) \in B$ , určují vektory  $\frac{\partial \Phi(u, v)}{\partial u}, \frac{\partial \Phi(u, v)}{\partial v}$  tečnou rovinu v bodě  $p$ , takže jednotkové normálové vektory k ploše  $B$  v bodě  $p$  jsou vektory

$$\frac{\left( \frac{\partial \Phi}{\partial u} \times \frac{\partial \Phi}{\partial v} \right) (u, v)}{\left| \left( \frac{\partial \Phi}{\partial u} \times \frac{\partial \Phi}{\partial v} \right) (u, v) \right|}, \quad - \frac{\left( \frac{\partial \Phi}{\partial u} \times \frac{\partial \Phi}{\partial v} \right) (u, v)}{\left| \left( \frac{\partial \Phi}{\partial u} \times \frac{\partial \Phi}{\partial v} \right) (u, v) \right|}.$$



Zvolíme-li orientaci  $B$  pomocí prvního vektoru, tj. definujeme-li orientaci  $\vec{\nu}$  vztahem

$$\vec{\nu}(p) = \frac{\left(\frac{\partial \Phi}{\partial u} \times \frac{\partial \Phi}{\partial v}\right)(\Phi^{-1}(p))}{\left|\left(\frac{\partial \Phi}{\partial u} \times \frac{\partial \Phi}{\partial v}\right)(\Phi^{-1}(p))\right|}, \quad p \in B, \quad (5.2)$$

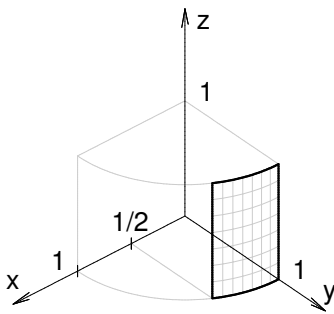
říkáme, že orientace  $\vec{\nu}$  je dána (indukována) parametrizací  $\Phi$  nebo také že  $\Phi$  souhlasí s orientací  $\vec{\nu}$  (je-li  $\vec{\nu}$  dáno a priori).

Platí toto tvrzení:

**Tvrzení.** *Souhlasné parametrizace listu dávají tutéž orientaci, nesouhlasné parametrizace dávají opačné orientace.*

**Příklad 5.7.** Uvažujme část válcové plochy

$$B = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = 1, 0 \leq x \leq \frac{1}{2}, y \geq 0, 0 \leq z \leq 1\}$$



$B$  lze parametrizovat například takto:

$$\Phi : \begin{aligned} x &= u \\ y &= \sqrt{1-u^2} \\ z &= v \end{aligned} \quad (u, v) \in D = \langle 0, \frac{1}{2} \rangle \times \langle 0, 1 \rangle$$

Parametrizace  $\Phi(u, v) = (u, \sqrt{1-u^2}, v)$  je prostým regulárním zobrazením. Určíme orientaci  $\vec{\nu}$  indukovanou parametrizací  $\Phi$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Phi}{\partial u} &= \left(1, -\frac{u}{\sqrt{1-u^2}}, 0\right), & \frac{\partial \Phi}{\partial v} &= (0, 0, 1), & \frac{\partial \Phi}{\partial u} \times \frac{\partial \Phi}{\partial v} &= \left(-\frac{u}{\sqrt{1-u^2}}, -1, 0\right), \\ \frac{\frac{\partial \Phi}{\partial u} \times \frac{\partial \Phi}{\partial v}}{\left|\frac{\partial \Phi}{\partial u} \times \frac{\partial \Phi}{\partial v}\right|} &= \frac{\left(\frac{-u}{\sqrt{1-u^2}}, -1, 0\right)}{\sqrt{\frac{u^2}{1-u^2} + 1}} = (-u, -\sqrt{1-u^2}, 0). \end{aligned}$$

Je tedy orientace listu  $B$  indukovaná parametrizací  $\Phi$

$$\vec{\nu}(x, y, z) = (-x, -y, 0) \quad [u = x, \sqrt{1-u^2} = y].$$

Normálové vektory směřují k ose  $z$ , jde tudíž o stranu plochy přivrácenou k rovině  $xz$ .

Daný list lze parametrizovat také např. parametrizací

$$\Psi(t, s) = (\cos t, \sin t, s), \quad (t, s) \in D' = \langle \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2} \rangle \times \langle 0, 1 \rangle.$$

Tuto parametrizaci dostaneme z  $\Phi$  transformací parametrů  $\mathbf{T}(t, s) = (T_1(t, s), T_2(t, s)) = (\cos t, s)$ , která je prostým regulárním zobrazením  $D'$  na  $D$ . Jacobiův determinant

$$\mathbf{DT} = \begin{vmatrix} \frac{\partial T_1}{\partial t} & \frac{\partial T_1}{\partial s} \\ \frac{\partial T_2}{\partial t} & \frac{\partial T_2}{\partial s} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -\sin t & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = -\sin t$$

je v každém bodě  $(t, s) \in D'$  záporný; parametrizace  $\Phi, \Psi$  jsou nesouhlasné. Pro parametrizaci  $\Psi$  dostaneme

$$\frac{\partial \Psi}{\partial t} = (-\sin t, \cos t, 0), \quad \frac{\partial \Psi}{\partial s} = (0, 0, 1), \quad \frac{\partial \Psi}{\partial t} \times \frac{\partial \Psi}{\partial s} = (\cos t, \sin t, 0) = \frac{\frac{\partial \Psi}{\partial t} \times \frac{\partial \Psi}{\partial s}}{\left| \frac{\partial \Psi}{\partial t} \times \frac{\partial \Psi}{\partial s} \right|}.$$

Je tedy orientace listu  $B$  indukovaná parametrizací  $\Psi$

$$\vec{\nu}_1(x, y, z) = (x, y, 0) \quad [\cos t = x, \sin t = y];$$

tedy  $\vec{\nu}_1 = -\vec{\nu}$ , což souhlasí s tím, že parametrizace  $\Phi, \Psi$  jsou nesouhlasné.

Nechť nyní  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  je funkce třídy  $C_1$  na uzavřené regulární oblasti  $D \subset \mathbb{R}^2$ , pak graf funkce  $f$  vzhledem k rovině  $xy$ :

$$B_{xy} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (x, y) \in D, z = f(x, y)\}$$

je list.

Parametrizaci  $B_{xy}$  dostaneme, zvolíme-li  $x, y$  za parametry:  $x = u, y = v, z = f(u, v)$ , tj.  $\Phi(u, v) = (\Phi_1(u, v), \Phi_2(u, v), \Phi_3(u, v)) = (u, v, f(u, v))$ ,  $(u, v) \in D$ . Je pak

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Phi}{\partial u} &= \left( \frac{\partial \Phi_1}{\partial u}, \frac{\partial \Phi_2}{\partial u}, \frac{\partial \Phi_3}{\partial u} \right) = \left( 1, 0, \frac{\partial f}{\partial u} \right), & \frac{\partial \Phi}{\partial v} &= \left( \frac{\partial \Phi_1}{\partial v}, \frac{\partial \Phi_2}{\partial v}, \frac{\partial \Phi_3}{\partial v} \right) = \left( 0, 1, \frac{\partial f}{\partial v} \right), \\ \frac{\partial \Phi}{\partial u} \times \frac{\partial \Phi}{\partial v} &= \left( -\frac{\partial f}{\partial u}, -\frac{\partial f}{\partial v}, 1 \right), & \frac{\frac{\partial \Phi}{\partial u} \times \frac{\partial \Phi}{\partial v}}{\left| \frac{\partial \Phi}{\partial u} \times \frac{\partial \Phi}{\partial v} \right|} &= \frac{\left( -\frac{\partial f}{\partial u}, -\frac{\partial f}{\partial v}, 1 \right)}{\sqrt{\left( \frac{\partial f}{\partial u} \right)^2 + \left( \frac{\partial f}{\partial v} \right)^2 + 1}}. \end{aligned}$$

Orientace listu  $B_{xy}$  určená touto parametrizací je „horní strana“ grafu  $B_{xy}$ , tj. normálový vektor svírá s osou  $z$  ostrý úhel. Také množiny

$$\begin{aligned} B_{yz} &= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (y, z) \in D, x = f(y, z)\} && \text{(graf } f \text{ vzhledem k rovině } yz) \\ B_{zx} &= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (z, x) \in D, y = f(z, x)\} && \text{(graf } f \text{ vzhledem k rovině } zx) \end{aligned}$$

jsou listy.

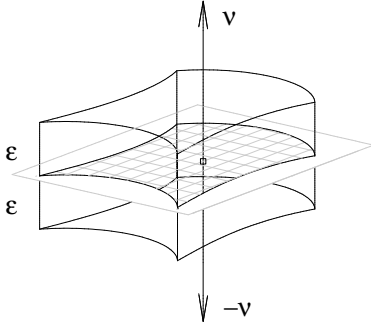
Dá se ukázat (pomocí věty o implicitních funkcích), že každý list je v jistém okolí každého svého bodu jednou z ploch typu  $B_{xy}, B_{yz}, B_{zx}$ .

## Obsah listu

List je jakousi dvourozměrnou analogií oblouku. Při zavádění pojmu délky oblouku jsme vpisovali do oblouku lomené čáry a délkou oblouku jsme nazvali limitu délek těchto lomených čar, když strany lomených čar konvergovaly k nule.

Kdybychom chtěli postupovat u ploch analogicky, vpisovali bychom do dané plochy polyedrické plochy, tj. plochy, které jsou složeny z mnohoúhelníků (např. z trojúhelníků) a jejichž obsah definujeme jako v elementární geometrii, a za obsah dané plochy bychom považovali limitu obsahů těchto polyedrických ploch, když průměry mnohoúhelníků konvergují k nule. Jak ukázal koncem 19. století H. A. Schwarz, není tento postup vhodný a

nemusí dát rozumný výsledek ani u tak jednoduché plochy, jako je plášť rotačního válce. Je tedy nutné zvolit jiný postup. Takových postupů je několik. Zde zvolíme ten, který se opírá o pojem objemu, který již máme definován.



Požadujeme, aby obsah plochy měl vlastnosti míry a aby obsah rovinné plochy byl stejný jako její dvourozměrná míra  $\nu_2$ . Máme-li rovinný list  $B$  a posuneme-li jej o  $\varepsilon > 0$  ve směru normálového vektoru  $\vec{\nu}$  a o  $\varepsilon$  ve směru vektoru  $-\vec{\nu}$ , dostaneme vrstvu  $B_\varepsilon$  tloušťky  $2\varepsilon$  (viz obrázek). Označíme-li  $\omega(B)$  obsah plochy  $B$  a  $\nu_3(B_\varepsilon)$  objem vrstvy  $B_\varepsilon$ , pak zřejmě  $\nu_3(B_\varepsilon) = 2\varepsilon\omega(B)$ , tedy  $\omega(B) = \frac{\nu_3(B_\varepsilon)}{2\varepsilon}$ .

Nechť nyní list  $B$  není rovinný. Opět jej budeme „posouvat“ tak, že v každém bodě  $p \in B$  jej posuneme o  $\varepsilon$  ve směru jednotkového normálového vektoru  $\vec{\nu}(p)$  a o  $\varepsilon$  ve směru jednotkového normálového vektoru  $-\vec{\nu}(p)$  (předpokládáme, že na  $B$  jsme zvolili některé spojitě normálové pole  $\vec{\nu}$ ), přitom  $\varepsilon > 0$  nechť je dostatečně malé číslo. Dostaneme tak opět tenkou vrstvu  $B_\varepsilon$ , v níž  $B$  je jakýmsi „středním řezem“. Podíl  $\frac{\nu_3(B_\varepsilon)}{2\varepsilon}$  bude tím lépe aproximovat obsah plochy  $B$ , čím bude  $\varepsilon$  menší. Definujme proto *obsah listu*  $B$  takto:

$$\omega(B) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \frac{\nu_3(B_\varepsilon)}{2\varepsilon},$$

přitom  $B_\varepsilon = \{p + t\vec{\nu}(p) : p \in B, t \in \langle -\varepsilon, \varepsilon \rangle\}$ .

Ukažme si na známém příkladě kulové plochy, že dostaneme tentýž výsledek, který se uvádí v elementární geometrii.

Je-li  $B$  kulová plocha poloměru  $R$  se středem  $a \in \mathbb{R}^3$ , pak  $B_\varepsilon = K_{R+\varepsilon} - K_{R-\varepsilon}$ , kde  $K_r$  je koule se středem  $a$  o poloměru  $r$ . Objem koule máme přesně definován (pomocí trojného integrálu), je  $\nu_3(K_r) = \frac{4}{3}\pi r^3$ . Tudíž

$$\begin{aligned} \nu_3(B_\varepsilon) &= \nu_3(K_{R+\varepsilon}) - \nu_3(K_{R-\varepsilon}) = \frac{4}{3}\pi ((R+\varepsilon)^3 - (R-\varepsilon)^3) = \\ &= \frac{4}{3}\pi (6R^2\varepsilon + 2\varepsilon^3) = \frac{8}{3}\pi (3R^2\varepsilon + \varepsilon^3). \end{aligned}$$

Tedy

$$\omega(B) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \frac{\frac{8}{3}\pi (3R^2\varepsilon + \varepsilon^3)}{2\varepsilon} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} (4\pi R^2 + \frac{4\pi}{3}\varepsilon^2) = 4\pi R^2,$$

což souhlasí se známým vzorcem pro obsah kulové plochy.

**Věta 5.8.** *Nechť  $B \subset \mathbb{R}^3$  je list, buď  $\Phi = (\Phi_1, \Phi_2, \Phi_3) : D \rightarrow \mathbb{R}^3$  jeho parametrizace. Pak pro obsah  $\omega(B)$  listu  $B$  platí:*

$$\omega(B) = \iint_D \left| \frac{\partial \Phi}{\partial u} \times \frac{\partial \Phi}{\partial v} \right| du dv. \quad (5.3)$$

**Důkaz.** Máme tedy ukázat, že

$$\omega(B) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \frac{\nu_3(B_\varepsilon)}{2\varepsilon} = \iint_D \left| \frac{\partial \Phi}{\partial u} \times \frac{\partial \Phi}{\partial v} \right| dudv.$$

Odvození si pouze naznačíme:

$$B_\varepsilon = \{p + t\vec{\nu}(p) : p \in B, t \in \langle -\varepsilon, \varepsilon \rangle\} = \left\{ \Phi(u, v) + t \frac{\frac{\partial \Phi}{\partial u} \times \frac{\partial \Phi}{\partial v}}{\left| \frac{\partial \Phi}{\partial u} \times \frac{\partial \Phi}{\partial v} \right|} : (u, v) \in D, t \in \langle -\varepsilon, \varepsilon \rangle \right\}.$$

Označme  $\frac{\frac{\partial \Phi}{\partial u} \times \frac{\partial \Phi}{\partial v}}{\left| \frac{\partial \Phi}{\partial u} \times \frac{\partial \Phi}{\partial v} \right|} = \vec{n}(u, v) = (n_1(u, v), n_2(u, v), n_3(u, v))$ . Je tedy

$$B_\varepsilon = \{(\Phi_1(u, v) + t \cdot n_1(u, v), \Phi_2(u, v) + t \cdot n_2(u, v), \Phi_3(u, v) + t \cdot n_3(u, v)) : (u, v) \in D, t \in \langle -\varepsilon, \varepsilon \rangle\}.$$

Definujme zobrazení  $G : D \times \langle -\varepsilon, \varepsilon \rangle \rightarrow \mathbb{R}^3$ :

$$G(u, v, t) = (\Phi_1(u, v) + t \cdot n_1(u, v), \Phi_2(u, v) + t \cdot n_2(u, v), \Phi_3(u, v) + t \cdot n_3(u, v)).$$

Zobrazení  $G$  je třídy  $C_1$  a platí  $G(D \times \langle -\varepsilon, \varepsilon \rangle) = B_\varepsilon$ .

Jakobián  $DG$  je pak tvaru

$$DG = \begin{vmatrix} \frac{\partial \Phi_1}{\partial u} + t \frac{\partial n_1}{\partial u} & \frac{\partial \Phi_1}{\partial v} + t \frac{\partial n_1}{\partial v} & n_1(u, v) \\ \frac{\partial \Phi_2}{\partial u} + t \frac{\partial n_2}{\partial u} & \frac{\partial \Phi_2}{\partial v} + t \frac{\partial n_2}{\partial v} & n_2(u, v) \\ \frac{\partial \Phi_3}{\partial u} + t \frac{\partial n_3}{\partial u} & \frac{\partial \Phi_3}{\partial v} + t \frac{\partial n_3}{\partial v} & n_3(u, v) \end{vmatrix}$$

Tento determinant se dá vyjádřit podle součtové věty jako součet čtyř determinantů, ze tří se dá vytknout  $t$ , dostaneme tak

$$DG = \begin{vmatrix} \frac{\partial \Phi_1}{\partial u} & \frac{\partial \Phi_1}{\partial v} & n_1(u, v) \\ \frac{\partial \Phi_2}{\partial u} & \frac{\partial \Phi_2}{\partial v} & n_2(u, v) \\ \frac{\partial \Phi_3}{\partial u} & \frac{\partial \Phi_3}{\partial v} & n_3(u, v) \end{vmatrix} + t \cdot f(u, v, t),$$

kde  $f(u, v, t)$  je hodnota zbývajících tří determinantů a je spojitá a ohraničená. Rozvinutím uvedeného determinantu podle třetího sloupce dostáváme

$$\mathbf{n} \cdot \left( \frac{\partial \Phi}{\partial u} \times \frac{\partial \Phi}{\partial v} \right) = \frac{\frac{\partial \Phi}{\partial u} \times \frac{\partial \Phi}{\partial v}}{\left| \frac{\partial \Phi}{\partial u} \times \frac{\partial \Phi}{\partial v} \right|} \cdot \left( \frac{\partial \Phi}{\partial u} \times \frac{\partial \Phi}{\partial v} \right) = \left| \frac{\partial \Phi}{\partial u} \times \frac{\partial \Phi}{\partial v} \right| > 0.$$

je tedy Jakobián  $DG = \left| \frac{\partial \Phi}{\partial u} \times \frac{\partial \Phi}{\partial v} \right| + t \cdot f$ .

Podle věty o transformaci trojného integrálu platí

$$\nu_3(B_\varepsilon) = \iiint_{B_\varepsilon} dx dy dz = \iiint_{D \times \langle -\varepsilon, \varepsilon \rangle} |DG| dudv dt =$$

$$= \iint_D \left| \frac{\partial \Phi}{\partial u} \times \frac{\partial \Phi}{\partial v} \right| dudv \cdot \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} dt + \rho = 2\varepsilon \cdot \iint_D \left| \frac{\partial \Phi}{\partial u} \times \frac{\partial \Phi}{\partial v} \right| dudv + \rho,$$

$$\text{kde } \rho = \iint_D \left( \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} t \cdot f(u, v, t) dt \right) dudv.$$

$$\text{Je tedy } \frac{\nu_3(B_\varepsilon)}{2\varepsilon} = \iint_D \left| \frac{\partial \Phi}{\partial u} \times \frac{\partial \Phi}{\partial v} \right| dudv + \frac{\rho}{2\varepsilon}.$$

Jelikož  $f$  je spojitá a ohraničená, tj.  $|f| \leq K$ , tak platí

$$|\rho| \leq \iint_D \left( \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} |t \cdot f(u, v, t)| \right) dudv \leq \iint_D dudv \cdot K \cdot \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} |t| dt = K \cdot \nu_2(D) \cdot \varepsilon^2,$$

takže  $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\rho}{2\varepsilon} = 0$ . Odtud

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\nu_3(B_\varepsilon)}{2\varepsilon} = \iint_D \left| \frac{\partial \Phi}{\partial u} \times \frac{\partial \Phi}{\partial v} \right| dudv.$$

□

Je-li list  $B$  grafem funkce  $g : D \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $D \subset \mathbb{R}^2$ ,  $g \in C_1(D)$ , a zvolíme-li parametrizaci  $\Phi(u, v) = (u, v, g(u, v))$ , pak

$$\frac{\partial \Phi}{\partial u} \times \frac{\partial \Phi}{\partial v} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & 0 & \frac{\partial g}{\partial u} \\ 0 & 1 & \frac{\partial g}{\partial v} \end{vmatrix} = \left( -\frac{\partial g}{\partial v}, -\frac{\partial g}{\partial u}, 1 \right) \Rightarrow \left| \frac{\partial \Phi}{\partial u} \times \frac{\partial \Phi}{\partial v} \right| = \sqrt{1 + \left( \frac{\partial g}{\partial u} \right)^2 + \left( \frac{\partial g}{\partial v} \right)^2}.$$

V tomto případě pro obsah listu  $B$  platí

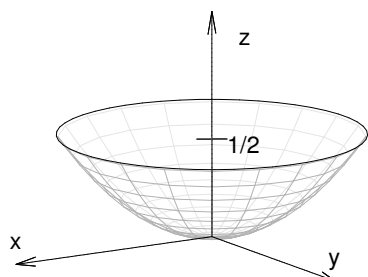
$$\omega(B) = \iint_D \sqrt{1 + \left( \frac{\partial g}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial g}{\partial y} \right)^2} dx dy$$

(místo proměnných  $u, v$  můžeme psát opět  $x, y$ ).

**Příklad 5.9.** Vypočítejte obsah části rotačního paraboloidu

$$B = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = \frac{x^2 + y^2}{2}, x^2 + y^2 \leq 1 \right\}$$

**Řešení.** Jde o graf funkce  $g(x, y) = \frac{x^2 + y^2}{2}$ ,  $D$  je kruh  $x^2 + y^2 \leq 1$  a platí



$$\begin{aligned}\omega(B) &= \iint_{x^2+y^2 \leq 1} \sqrt{1+x^2+y^2} \, dx dy \\ &= \left| \begin{array}{l} x = \rho \cos \varphi \quad \varphi \in \langle 0, 2\pi \rangle \\ y = \rho \sin \varphi \quad \rho \in \langle 0, 1 \rangle \end{array} \right| =\end{aligned}$$

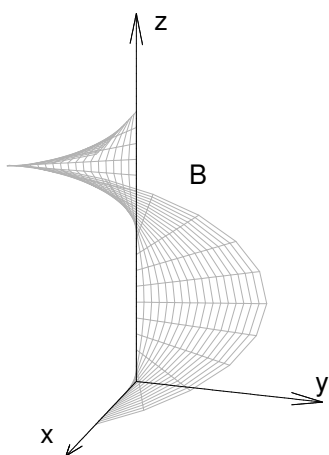
$$\begin{aligned}&= \int_0^1 \left( \int_0^{2\pi} \rho \sqrt{1+\rho^2} \, d\varphi \right) d\rho = 2\pi \cdot \int_0^1 \rho \sqrt{1+\rho^2} \, d\rho = \left| \begin{array}{l} 1+\rho^2 = t \\ 2\rho \, d\rho = dt \end{array} \right| = \\ &= \pi \cdot \int_1^2 \sqrt{t} \, dt = \frac{2\pi}{3} (2\sqrt{2} - 1).\end{aligned}$$

□

**Příklad 5.10.** Vypočtete obsah části  $B$  šroubové plochy o parametrických rovnicích  $x = u \cos v$ ,  $y = u \sin v$ ,  $z = v$  nacházející se ve válci  $x^2 + y^2 = 4$ ,  $0 \leq z \leq 4\pi$ .

**Řešení.** Parametrizace listu  $B$  má tvar

$$\Phi(u, v) = (u \cos v, u \sin v, v), \text{ kde } (u, v) \in \langle 0, 2 \rangle \times \langle 0, 2\pi \rangle.$$



$$\frac{\partial \Phi}{\partial u} = (\cos v, \sin v, 0), \quad \frac{\partial \Phi}{\partial v} = (-u \sin v, u \cos v, 1)$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial \Phi}{\partial u} \times \frac{\partial \Phi}{\partial v} &= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \cos v & \sin v & 0 \\ -u \sin v & u \cos v & 1 \end{vmatrix} = \\ &= (\sin v, -\cos v, u),\end{aligned}$$

$$\left| \frac{\partial \Phi}{\partial u} \times \frac{\partial \Phi}{\partial v} \right| = \sqrt{\sin^2 v + \cos^2 v + u^2} = \sqrt{u^2 + 1}.$$

$$\begin{aligned}\omega(B) &= \iint_D \left| \frac{\partial \Phi}{\partial u} \times \frac{\partial \Phi}{\partial v} \right| \, du dv = \int_0^2 \left( \int_0^{2\pi} \sqrt{u^2 + 1} \, dv \right) du = \\ &= 2\pi \cdot \int_0^2 \sqrt{u^2 + 1} \, du = 2\pi \cdot \left( \sqrt{5} + \frac{1}{2} \ln(2 + \sqrt{5}) \right).\end{aligned}$$

□

Nechť nyní  $\Phi = \Phi(u, v) : D \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,  $\Psi = \Psi(s, t) : D' \rightarrow \mathbb{R}^3$  jsou parametrizace listu  $B \subset \mathbb{R}^3$ . Pak platí

$$\iint_D \left| \frac{\partial \Phi}{\partial u} \times \frac{\partial \Phi}{\partial v} \right| dudv = \iint_{D'} \left| \frac{\partial \Psi}{\partial s} \times \frac{\partial \Psi}{\partial t} \right| dsdt,$$

což značí, že obsah listu nezávisí na jeho parametrizaci.

Listy jsou nejjednodušší dvourozměrné útvary v  $\mathbb{R}^3$ . Složitější dvourozměrné útvary lze tvořit spojováním listů. Při studiu následující definice nechte si čtenář představit např. povrch jehlanu; listy, které tento povrch tvoří, jsou stěny jehlanu.

**Definice 5.11.** Souvislou množinu  $S \subset \mathbb{R}^3$  nazveme (po částech hladkou) plochou, existuje-li takový konečný systém listů

$$\{B_1, \dots, B_m\}, \quad (5.4)$$

že platí:

- (1)  $S = B_1 \cup \dots \cup B_m$ ,
- (2) je-li  $i \neq j$ , je  $B_i \cap B_j \subset \partial B_i \cap \partial B_j$  a  $B_i \cap B_j$  oblouk, nebo množina prázdná nebo jednobodová,
- (3) je-li  $i \neq j \neq k \neq i$ , je  $B_i \cap B_j \cap B_k$  buď množina prázdná, nebo jednobodová.

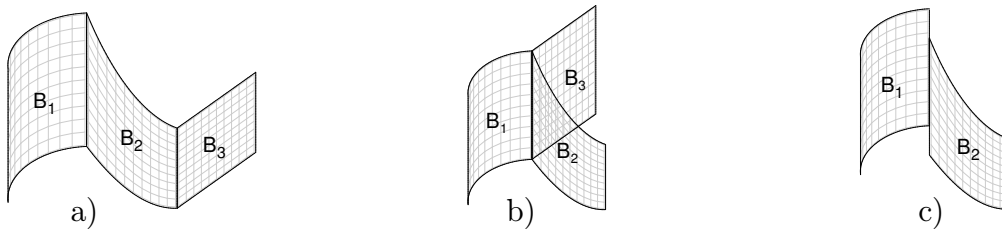
Systém (5.4) nazýváme rozkladem plochy  $S$  na listy.

Jestliže ke každému bodu  $p \in S$  existuje okolí  $U(p)$  tak, že  $B = \overline{U(p)} \cap S$  je list (a tedy na  $B$  existuje spojitě normálové pole), říkáme, že plocha  $S$  je hladká.

Je-li  $B_i \cap B_j$  oblouk, říkáme, že listy  $B_i, B_j$  jsou přilehlé (podél tohoto oblouku).

Krajním obloukem plochy  $S$  nazveme oblouk, který je částí okraje právě jednoho listu rozkladu plochy  $S$ . Nemá-li plocha  $S$  krajní oblouky, nazývá se uzavřená.

Uzavřená plocha nemá okraj. Není-li  $S$  uzavřená plocha, nazývá se sjednocení všech krajních oblouků okraj plochy  $S$ , označíme jej  $\partial S$ . Množina  $\partial S$  je uzavřenou křivkou nebo sjednocením konečného počtu uzavřených křivek.



Na obrázku a) je příklad množiny, která je po částech hladkou plochou, b) je příklad množiny, která není plochou, c) jsou přilehlé listy  $B_1, B_2$  podél oblouku  $B_1 \cap B_2$ .

**Definice 5.12.** Bod  $p \in S$  se nazývá regulární bod plochy  $S$ , existuje-li otevřené okolí  $U(p)$  v  $\mathbb{R}^3$  tak, že  $\overline{U(p)} \cap S$  je list; v opačném případě se bod  $p$  nazývá singulární bod plochy  $S$ .

Hladká plocha nemá singulární body. Množina singulárních bodů plochy  $S$  o rozkladu (5.4) je podmnožinou množiny  $\bigcup_{i=1}^m \partial B_i$  a u plochy, která není hladká, ji tvoří křivky nebo izolované body (představte si např. povrch kužele).

Na ploše  $S$  můžeme definovat plošnou míru  $\omega$  pomocí plošné míry na listech.

**Definice 5.13.** Řekneme, že množina  $M \subset S$  je *měřitelná* na  $S$ , jestliže pro každý list  $B \subset S$  je množina  $M \cap B$  měřitelná na listu  $B$ .

Řekneme, že množina  $M \subset S$  je *nulová* (nebo že *má plošnou míru 0*), jestliže pro každý list  $B \subset S$  má množina  $M \cap B$  plošnou míru 0, píšeme  $\omega(M) = 0$ .

Platí:  $M \subset S$  má plošnou míru 0, právě když ke každému  $\varepsilon > 0$  existuje konečný systém listů  $\{L_1, \dots, L_r\}$ ,  $L_i \subset S$  ( $i = 1, \dots, r$ ) tak, že

$$M \subset \bigcup_{i=1}^r L_i \quad \text{a} \quad \sum_{i=1}^r \omega(L_i) < \varepsilon.$$

Jestliže  $\omega(M) = 0$  a  $N \subset M$ , pak  $\omega(N) = 0$ .

**Tvrzení.** Každá křivka má plošnou míru 0.

Sjednocení konečného počtu křivek má plošnou míru 0. Odtud plyne, že množina singulárních bodů má plošnou míru 0.

Jsou-li  $B_1, \dots, B_r \subset S$  listy,  $M \subset \bigcup_{i=1}^r B_i$  a je-li každá množina  $M \cap B_i$  ( $i = 1, \dots, r$ ) měřitelná, pak  $M$  je měřitelná, neboť  $M = \bigcup_{i=1}^r (B_i \cap M)$  a vpravo je sjednocení měřitelných množin.

**Definice 5.14.** Je-li  $M$  měřitelná množina na  $S$  a je-li (5.4) rozklad plochy  $S$ , definujeme plošnou míru množiny  $M$  vztahem

$$\omega(M) = \sum_{i=1}^m \omega(M \cap B_i).$$

Speciálně  $S$  je měřitelná a

$$\omega(S) = \sum_{i=1}^m \omega(B_i).$$

Dá se dokázat (viz [?]), že číslo  $\omega(S)$  nezávisí na rozkladu plochy  $S$  na listy.

Z praktického hlediska je užitečné poněkud zobecnit pojem parametrizace z definice listu, aby se i některé jiné plochy než listy daly popsat parametricky.

**Definice 5.15.** Nechť  $S$  je plocha. *Parametrizací plochy  $S$*  nazveme spojitě zobrazení  $\Phi : D \rightarrow \mathbb{R}^3$  (kde  $D$  je regulární uzavřená oblast v  $\mathbb{R}^2$ ) takové, že  $\Phi(D) = S$  a existuje rozdělení oblasti  $D$  na regulární uzavřené oblasti  $D_1, \dots, D_m$  tak, že platí



- (1)  $\Phi$  je prosté regulární zobrazení na  $G = \bigcup_{i=1}^m D_i^0$ ,
- (2)  $\Phi$  zobrazuje  $\bigcup_{i=1}^m \partial D_i$  na množinu  $C \subset S$ , která je disjunktní s  $\Phi(G)$  a je sjednocením konečného počtu po částech hladkých křivek.

To znamená, že předpoklady prostého zobrazení a regularity parametrizace  $\Phi$  mohou být porušeny na konečném počtu křivek, tedy na nulové množině, která nebude mít vliv na hodnotu integrálu přes danou plochu.

U některých ploch, jako je např. povrch mnohostěnu, plášť jehlanu apod., je lépe rozložit tyto plochy na listy (ve jmenovaných případech na mnohoúhelníky) a tyto listy parametrizovat zvlášť. U jiných ploch, jako je např. kulová plocha, anuloid („pneumatika“) aj., lze pochopitelně udělat totéž, bylo by to však zbytečně komplikované.

**Příklad 5.16.** Kulová plocha  $S$  se středem v počátku a poloměrem  $R$ ,

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = R^2\},$$

se dá rozložit na listy různým způsobem.

Jedna možnost rozkladu plochy  $S$  na listy je tato: Do vnitřku kulové plochy  $S$  umístíme krychli se středem v počátku  $O$  a pak každou stěnu krychle promítneme z  $O$  na  $S$ . Avšak danou kulovou plochu  $S$  můžeme popsat parametrickými rovnicemi

$$\begin{aligned} x &= R \cos u \sin v \\ y &= R \sin u \sin v \\ z &= R \cos v, \end{aligned}$$

kde  $(u, v) \in \langle 0, 2\pi \rangle \times \langle 0, \pi \rangle$  ( $u, v$  jsou sférické souřadnice). Parametrizace

$$\Phi(u, v) = (R \cos u \sin v, R \sin u \sin v, R \cos v) : \langle 0, 2\pi \rangle \times \langle 0, \pi \rangle \rightarrow \mathbb{R}^3$$

je sice dokonce třídy  $C_\infty$ , je však prostá a regulární pouze na vnitřku obdélníku  $D = \langle 0, 2\pi \rangle \times \langle 0, \pi \rangle$ . Snadno spočítáme, že

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Phi}{\partial u} \times \frac{\partial \Phi}{\partial v} &= -R^2 \sin v (\cos u \sin v, \sin u \sin v, \cos v), \\ \left| \frac{\partial \Phi}{\partial u} \times \frac{\partial \Phi}{\partial v} \right| &= R^2 \sin v, \end{aligned}$$

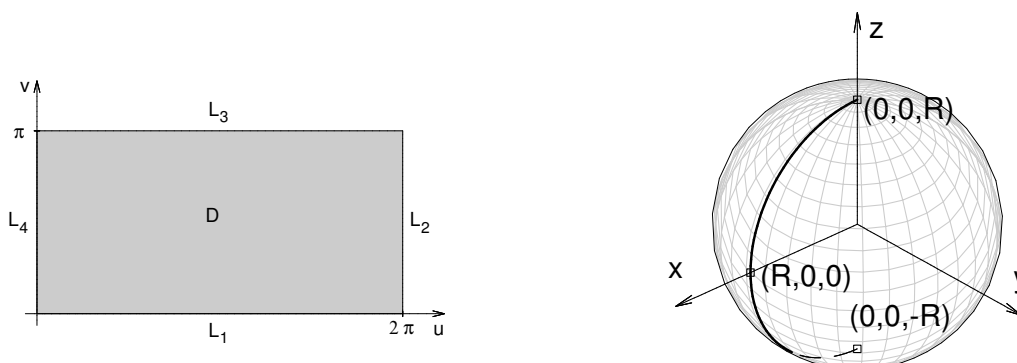
takže právě jen pro  $v \in (0, \pi)$  je  $\frac{\partial \Phi}{\partial u} \times \frac{\partial \Phi}{\partial v} \neq 0$ . Vadí nám tedy body, pro něž  $v = 0$ ,  $v = \pi$ , tj. body  $(0, 0, R)$ ,  $(0, 0, -R)$ ; parametrizace  $\Phi$  není prosté zobrazení pro  $u = 0$ ,  $u = 2\pi$ . Předpoklady prostého a regulárního zobrazení  $\Phi$  jsou porušeny na hranici  $\partial D$ . Hranice

$$\partial D = L_1 \cup L_2 \cup L_3 \cup L_4,$$

kde

$$\begin{aligned} L_1 &= \langle 1, 2\pi \rangle \times \{0\}, & L_3 &= \langle 0, 2\pi \rangle \times \{\pi\}, \\ L_2 &= \{2\pi\} \times \langle 0, \pi \rangle, & L_4 &= \{0\} \times \langle 0, \pi \rangle, \end{aligned}$$

se zobrazí zobrazením  $\Phi$  na polokružnici  $C \subset S$  s krajními body  $(0, 0, -R)$ ,  $(0, 0, R)$  procházející bodem  $(R, 0, 0)$ . Přitom  $\Phi(D^0) = S - C$ . Vyhovuje tedy  $\Phi$  definici (5.15) (viz obrázky).



Označíme-li  $\mathcal{E}(S)$  množinu všech stupňovitých funkcí na  $S$ , má  $\mathcal{E}(S)$  a integrál funkcí z  $\mathcal{E}(S)$  tytéž základní vlastnosti jako v případě neorientovaného křivkového integrálu z těchto funkcí.

Analogickým způsobem pak definujeme množiny  $\bar{\mathcal{E}}(S)$ ,  $\bar{\mathcal{L}}(S)$ ,  $\mathcal{L}(S)$  a postupně rozšíříme integrál stupňovitých funkcí na integrál funkcí z těchto množin limitním procesem a odčítáním. Takto vybudovaný integrál nazveme *neorientovaným plošným integrálem na  $S$* .

Integrál funkce  $f : S \rightarrow \mathbb{R}$  přes množinu  $M \subset S$  definujeme vztahem

$$\iint_M f \, dS = \iint_S f \chi_M \, dS,$$

existuje-li integrál vpravo ( $\chi_M$  je charakteristická funkce množiny  $M$ ).

Plošný integrál úzce souvisí s dvojným integrálem. Jelikož rovinu  $\mathbb{R}^2$  můžeme uvažovat jako podprostor prostoru  $\mathbb{R}^3$ , pak je-li  $S$  rovinná plocha, tj.  $S \subset \mathbb{R}^2$ , je  $\iint_S f \, dS$  totožný s dvojným integrálem  $\iint_S f \, d\nu_2$ , neboť pro list  $B \subset \mathbb{R}^2$  je  $\omega(B) = \nu_2(B)$ .

Vlastnosti neorientovaného plošného integrálu jsou stejné jako vlastnosti  $n$ -rozměrného integrálu v  $\mathbb{R}^n$ . Tak např. platí věta:

**Věta 5.17.** *Je-li  $(B_1, \dots, B_k)$  rozklad  $S$ , pak*

$$\iint_S f \, dS = \sum_{i=1}^k \iint_{B_i} f \, dS, \quad (5.5)$$

*má-li alespoň jedna strana smysl.*

Uvedme ještě postačující podmínku konvergence plošného integrálu, se kterou v praxi vystačíme:

**Věta 5.18.** *Nechť  $N \subset S$  je nulová množina na  $S$  a nechť  $f$  je spojitá na  $S \setminus N$  a ohraničená. Pak  $\iint_S f \, dS$  konverguje.*

## Výpočet neorientovaného plošného integrálu

Vzorec (5.5) ukazuje, že k výpočtu plošného integrálu přes plochu  $S$  stačí umět počítat integrál přes listy. Nechť  $B \subset \mathbb{R}^3$  je list,  $\Phi : D \rightarrow \mathbb{R}^3$  jeho parametrizace.

Nechť  $f : B \rightarrow \mathbb{R}^3$  je stupňovitá funkce taková, že  $f$  nabývá hodnotu  $a_i$  na vnitřku listu  $B_i$ ,  $i = 1, \dots, k$ , kde  $(B_1, \dots, B_k)$  je rozklad plochy  $B$ . Pak  $\Phi(D_i) = B_i$ ,  $i = 1, \dots, k$ , kde  $D_i$  je regulární oblast a  $(D_1, \dots, D_k)$  tvoří rozklad (rozdělení) oblasti  $D$  na podoblasti. Restrikce  $\Phi_i = \Phi|_{D_i}$  je parametrizace listu  $B_i$ ,  $i = 1, \dots, k$ . Je přitom (viz (5.3))

$$\omega(B_i) = \iint_{D_i} \left| \frac{\partial \Phi_i}{\partial u} \times \frac{\partial \Phi_i}{\partial v} \right| \, dudv = \iint_{D_i} \left| \frac{\partial \Phi}{\partial u} \times \frac{\partial \Phi}{\partial v} \right| \, dudv.$$

Potom

$$\iint_B f \, dS = \sum_{i=1}^k a_i \iint_{D_i} \left| \frac{\partial \Phi}{\partial u} \times \frac{\partial \Phi}{\partial v} \right| \, dudv = \sum_{i=1}^k \iint_{D_i} a_i \left| \frac{\partial \Phi}{\partial u} \times \frac{\partial \Phi}{\partial v} \right| \, dudv. \quad (5.6)$$

Pro  $(u, v) \in D_i^0$  je  $\Phi(u, v)$  vnitřním bodem listu  $B_i$ , takže  $f(\Phi(u, v)) = a_i$ . Můžeme proto (5.6) psát ve tvaru

$$\iint_B f \, dS = \sum_{i=1}^k \iint_{D_i} f(\Phi(u, v)) \left| \frac{\partial \Phi}{\partial u} \times \frac{\partial \Phi}{\partial v} \right| \, dudv = \iint_D f(\Phi(u, v)) \left| \frac{\partial \Phi}{\partial u} \times \frac{\partial \Phi}{\partial v} \right| \, dudv.$$

Platí tedy pro stupňovitou funkci  $f$  na  $B$  vzorec

$$\iint_B f \, dS = \iint_D f(\Phi(u, v)) \left| \frac{\partial \Phi}{\partial u} \times \frac{\partial \Phi}{\partial v} \right| \, dudv, \quad (5.7)$$

kde  $\Phi : D \rightarrow \mathbb{R}^3$  je parametrizace  $B$ .

Limitním procesem a použitím linearit integrálu zjistíme, že (5.7) platí pro každou integrovatelnou funkci  $f$  na  $B$  a naopak, konverguje-li dvojný integrál v (5.7), je  $f$  integrovatelná na  $B$  a platí (5.7). Přitom pro konvergenci tohoto dvojného integrálu je nutné a stačí, aby funkce  $f \circ \Phi$  byla integrovatelná na  $D$ .

**Věta 5.19.** *Nechť  $B$  je list,  $\Phi : D \rightarrow \mathbb{R}^3$  jeho parametrizace. Pak  $f$  je integrovatelná na  $B$ , právě když  $f \circ \Phi$  je integrovatelná na  $D$ . Přitom platí vzorec (5.7).*

Je-li  $B$  graf funkce  $g : D \rightarrow \mathbb{R}$  třídy  $C_1$ ,  $B = \{(x, y, z) : z = g(x, y), (x, y) \in D\}$  a zvolíme-li parametrizaci  $\Phi(u, v) = (u, v, g(u, v))$ ,  $(u, v) \in D$  (tedy  $x = u, y = v, z = g(u, v)$ ), pak jako speciální případ vzorce (5.7) dostaneme (píšeme-li místo proměnných

$u, v$  proměnné  $x, y$ )

$$\iint_B f \, dS = \iint_D f(x, y, g(x, y)) \sqrt{1 + \left(\frac{\partial g}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial g}{\partial y}\right)^2} \, dx dy. \quad (5.8)$$

Integrál  $\iint_B f \, dS$  lze rovněž definovat přímo vzorcem (5.7). V tom případě je třeba ukázat, že hodnota integrálu nezávisí na volbě parametrizace listu  $B$ . To lze dokázat použitím věty o substituci v dvojném integrálu.

**Příklad 5.20.** Vypočtěte  $\iint_S z \cdot \sqrt{x^2 + y^2} \, dS$ , kde  $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = R^2, z \geq 0\}$ .

**Řešení.** Zvolme parametrické rovnice

$$\begin{aligned} \Phi : \quad x &= R \cos u \sin v \\ y &= R \sin u \sin v \quad , \quad (u, v) \in \langle 0, 2\pi \rangle \times \langle 0, \frac{\pi}{2} \rangle. \\ z &= R \cos v \end{aligned}$$

$$\text{Tedy} \quad \Phi(u, v) = (R \cos u \sin v, R \sin u \sin v, R \cos v),$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial u} = (-R \sin u \sin v, R \cos u \sin v, 0)$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial v} = (R \cos u \cos v, R \sin u \cos v, -R \sin v)$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial u} \times \frac{\partial \Phi}{\partial v} = (-R^2 \cos u \sin^2 v, -R^2 \sin u \sin^2 v, -R^2 \sin v \cos v)$$

$$\left| \frac{\partial \Phi}{\partial u} \times \frac{\partial \Phi}{\partial v} \right| = \sqrt{R^4 \sin^4 v \cdot (\cos^2 u + \sin^2 u) + R^4 \sin^2 v \cos^2 v} = R^2 \sin v$$

$$z \cdot \sqrt{x^2 + y^2} = R \cos v \cdot \sqrt{R^2 \cos^2 u \sin^2 v + R^2 \sin^2 u \sin^2 v} = R^2 \cos v \sin v$$

Tedy

$$\iint_S z \cdot \sqrt{x^2 + y^2} \, dS = \int_0^{2\pi} \left( \int_0^{\frac{\pi}{2}} R^4 \cos v \sin^2 v \, dv \right) du = \frac{2}{3} \pi R^4.$$

□

## 5.2 Orientovaný plošný integrál

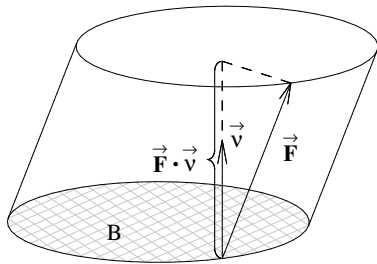
Nechť  $\mathbf{B} = (B, \vec{\nu})$  je orientovaný list. Orientovaný list  $\mathbf{B}_1 = (B_1, \vec{\nu}_1)$  nazveme *částí orientovaného listu*  $\mathbf{B}$ , jestliže  $B_1 \subset B$  a jestliže orientující normálové pole (orientace)  $\vec{\nu}_1$  je restrikce orientace  $\vec{\nu}$ , tj.  $\vec{\nu}_1 = \vec{\nu}|_{B_1}$ .

Řekneme, že orientovaný list  $\mathbf{B}$  je součtem orientovaných listů  $\mathbf{B}_1, \dots, \mathbf{B}_k$ , a píšeme  $\mathbf{B} = \mathbf{B}_1 + \dots + \mathbf{B}_k$ , je-li  $\{B_1, \dots, B_k\}$  rozklad listu  $B$  a je-li každý orientovaný list  $\mathbf{B}_i$  částí  $\mathbf{B}$ . Zřejmě pak  $-\mathbf{B} = (-\mathbf{B}_1) + \dots + (-\mathbf{B}_k)$ .

Než přistoupíme k definici orientovaného plošného integrálu, vyjdeme z jisté fyzikální situace.

Představme si, že část  $G$  prostoru  $\mathbb{R}^3$  je vyplněna nestlačitelnou proudící kapalinou, přičemž rychlost každé částice je určena pouze její polohou a nezávisí na čase. V takovém případě mluvíme o *ustáleném proudění kapaliny*.

Nechť pole  $\vec{\mathbf{F}} = (F_1, F_2, F_3)$  je pole rychlostí tohoto proudění, tj pro  $p \in G$  je  $\vec{\mathbf{F}}(p)$  vektor rychlosti proudění v bodě  $p$ . Vzniká otázka, jaké množství kapaliny proteče za jednotku času kusem plochy (listem) ve směru zvolené orientace.



Předpokládejme zprvu, že pole  $\vec{\mathbf{F}}$  je konstantní a orientovaný list  $\mathbf{B} = (B, \vec{\mathcal{V}})$  je rovinný (viz obrázek). Pak kapalina, která proteče plochou  $B$  za jednotku času, vyplní válec o základně  $B$  velikosti  $\omega(B)$  a výšce  $\vec{\mathbf{F}} \cdot \vec{\mathcal{V}}$ , jež je průmětem vektoru  $\vec{\mathbf{F}}$  do směru  $\vec{\mathcal{V}}$  (je-li  $\vec{\mathbf{F}} \cdot \vec{\mathcal{V}} < 0$ , znamená to ovšem to, že kapalina protéká opačným směrem než tím, kterým byla určena strana plochy).

Je tedy množství kapaliny, které proteče za jednotku času orientovaným listem  $(B, \vec{\mathcal{V}})$ , rovno veličině

$$Q = (\vec{\mathbf{F}} \cdot \vec{\mathcal{V}}) \omega(B).$$

Nechť nyní  $\mathbf{B} = (B, \vec{\mathcal{V}})$  je libovolný orientovaný list a  $\vec{\mathbf{F}}$  spojitě vektorové pole definované na  $B$ . Rozdělme  $\mathbf{B}$  na malé orientované části (listy)  $\mathbf{B}_1, \dots, \mathbf{B}_k$  tak, že

$$\mathbf{B} = \mathbf{B}_1 + \dots + \mathbf{B}_k.$$

Bude-li toto rozdělení dostatečně jemné, můžeme považovat každý list  $B_i$  přibližně za rovinný a orientaci  $\vec{\mathcal{V}}$  na každém  $B_i$  za konstantní vektor. Také pole  $\vec{\mathbf{F}}$  můžeme na každém  $B_i$  považovat přibližně za konstantní, tj. můžeme je nahradit polem  $\vec{\mathbf{F}}_i = \vec{\mathbf{F}}(p_i)$ , kde  $p_i \in B_i^0$ .

Množství kapaliny, které proteče za jednotku času částí  $B_i$ , je tedy přibližně rovno číslu  $\vec{\mathbf{F}}(p_i) \cdot \vec{\mathcal{V}}(p_i) \omega(B_i)$ , a celkové množství  $Q$  kapaliny, které proteče za jednotku času orientovaným listem  $(B, \vec{\mathcal{V}})$ , je přibližně rovno

$$Q = \sum_{i=1}^k \vec{\mathbf{F}}(p_i) \cdot \vec{\mathcal{V}}(p_i) \omega(B_i). \quad (5.9)$$

Součet vpravo bude tím přesněji určovat množství kapaliny proteklé za jednotku času listem  $\mathbf{B}$ , čím jemnější bude dělení listu  $\mathbf{B}$  na části.

Součet (5.9) je integrální součet pro plošný integrál

$$\iint_B (\vec{\mathbf{F}} \cdot \vec{\mathcal{V}}) \, dS. \quad (5.10)$$

Na součet (5.9) lze pohlížet jako na plošný integrál  $\iint_B h \, dS$ , kde  $h$  je stupňovitá funkce nabývající na  $B_i^0$  hodnotu  $\vec{\mathbf{F}}(p_i) \cdot \vec{\mathcal{V}}(p_i)$ . Limitním procesem (zvolíme-li posloupnost zjemňujících se dělení tak, že průměry listů  $B_i$  konvergují k nule) dostaneme, že součty (5.9) konvergují k integrálu (5.10)

**Definice 5.21.** Orientovaným plošným integrálem pole  $\vec{\mathbf{F}}$  přes orientovaný list  $\mathbf{B} = (B, \vec{\mathcal{V}})$  nazýváme integrál

$$\iint_{\mathbf{B}} \vec{\mathbf{F}} \cdot d\vec{\mathbf{S}} = \iint_B (\vec{\mathbf{F}} \cdot \vec{\mathcal{V}}) \, dS, \quad (5.11)$$

existuje-li integrál vpravo. Integrál (5.11) nazýváme *tokem vektorového pole  $\vec{\mathbf{F}}$  orientovanou plochou  $\mathbf{B}$* .

Termín „tok pole“, který byl převzat z hydromechaniky, se používá nejen pro pole rychlostí proudění kapaliny, ale pro jakákoliv fyzikální vektorová pole; je-li tedy např.  $\vec{\mathbf{F}}$  elektrostatické pole, mluvíme o toku elektrostatického pole orientovanou plochou atp.

Protože orientovaný integrál jsme vztahem (5.11) definovali pomocí neorientovaného integrálu, *plynou vlastnosti orientovaného integrálu z vlastností neorientovaného integrálu*.

Jelikož opačně orientovaný list  $-\mathbf{B}$  má orientaci  $-\vec{\mathcal{V}}$ , platí

$$\iint_{-\mathbf{B}} \vec{\mathbf{F}} \cdot d\vec{\mathbf{S}} = \iint_B (\vec{\mathbf{F}} \cdot (-\vec{\mathcal{V}})) \, dS = - \iint_B (\vec{\mathbf{F}} \cdot \vec{\mathcal{V}}) \, dS = - \iint_{\mathbf{B}} \vec{\mathbf{F}} \cdot d\vec{\mathbf{S}}.$$

Tedy

$$\iint_{-\mathbf{B}} \vec{\mathbf{F}} \cdot d\vec{\mathbf{S}} = - \iint_{\mathbf{B}} \vec{\mathbf{F}} \cdot d\vec{\mathbf{S}}. \quad (5.12)$$

Dále platí:

Je-li  $\mathbf{B} = \mathbf{B}_1 + \dots + \mathbf{B}_k$ , je

$$\iint_{\mathbf{B}} \vec{\mathbf{F}} \cdot d\vec{\mathbf{S}} = \iint_{\mathbf{B}_1} \vec{\mathbf{F}} \cdot d\vec{\mathbf{S}} + \dots + \iint_{\mathbf{B}_k} \vec{\mathbf{F}} \cdot d\vec{\mathbf{S}}. \quad (5.13)$$

Tento vzorec vyjadřuje *aditivitu toku vektorového pole*.

Výpočet orientovaného plošného integrálu lze provést převedením na neorientovaný plošný integrál.

Nechť  $\Phi : D \rightarrow \mathbb{R}^3$  je parametrizace orientovaného listu  $\mathbf{B} = (B, \vec{\mathcal{V}})$  souhlasná s orientací  $\vec{\mathcal{V}}$ . Pro  $p = \Phi(u, v)$ ,  $(u, v) \in D$ , je

$$\vec{\mathcal{V}}(p) = \frac{\frac{\partial \Phi}{\partial u}(u, v) \times \frac{\partial \Phi}{\partial v}(u, v)}{\left| \frac{\partial \Phi}{\partial u}(u, v) \times \frac{\partial \Phi}{\partial v}(u, v) \right|},$$

takže

$$\left(\vec{\mathbf{F}} \cdot \vec{\nu}\right)(p) = \vec{\mathbf{F}}(p) \cdot \vec{\nu}(p) = \vec{\mathbf{F}}(\Phi(u, v)) \cdot \frac{\frac{\partial \Phi}{\partial u} \times \frac{\partial \Phi}{\partial v}}{\left|\frac{\partial \Phi}{\partial u} \times \frac{\partial \Phi}{\partial v}\right|}(u, v).$$

Odtud

$$\begin{aligned} \iint_B \left(\vec{\mathbf{F}} \cdot \vec{\nu}\right) dS &= \iint_D \left(\vec{\mathbf{F}} \circ \Phi\right) \cdot \frac{\frac{\partial \Phi}{\partial u} \times \frac{\partial \Phi}{\partial v}}{\left|\frac{\partial \Phi}{\partial u} \times \frac{\partial \Phi}{\partial v}\right|} \left|\frac{\partial \Phi}{\partial u} \times \frac{\partial \Phi}{\partial v}\right| dudv = \\ &= \iint_D \left(\vec{\mathbf{F}} \circ \Phi\right) \cdot \left(\frac{\partial \Phi}{\partial u} \times \frac{\partial \Phi}{\partial v}\right) dudv. \end{aligned}$$

Máme tedy vzorec

$$\iint_{\mathbf{B}} \vec{\mathbf{F}} \cdot d\vec{\mathbf{S}} = \iint_D \left(\vec{\mathbf{F}} \circ \Phi\right) \cdot \left(\frac{\partial \Phi}{\partial u} \times \frac{\partial \Phi}{\partial v}\right) dudv. \quad (5.14)$$

Jestliže parametrizace  $\Phi$  nesouhlasí s orientací listu  $\mathbf{B}$ , musíme (podle vzorce (5.12)) vzít na pravé straně dvojný integrál s opačným znaménkem.

Integrovaná funkce ve dvojném integrálu na pravé straně vzorce (5.14) je smíšený součin. Je-li  $\vec{\mathbf{F}} = (F_1, F_2, F_3)$ ,  $\Phi = (\Phi_1, \Phi_2, \Phi_3)$ , je (podle pravidla pro výpočet smíšeného součinu)

$$\iint_{\mathbf{B}} \vec{\mathbf{F}} \cdot d\vec{\mathbf{S}} = \iint_D \begin{vmatrix} (F_1 \circ \Phi) & \frac{\partial \Phi_1}{\partial u} & \frac{\partial \Phi_1}{\partial v} \\ (F_2 \circ \Phi) & \frac{\partial \Phi_2}{\partial u} & \frac{\partial \Phi_2}{\partial v} \\ (F_3 \circ \Phi) & \frac{\partial \Phi_3}{\partial u} & \frac{\partial \Phi_3}{\partial v} \end{vmatrix} dudv. \quad (5.15)$$

Poslední dva sloupce determinantu jsou sloupce Jacobiovy matice  $\Phi'$ . Rozvedeme-li determinant podle prvního sloupce, dostaneme

$$\iint_{\mathbf{B}} \vec{\mathbf{F}} \cdot d\vec{\mathbf{S}} = \iint_D \left( (F_1 \circ \Phi) D(\Phi_2, \Phi_3) + (F_2 \circ \Phi) D(\Phi_3, \Phi_1) + (F_3 \circ \Phi) D(\Phi_1, \Phi_2) \right) dudv, \quad (5.16)$$

kde  $D(\Phi_i, \Phi_j)$ ,  $i \neq j$ ,  $i, j = 1, 2, 3$ , jsou Jakobiány souřadnic  $\Phi_i, \Phi_j$ , tj.

$$D(\Phi_i, \Phi_j) = \begin{vmatrix} \frac{\partial \Phi_i}{\partial u} & \frac{\partial \Phi_i}{\partial v} \\ \frac{\partial \Phi_j}{\partial u} & \frac{\partial \Phi_j}{\partial v} \end{vmatrix}.$$

Orientovaný plošný integrál  $\iint_{\mathbf{B}} \vec{\mathbf{F}} \cdot d\vec{\mathbf{S}}$  se ve složkovém tvaru zapisuje následovně:

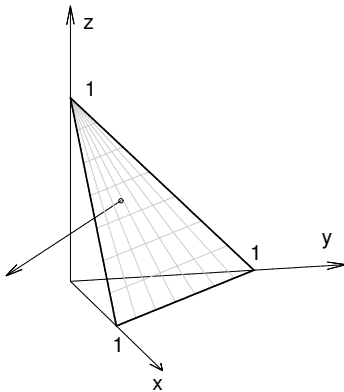
$$\iint_{\mathbf{B}} \vec{\mathbf{F}} \cdot d\vec{\mathbf{S}} = \iint_{\mathbf{B}} F_1 dydz + F_2 dzdx + F_3 dxdy, \quad (5.17)$$

kde výrazy  $dydz, dzdx, dxdy$  jsou tzv. vnější součiny diferenciálů  $dx, dy, dz$  a výraz za symbolem  $\iint_{\mathbf{B}}$  v (5.17) je tzv. diferenciální forma druhého stupně.

**Příklad 5.22.** Vypočítejte tok  $Q$  vektorového pole  $\vec{\mathbf{F}} = (x - y, y - z, z - x + 1)$  orientovaným trojúhelníkem  $B$  o vrcholech  $(1, 0, 0)$ ,  $(0, 1, 0)$ ,  $(0, 0, 1)$ . Orientující normálový vektor směřuje k počátku (viz obrázek).

**Řešení.** V našem případě je tedy

$$B = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + y + z = 1, x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0\}.$$



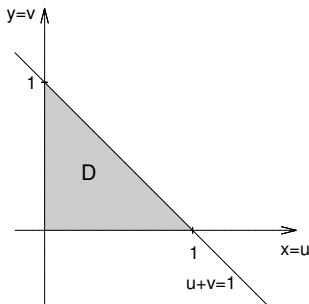
$$\begin{aligned} \text{Zvolme } \Phi : \quad x &= u \\ y &= v \\ z &= 1 - u - v \end{aligned} \quad (u, v) \in D,$$

$$\text{kde } D = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 : u + v \leq 1, u \geq 0, v \geq 0\}$$

(viz další obrázek).

Odtud je zřejmé, že  $u \in \langle 0, 1 \rangle$ ,  $v \in \langle 0, 1 - u \rangle$ .

Parametrizace  $\Phi(u, v) = (u, v, 1 - u - v)$ ,



$$\begin{aligned} \frac{\partial \Phi}{\partial u} &= (1, 0, -1) \\ \frac{\partial \Phi}{\partial v} &= (0, 1, -1) \\ \frac{\partial \Phi}{\partial u} \times \frac{\partial \Phi}{\partial v} &= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} = (1, 1, 1). \end{aligned}$$

Zvolená parametrizace je tedy nesouhlasná se zadanou orientací, neboť vypočtená normála má opačný směr než zadaná orientující normála.

$$\left( \vec{\mathbf{F}} \circ \Phi \right) (u, v) = \vec{\mathbf{F}} (\Phi(u, v)) = \vec{\mathbf{F}} (u, v, 1 - u - v) = (u - v, u + 2v - 1, 2 - 2u - v)$$

$$Q = - \iint_D (u - v, u + 2v - 1, 2 - 2u - v) \cdot (1, 1, 1) \, du \, dv = - \int_0^1 \left( \int_0^{1-u} dv \right) du = -\frac{1}{2}.$$

Uvedený příklad můžeme vypočítat i přímo z definičního vzorce (5.11). Platí totiž, že  $\vec{\nu} = -\frac{1}{\sqrt{3}}(1, 1, 1)$ , tedy

$$\left( \vec{\mathbf{F}} \cdot \vec{\nu} \right) (x, y, z) = -\frac{1}{\sqrt{3}}(x - y, y - z, z - x + 1) \cdot (1, 1, 1) = -\frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Odtud

$$\iint_B \vec{\mathbf{F}} \cdot d\vec{\mathbf{S}} = \iint_B \left( \vec{\mathbf{F}} \cdot \vec{\nu} \right) dS = -\frac{1}{\sqrt{3}} \iint_B dS = -\frac{1}{\sqrt{3}} \omega(B),$$

kde  $\omega(B)$  je v našem případě obsah trojúhelníka  $B$ , který se dá stanovit elementárně.  $\square$



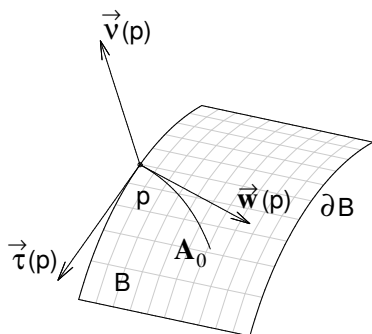
S orientovanými plošnými integrály přes orientované listy bychom v aplikacích nevy-  
stačili.

V dalším výkladu se omezíme na *jednoduše souvislé listy*, tj. takové listy, jejichž pa-  
rametrizace jsou definovány na jednoduše souvislých uzavřených regulárních oblastech.  
Okraj takového listu je jednoduchá uzavřená křivka. Vícenásobně souvislé listy lze vždy  
rozdělit na jednoduše souvislé listy.

Orientovanou hranici uzavřené regulární oblasti  $D \subset \mathbb{R}^2$  označme  $\partial D$ . U listů (a poz-  
ději i ploch) bude značit  $\partial B$  neorientovaný okraj,  $\partial \mathbf{B}$  orientovaný okraj, ať už jde o  
neorientovaný list  $B$ , či orientovaný list  $\mathbf{B}$ .

**Definice 5.23.** Nechť  $p$  je regulární bod okraje  $\partial B$  listu  $B$  (tj.  $p$  je vnitřním bodem  
některého oblouku  $A \subset \partial B$ ). *Vnitřním tečným vektorem*  $\vec{w}(p)$  listu  $B$  v bodě  $p$  nazveme  
vektor, pro který platí:

- 1) je tečným vektorem v bodě  $p$  orientovaného oblouku  $\mathbf{A}_0$ , který leží na listu  $B$   
a má počáteční bod  $p$ .
- 2) Není kolineární s tečným vektorem okraje  $\partial B$  v bodě  $p$  (viz obrázek).



Nechť nyní  $\mathbf{B}$  je orientovaný list,  $\vec{v}$  jeho orientace.  
Nechť  $\partial \mathbf{B}$  je orientovaný okraj s orientujícím teč-  
ným vektorem  $\vec{\tau}$ , pak řekneme, že *okraj  $\partial \mathbf{B}$  je  
souhlasně orientován s listem  $\mathbf{B}$* , jestliže pro libo-  
volný regulární bod okraje  $\partial \mathbf{B}$  platí:

Trojice vektorů  $(\vec{\tau}(p), \vec{w}(p), \vec{v}(p))$  určuje tu-  
též orientaci prostoru  $\mathbb{R}^3$  jako standardní báze  
 $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ , tj. platí  $(\vec{\tau}(p) \times \vec{w}(p)) \cdot \vec{v}(p) > 0$ .

Názorně si můžeme souhlasnou orientaci okraje představit takto:

„Dáme-li palec pravé ruky ve směru zadaného orientujícího normálového vektoru ori-  
entovaného listu  $\mathbf{B}$ , pak prsty ukazují směr orientace okraje  $\partial \mathbf{B}$ .“

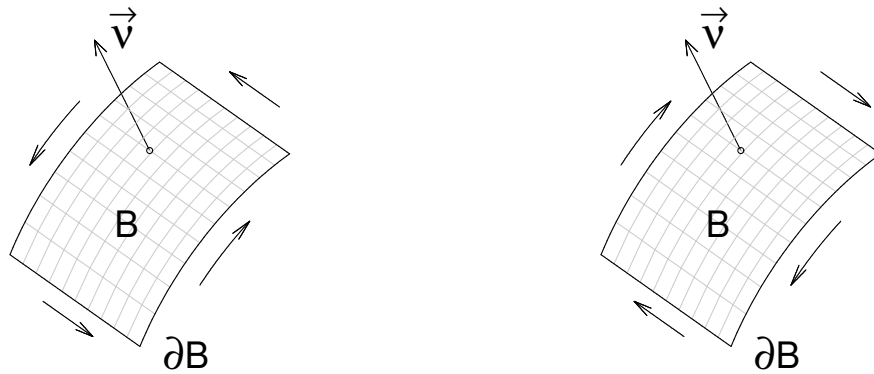
**Definice 5.24.** Řekneme, že orientované listy  $\mathbf{B}_1, \mathbf{B}_2$ , které jsou přilehlé podél oblouku  
 $C$ , jsou *souhlasně orientované (koorientované)*, jestliže pro okraje  $\partial \mathbf{B}_1, \partial \mathbf{B}_2$  souhlasně  
orientované s listy  $\mathbf{B}_1, \mathbf{B}_2$  platí:

Je-li orientovaný oblouk  $C$  částí okraje  $\partial \mathbf{B}_1$ , je orientovaný oblouk  $-C$  částí okraje  
 $\partial \mathbf{B}_2$ .

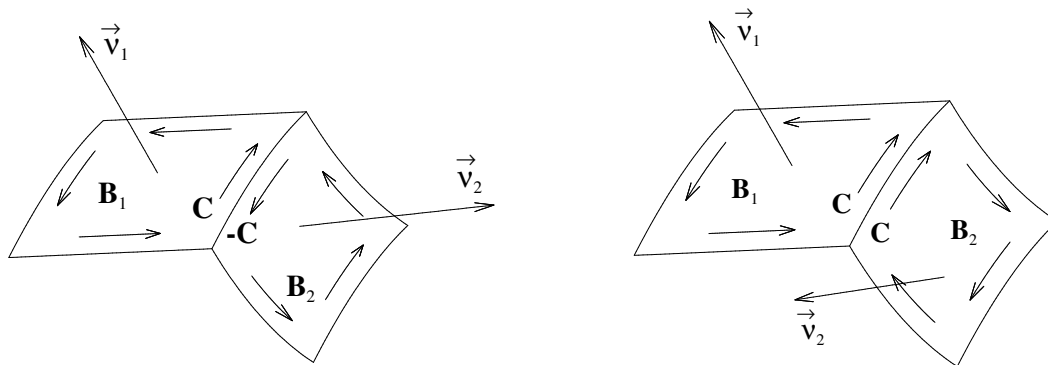
Na obrázku (5.3) jsou přilehlé listy  $\mathbf{B}_1, \mathbf{B}_2$  souhlasně orientované, na obr. (5.4) jsou  
přilehlé listy  $\mathbf{B}'_1, \mathbf{B}'_2$  nesouhlasně orientované.

**Definice 5.25.** Říkáme, že plocha  $S$  je *orientovatelná*, existují-li orientované listy  
 $\mathbf{B}_1, \dots, \mathbf{B}_k$  tak, že platí:

- (1)  $\{B_1, \dots, B_k\}$  je rozklad plochy  $S$ ,
- (2) každé dva přilehlé listy  $\mathbf{B}_i, \mathbf{B}_j$  jsou souhlasně orientované.



Obr. 5.1: Souhlasná orientace okraje  $\partial\mathbf{B}$  s listem  $\mathbf{B}$       Obr. 5.2: Nesouhlasná orientace okraje  $\partial\mathbf{B}$  s listem  $\mathbf{B}$



Obr. 5.3: Souhlasně orientované přilehlé listy      Obr. 5.4: Nesouhlasně orientované přilehlé listy

Řekneme pak, že  $S$  má *orientovaný rozklad*

$$\{\mathbf{B}_1, \dots, \mathbf{B}_k\}. \quad (5.18)$$

**Definice 5.26.** Nechť  $S$  je orientovatelná plocha s orientovaným rozkladem (5.18). Nechť orientace listu  $\mathbf{B}_i$  je  $\vec{\nu}_i$ . Definujme vektorové pole  $\vec{\nu} : S \rightarrow V(\mathbb{R}^3)$  tak, že položíme

$$\vec{\nu}(p) = \vec{\nu}_i(p) \quad \text{pro } p \in B_i^0 \quad (i = 1, \dots, k)$$

a v ostatních bodech (které jsou krajními body listů  $B_i$ ) definujme  $\vec{\nu}$  takto: Buď definujeme (je-li to možné)  $\vec{\nu}(p)$  tak, aby  $\vec{\nu}$  bylo v bodě  $p$  spojitě; není-li to možné (v případě, že  $p$  je singulární bod, kdy se plocha v okolí bodu „láme“ nebo má v bodě „hrot“), definujeme  $\vec{\nu}(p) = \mathbf{o}$ . Pole  $\vec{\nu}$  nazveme *orientací plochy  $S$  indukovanou orientovaným rozkladem (5.18)* a dvojici  $(S, \vec{\nu})$  nazveme *orientovanou plochou*. Dvojici  $(S, -\vec{\nu})$  nazveme *opačně orientovanou plochou* k  $(S, \vec{\nu})$ . Označíme-li dále  $(S, \vec{\nu})$  znakem  $\mathbf{S}$ , označíme  $(S, -\vec{\nu})$

znakem  $-\mathbf{S}$ . Tu okolnost, že orientovaný rozklad (5.18) určuje orientaci plochy  $\mathbf{S}$ , vyjádříme zápisem

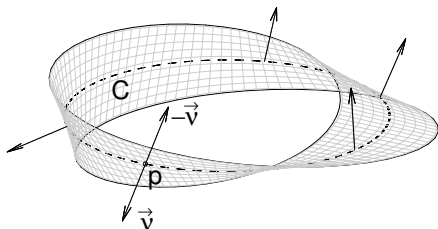
$$\mathbf{S} = \mathbf{B}_1 + \cdots + \mathbf{B}_k.$$

Jsou-li  $\{\mathbf{B}_1, \dots, \mathbf{B}_k\}$ ,  $\{\mathbf{B}'_1, \dots, \mathbf{B}'_m\}$  dva orientované rozklady orientovatelné plochy  $S$  a jsou-li  $\vec{\nu}$ ,  $\vec{\nu}'$  orientace plochy  $S$  indukované těmito rozklady, lze dokázat, že platí

$$\vec{\nu} = \vec{\nu}' \quad \text{nebo} \quad \vec{\nu} = -\vec{\nu}'.$$

Orientovatelná plocha  $S$  má tedy pouze dvě možné orientace, říkáme, že je *dvoustranná*. Plochy, které nejsou orientovatelné, se nazývají *jednostranné*. Takové plochy existují.

Příkladem takové plochy je *Möbiova plocha (Möbiův list)*, viz obrázek.



Zvolíme-li v bodě  $p$  normálový vektor  $\vec{\nu}(p)$  a bude-li se nyní bod  $q$  pohybovat po  $C$  od bodu  $p$  do bodu  $p' = p$ , bude se normálový vektor spojitě měnit, avšak v bodě  $p'$  přejde ve vektor  $-\vec{\nu}(p)$ . To u hladkých ploch dvoustranných, jako je např. kulová plocha, není možné (Möbiův list je ovšem rovněž hladká plocha).

Je-li  $\mathbf{S}$  orientovaná plocha,  $\mathbf{S} = (S, \vec{\nu})$ , a má-li  $S$  okraj  $\partial S$ , který se skládá z jedné nebo z několika jednoduchých uzavřených křivek (navzájem disjunktních), lze definovat souhlasnou orientaci okraje  $\partial \mathbf{S}$  s plochou  $\mathbf{S}$  tak, jak jsme to udělali nedávno pro listy. Stačí si uvědomit, že každý oblouk okraje  $\partial S$  je obloukem okraje některého listu rozkladu  $S$  nebo může být na takové oblouky rozdělen.

**Tvrzení.** *Uzavřená plocha  $S$  je vždy orientovatelná.*

Nechť  $\{B_1, \dots, B_k\}$  je rozklad plochy  $S$ . Platí věta

**Tvrzení.** *Jednoduchá uzavřená plocha  $S$  rozděluje prostor  $\mathbb{R}^3$  na dvě oblasti, z nichž jedna je ohraničená a druhá neohraničená.*

**Definice 5.27.** Ohraničená oblast se nazývá *vnitřek plochy  $S$* , značí se  $\text{Int } S$ ; neohraničená oblast se nazývá *vnějšek plochy  $S$* , značí se  $\text{Ext } S$  (nesmíme zaměňovat tyto termíny s pojmy vnitřek a vnějšek množiny z kapitoly (1.1)).

Každý list  $B_i$  budeme orientovat normálovým polem  $\vec{\nu}_i$  tak, aby v každém bodě  $a \in B_i^0$  měla polonormála  $p = a + t \vec{\nu}_i(a)$ ,  $t \in \langle 0, \infty \rangle$ , v libovolně malém okolí  $U(a)$  společné body s vnitřkem  $\text{Int } S$ . V tomto případě říkáme, že uzavřená orientovaná plocha

$$\mathbf{S} = \mathbf{B}_1 + \cdots + \mathbf{B}_k, \quad \mathbf{B}_i = (B_i, \vec{\nu}_i) \quad (i = 1, \dots, k),$$

je orientována vnitřním normálovým vektorem. O ploše  $-\mathbf{S}$  říkáme, že je orientována vnějším normálovým vektorem.

Budeme nyní definovat orientovaný plošný integrál přes orientovanou plochu.

**Definice 5.28.** Nechť  $\mathbf{S} = (S, \vec{\nu})$  je orientovaná plocha,  $\vec{\mathbf{F}}$  vektorové pole definované na  $S$ . *Orientovaným plošným integrálem pole  $\vec{\mathbf{F}}$  přes orientovanou plochu  $\mathbf{S}$  nazýváme integrál*

$$\iint_{\mathbf{S}} \vec{\mathbf{F}} \cdot d\vec{\mathbf{S}} = \iint_S (\vec{\mathbf{F}} \cdot \vec{\nu}) \, dS, \quad (5.19)$$

existuje-li integrál vpravo. Integrál (5.19) nazýváme *tokem pole  $\vec{\mathbf{F}}$  orientovanou plochou  $\mathbf{S}$* .

Platí zřejmě

$$\iint_{\mathbf{S}} \vec{\mathbf{F}} \cdot d\vec{\mathbf{S}} = - \iint_{-\mathbf{S}} \vec{\mathbf{F}} \cdot d\vec{\mathbf{S}}. \quad (5.20)$$

Jestliže  $\mathbf{S} = \mathbf{B}_1 + \dots + \mathbf{B}_k$ , pak

$$\iint_{\mathbf{S}} \vec{\mathbf{F}} \cdot d\vec{\mathbf{S}} = \sum_{i=1}^k \iint_{\mathbf{B}_i} \vec{\mathbf{F}} \cdot d\vec{\mathbf{S}}. \quad (5.21)$$

Je-li  $S$  orientovatelná plocha, která má parametrizaci  $\Phi : D \rightarrow \mathbb{R}^3$ , a je-li orientace  $\vec{\nu}$  určena parametrizací  $\Phi$ , platí pro orientovanou plochu  $\mathbf{S} = (S, \vec{\nu})$

$$\iint_{\mathbf{S}} \vec{\mathbf{F}} \cdot d\vec{\mathbf{S}} = \iint_D \vec{\mathbf{F}}(\Phi(u, v)) \cdot \left( \frac{\partial \Phi}{\partial u} \times \frac{\partial \Phi}{\partial v} \right) \, dudv. \quad (5.22)$$

Tento vzorec je zobecněním vzorce (5.14), který byl odvozen pro listy.

Uvedeme nyní příklady na výpočet orientovaných plošných integrálů přes orientované plochy.

**Příklad 5.29.** Máme stanovit tok pole  $\vec{\mathbf{F}}$ :

$$\vec{\mathbf{F}}(x, y, z) = (xz, yz, (x^2 + y^2)z)$$

orientovanou hranicí  $\mathbf{S}$  úseče paraboloidu

$$V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \leq z \leq 1\},$$

jež je orientována vnějším normálovým vektorem (viz obrázek).

**Řešení.** Je  $\mathbf{S} = \mathbf{B}_1 + \mathbf{B}_2$ , kde  $\mathbf{B}_1$  je kruh v rovině  $z = 1$ ,

$$B_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = 1, x^2 + y^2 \leq 1\},$$

$B_1$  je orientován tak, že jde o „horní stranu“, normálový vektor je zřejmě  $\mathbf{k} = (0, 0, 1)$ ;

$B_2$  je kus paraboloidu,

$$B_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = x^2 + y^2, x^2 + y^2 \leq 1\}.$$

$B_2$  je orientován tak, že jde o „spodní stranu“ - normálový vektor  $\vec{\nu}(x, y, z)$  svírá tupý úhel s vektorem  $\mathbf{e}_3$ .

V obou případech zvolíme parametry  $x = u, y = v$ .

Parametrizace listu  $B_1$ :

$$\Phi(u, v) = (u, v, 1),$$

$$D = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 : u^2 + v^2 \leq 1\},$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial u} \times \frac{\partial \Phi}{\partial v} = (1, 0, 0) \times (0, 1, 0) = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = (0, 0, 1).$$

Jde tedy o parametrizaci soulasnou s orientací listu  $B_1$ .

Parametrizace listu  $B_2$ :

$$\Psi(u, v) = (u, v, u^2 + v^2),$$

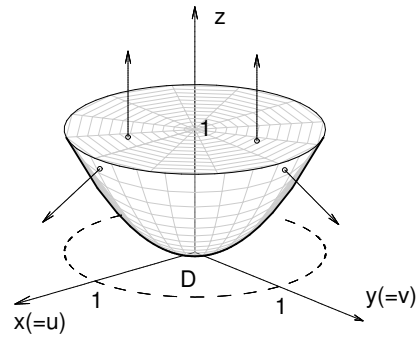
$$D = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 : u^2 + v^2 \leq 1\},$$

$$\frac{\partial \Psi}{\partial u} \times \frac{\partial \Psi}{\partial v} = (1, 0, 2u) \times (0, 1, 2v) = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & 0 & 2u \\ 0 & 1 & 2v \end{vmatrix} = (-2u, -2v, 1).$$

Jde o parametrizaci nesouhlasnou (třetí souřadnice vektoru  $\frac{\partial \Psi}{\partial u} \times \frac{\partial \Psi}{\partial v}$  je kladná, zatímco by měla být záporná) s orientací listu  $B_2$ , jde tedy o parametrizaci listu  $-B_2$ .

Tok vektoru orientovanou plochou  $S$  je

$$\begin{aligned} \iint_S \vec{\mathbf{F}} \cdot d\vec{\mathbf{S}} &= \iint_{B_1} \vec{\mathbf{F}} \cdot d\vec{\mathbf{S}} + \iint_{B_2} \vec{\mathbf{F}} \cdot d\vec{\mathbf{S}} = \iint_{B_1} \vec{\mathbf{F}} \cdot d\vec{\mathbf{S}} - \iint_{-B_2} \vec{\mathbf{F}} \cdot d\vec{\mathbf{S}} = \\ &= \iint_D (u, v, u^2 + v^2) \cdot (0, 0, 1) \, dudv - \\ &\quad - \iint_D (u(u^2 + v^2), v(u^2 + v^2), (u^2 + v^2)^2) \cdot (-2u, -2v, 1) \, dudv = \\ &= \iint_D (u^2 + v^2) \, dudv + \iint_D (u^2 + v^2)^2 \, dudv = \\ &= \iint_D (u^2 + v^2)(u^2 + v^2 + 1) \, dudv = \left| \begin{array}{l} u = \rho \cos \varphi \quad \rho \in \langle 0, 1 \rangle \\ v = \rho \sin \varphi \quad \varphi \in \langle 0, 2\pi \rangle \end{array} \right| = \end{aligned}$$



$$= \int_0^{2\pi} \left( \int_0^1 \rho^2(\rho^2 + 1)\rho \, d\rho \right) d\varphi = 2\pi \int_0^1 (\rho^5 + \rho^3) \, d\rho = \underline{\underline{\frac{5\pi}{6}}}.$$

Integrály  $\iint_{\mathbf{B}_1}$ ,  $\iint_{\mathbf{B}_2}$  jsme též mohli převést na neorientované - bylo by to trochu rychlejší, zejména u prvního integrálu.  $\square$

**Příklad 5.30.** Vypočítejte tok vektorového pole  $\vec{\mathbf{F}} = 2\mathbf{k}$  následujícími plochami

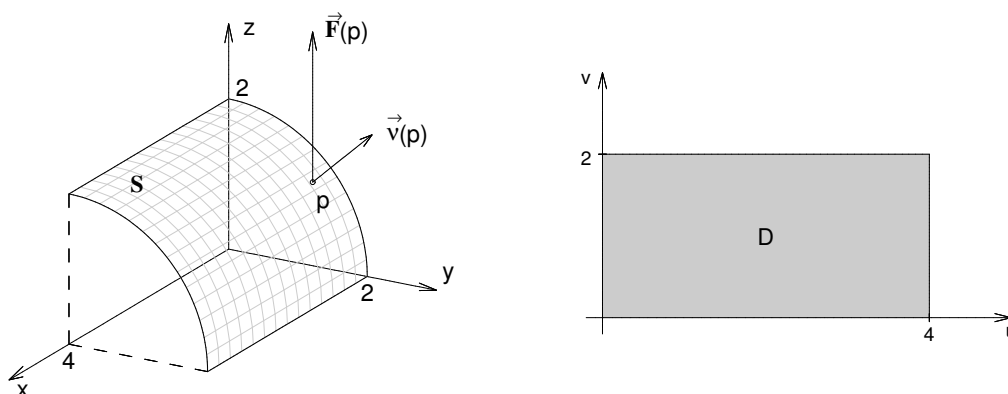
a)  $S$  je část válcové plochy  $y^2 + z^2 = 4$ ,  $0 \leq x \leq 4$ ,  $y \geq 0$ ,  $z \geq 0$ ,

b)  $S$  je část válcové plochy  $x^2 + y^2 = 4$ ,  $y \geq 0$ ,  $0 \leq z \leq 2$

orientovanými tak, že jejich normálové vektory svírají s vektorem  $\mathbf{k}$  ostrý nebo pravý úhel.

**Řešení.**

a) Zvolme  $\Phi$  :  $x = u$   
 $y = v$   $(u, v) \in D = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq u \leq 4, 0 \leq v \leq 2\}$   
 $z = \sqrt{4 - v^2}$



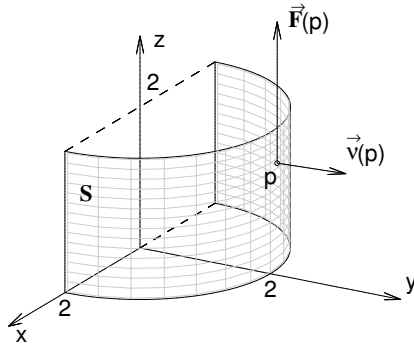
Parametrizace  $\Phi(u, v) = (u, v, \sqrt{4 - v^2})$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial u} \times \frac{\partial \Phi}{\partial v} = (1, 0, 0) \times \left(0, 1, \frac{-v}{\sqrt{4 - v^2}}\right) = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{-v}{\sqrt{4 - v^2}} \end{vmatrix} = \left(0, \frac{v}{\sqrt{4 - v^2}}, 1\right).$$

Normálový vektor neexistuje na části hranice obdélníku  $D$  (pro  $v = 2$ ), ale jedná se o množinu míry nula, což nemá vliv na výpočet. V našem případě (jelikož druhá souřadnice vypočteného normálového vektoru je kladná) je parametrizace souhlasná se zadanou orientací plochy  $S$ .

$$\begin{aligned} (\vec{\mathbf{F}} \circ \Phi)(u, v) &= \vec{\mathbf{F}}(u, v, \sqrt{4 - v^2}) = (0, 0, 2) \\ Q &= \iint_D (0, 0, 2) \cdot \left(0, \frac{v}{\sqrt{4 - v^2}}, 1\right) \, dudv = \int_0^4 \left( \int_0^2 2 \, dv \right) \, du = 16 \end{aligned}$$

b) Plocha  $S$  je znázorněna na obrázku.



Je zřejmé, že normálové vektory plochy  $S$  jsou v libovolném bodě kolmé k poli  $\vec{F}$ . Tok  $Q$  přes orientovanou plochu  $S$  je v tomto případě nulový, neboť

$$\vec{F} \cdot \vec{\nu} = 0 \quad \forall p \in S.$$

### 5.3 Integrovní věty

Pro matematiku a teoretickou fyziku jsou důležité vztahy mezi integrály definovanými na určitých rovinných nebo prostorových oblastech a integrály definovanými na hranicích těchto oblastí. Matematické věty, které tyto vztahy popisují, se nazývají *integrovní věty matematické analýzy*.

Mezi tyto věty řadíme *integrovní větu Gaussovu-Ostrogradského*, která vyjadřuje vztah mezi trojným integrálem přes prostorovou oblast a plošným integrálem přes uzavřenou plochu, která je hranicí této oblasti, a *integrovní větu Stokesovu*, která vyjadřuje vztah mezi plošným integrálem přes plochu s okrajem a křivkovým integrálem přes okraj této plochy neboli souvislou cirkulaci pole  $\vec{F}$  po okraji plochy s tokem rotace pole  $\vec{F}$  touto plochou. Rovinný případ Stokesovy věty, tzv. Greenova věta, byla již vysvětlena v kapitole (4.5).

**Věta 5.31 (Stokesova).** *Nechť vektorové pole  $\vec{F}$  je třídy  $C_1$  na oblasti  $G \subset \mathbb{R}^3$  a nechť  $S$  je orientovaná plocha s okrajem  $\partial S$ ,  $S \subset G$ , a nechť okraj  $\partial S$  je souhlasně orientovaný s  $S$ . Potom platí*

$$\int_{\partial S} \vec{F} \cdot d\vec{s} = \iint_S \operatorname{rot} \vec{F} \cdot d\vec{S} \quad (5.23)$$

Je-li  $\vec{F} = (F_1, F_2, F_3)$ , pak vzorec (5.23) má ve složkovém vyjádření tvar

$$\begin{aligned} \int_{\partial S} F_1 dx + F_2 dy + F_3 dz &= \\ &= \iint_S \left( \frac{\partial F_3}{\partial y} - \frac{\partial F_2}{\partial z} \right) dydz + \left( \frac{\partial F_1}{\partial z} - \frac{\partial F_3}{\partial x} \right) dzdx + \left( \frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \right) dxdy. \end{aligned}$$

**Příklad 5.32.** Užitím Stokesovy věty vypočtete cirkulaci pole  $\vec{F} = (y - z)\mathbf{i} + (z - x)\mathbf{j} + (x - y)\mathbf{k}$  po obvodu  $C$  trojúhelníka  $S$  s vrcholy  $A = (1, 0, 0)$ ,  $B = (0, 1, 0)$ ,  $C = (0, 0, 1)$  orientovaného pořadím vrcholů.

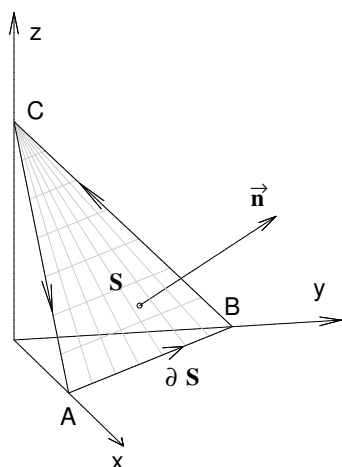
**Řešení.** Nejdříve vypočteme rotaci pole  $\vec{\mathbf{F}}$ :

$$\operatorname{rot} \vec{\mathbf{F}} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ y-z & z-x & x-y \end{vmatrix} = -2\mathbf{i} - 2\mathbf{j} - 2\mathbf{k} = -(2, 2, 2).$$

Trojúhelník  $S$  leží v rovině  $x + y + z = 1$ . Tedy parametrické rovnice plochy  $S$  jsou tvaru

$$\begin{aligned} \Phi: \quad x &= u \\ y &= v \\ z &= 1 - u - v \end{aligned} \quad (u, v) \in D \subset \mathbb{R}^2$$

$$D = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 : u \in \langle 0, 1 \rangle, v \in \langle 0, 1 - u \rangle\}.$$



Parametrizace  $\Phi(u, v) = (u, v, 1 - u - v)$ , tedy

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Phi}{\partial u} &= (1, 0, -1) \\ \frac{\partial \Phi}{\partial v} &= (0, 1, -1) \\ \frac{\partial \Phi}{\partial u} \times \frac{\partial \Phi}{\partial v} &= (1, 1, 1) \end{aligned}$$

Tedy normála  $\vec{\mathbf{n}}$  parametrizace  $\Phi$  je souhlasná s okrajem  $\partial S = C$  trojúhelníka  $S$  (viz obrázek).

$$\text{Dále } (\operatorname{rot} \vec{\mathbf{F}} \circ \Phi)(u, v) = \operatorname{rot} \vec{\mathbf{F}}(\Phi(u, v)) = \operatorname{rot} \vec{\mathbf{F}}(u, v, 1 - u - v) = -(2, 2, 2).$$

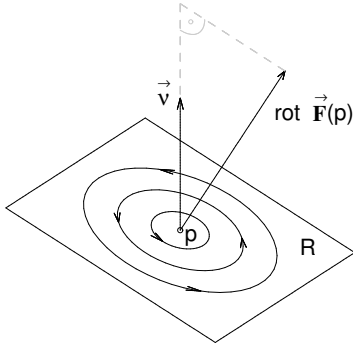
Podle Stokesovy věty platí

$$\begin{aligned} \int_{\partial S} \vec{\mathbf{F}} \cdot d\vec{\mathbf{s}} &= \iint_S \operatorname{rot} \vec{\mathbf{F}} \cdot d\vec{\mathbf{S}} = \iint_D (\operatorname{rot} \vec{\mathbf{F}} \circ \Phi) \cdot \left( \frac{\partial \Phi}{\partial u} \times \frac{\partial \Phi}{\partial v} \right) dudv = \\ &= - \int_0^1 \left( \int_0^{1-u} (2, 2, 2) \cdot (1, 1, 1) dv \right) du = -6 \int_0^1 (1 - u) du = -3. \end{aligned}$$

□

Nechť nyní  $\vec{\mathbf{F}}$  je pole třídy  $C_1$  na oblasti  $G \subset \mathbb{R}^3$  a nechť  $p \in G$ . Proložme bodem  $p$  rovinu  $R$ , jejíž normálový vektor je  $\vec{\mathbf{v}}$ . Uvažujme v rovině  $R$  posloupnost  $(\mathbf{C}_n)_{n=1}^{\infty}$  orientovaných jednoduchých uzavřených křivek, které jsou souhlasně orientovány vzhledem k orientaci  $\vec{\mathbf{v}}$  a v jejichž vnitřku (v rovině  $R$ ) se nachází bod  $p$ .





Předpokládejme dále, že křivky  $C_n$  se „stahují“ k bodu  $p$ , tj.  $\text{diam } C_n \rightarrow 0$  (viz obrázek).

Budiž  $S_n$  plocha v  $R$  ohraničená křivkou  $C_n$  a orientovaná vektorem  $\vec{\nu}$ , takže  $\partial S_n = C_n$ .

Použijeme-li Stokesovu větu, dostaneme pro cirkulace pole  $\vec{F}$  po křivkách  $C_n$ :

$$\int_{C_n} \vec{F} \cdot d\vec{s} = \iint_{S_n} (\text{rot } \vec{F} \cdot \vec{\nu}) dS.$$

Použijeme-li na plošný integrál vpravo větu o střední hodnotě integrálního počtu (jež platí analogicky jako pro  $n$ -rozměrný integrál v  $\mathbb{R}^n$ ), dostaneme

$$\iint_{S_n} (\text{rot } \vec{F} \cdot \vec{\nu}) dS = (\text{rot } \vec{F} \cdot \vec{\nu})(q_n) \nu_2(S_n),$$

kde  $q_n \in S_n$ . Tudíž

$$(\text{rot } \vec{F} \cdot \vec{\nu})(q_n) = \frac{\int_{C_n} \vec{F} \cdot d\vec{s}}{\nu_2(S_n)}.$$

Pro  $n \rightarrow \infty$  je  $q_n \rightarrow p$  (neboť  $\text{diam } C_n = \text{diam } S_n \rightarrow 0$ ) a v důsledku spojitosti pole  $\text{rot } \vec{F}$  a toho, že  $\vec{\nu}$  je konstantní, je

$$(\text{rot } \vec{F} \cdot \vec{\nu})(q_n) \rightarrow \text{rot } \vec{F}(p) \cdot \vec{\nu},$$

takže

$$\text{rot } \vec{F}(p) \cdot \vec{\nu} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\int_{C_n} \vec{F} \cdot d\vec{s}}{\nu_2(S_n)}.$$

Projekce vektoru  $\text{rot } \vec{F}(p)$  do směru  $\vec{\nu}$  vyjadřuje tak hustotu „víření“ pole  $\vec{F}$  v rovině  $R$  kolem bodu  $p$ . Maximální hustota víru pole  $\vec{F}$  v bodě  $p$  je v rovině mající směr souhlasně kolineární s vektorem  $\text{rot } \vec{F}(p)$  (je-li  $\text{rot } \vec{F}(p) \neq \mathbf{o}$ ).

Než přejdeme k formulaci věty Gaussovy-Ostrogradského, zavedeme některé důležité pojmy:

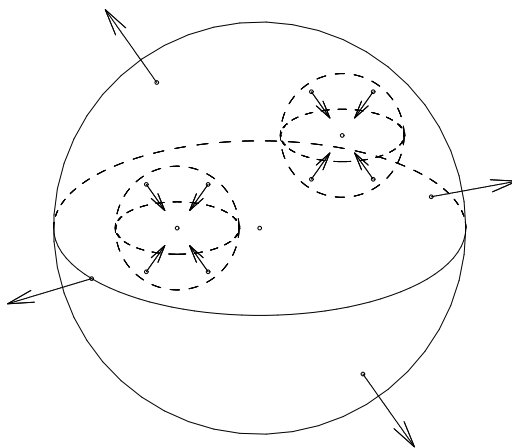
**Definice 5.33.** Ohraničenou oblast  $G \subset \mathbb{R}^3$  nazveme *regulární oblastí*, je-li její hranice uzavřená po částech hladká plocha nebo je-li disjunktním sjednocením konečného počtu takových ploch. Uzávěr  $\bar{G} = V$  nazveme *uzavřenou regulární oblastí*, hranici oblasti  $V$  označíme  $\partial V$ .

Hranice  $\partial V$  je buď jediná plocha  $S$  (pak se oblast  $V$  nazývá *jednoduše souvislá*); *kladně orientovanou hranicí*  $\partial V$  budeme pak rozumět orientovanou plochu  $S$  vnějším normálovým vektorem. Nebo je hranice  $\partial V$  složena z „vnější“ uzavřené plochy  $S_1$  a z

„vnitřních“ uzavřených ploch  $S_2, \dots, S_k$  ( $S_i \subset \text{Int}S_1$ ,  $i = 2, \dots, k$ ,  $\overline{\text{Int}S_i} \cap \overline{\text{Int}S_j} = \emptyset$  pro  $i \neq j$ ,  $i \neq 1$ ,  $j \neq 1$ ). V tomto případě se oblast  $V$  nazývá *k-násobně souvislá*; je

$$V = \overline{\text{Int}S_1} \setminus \bigcup_{i=2}^k \text{Int}S_i.$$

*Kladně orientovanou hranicí*  $\partial V$  budeme rozumět v tomto případě soubor orientovaných ploch  $\mathbf{S}_1, \mathbf{S}_2, \dots, \mathbf{S}_k$ , kde  $\mathbf{S}_1$  je orientována vnějším normálovým vektorem a vnitřní plochy  $\mathbf{S}_2, \dots, \mathbf{S}_k$  jsou orientovány vnitřním normálovým vektorem (viz obrázek (5.5)); můžeme též říkat, že *hranice*  $\partial V$  je orientována vnějším normálovým vektorem vzhledem k oblasti  $V$ .



Obr. 5.5: Trojnásobně souvislá oblast s kladně orientovanou hranicí

Píšeme symbolicky

$$\partial V = \mathbf{S}_1 + \mathbf{S}_2 + \dots + \mathbf{S}_k$$

a definujeme

$$\iint_{\partial V} \vec{\mathbf{F}} \cdot d\vec{\mathbf{S}} = \sum_{i=1}^k \iint_{\mathbf{S}_i} \vec{\mathbf{F}} \cdot d\vec{\mathbf{S}}$$

Opačně orientovanou hranici  $-\partial V$  nazýváme *záporně orientovanou hranicí* nebo *hranicí orientovanou vnitřním normálovým vektorem* (vzhledem k oblasti  $V$ ).

**Definice 5.34.** Rozkladem uzavřené regulární oblasti  $V$  rozumíme konečný systém uzavřených regulárních oblastí  $\{V_1, \dots, V_m\}$  takový, že platí

- (1)  $V = \bigcup_{i=1}^m V_i$ ,
- (2) žádné dvě oblasti  $V_i, V_j$  ( $i \neq j$ ) nemají společné vnitřní body
- (3)  $V_i \cap V_j$  ( $i \neq j$ ) je buď konečná množina bodů, nebo konečný počet křivek, nebo konečný počet ploch bez společných vnitřních bodů.

Je-li na  $V$  definováno spojitě vektorové pole  $\vec{\mathbf{F}}$ , lze dokázat, že platí

$$\iint_{\partial V} \vec{\mathbf{F}} \cdot d\vec{\mathbf{S}} = \sum_{i=1}^m \iint_{\partial V_i} \vec{\mathbf{F}} \cdot d\vec{\mathbf{S}}. \quad (5.24)$$

**Věta 5.35 (Gaussova-Ostrogradského).** *Nechť pole  $\vec{\mathbf{F}}$  je třídy  $C_1$  na uzavřené regulární oblasti  $V$ , jejíž hranice  $\partial V$  je kladně orientována. Potom platí*

$$\iint_{\partial V} \vec{\mathbf{F}} \cdot d\vec{\mathbf{S}} = \iiint_V \operatorname{div} \vec{\mathbf{F}} \, dx \, dy \, dz \quad (5.25)$$

nebo ve složkovém tvaru, je-li  $\vec{\mathbf{F}} = (F_1, F_2, F_3)$ ,

$$\iint_{\partial V} F_1 \, dy \, dz + F_2 \, dz \, dx + F_3 \, dx \, dy = \iiint_V \left( \frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y} + \frac{\partial F_3}{\partial z} \right) dx \, dy \, dz. \quad (5.26)$$

**Příklad 5.36.** Užitím věty Gaussovy-Ostrogradského vypočtete tok vektorového pole

$$\vec{\mathbf{F}} = xz\mathbf{i} + yz\mathbf{j} + (x^2 + y^2)z\mathbf{k}$$

orientovanou hranicí  $\mathbf{S}$  úseče paraboloidu

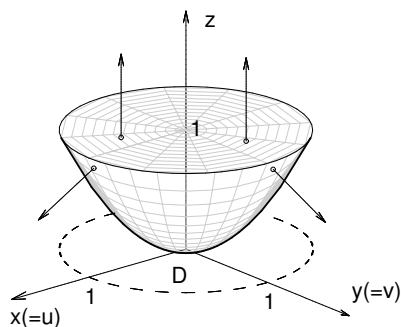
$$V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \leq z \leq 1\}$$

orientovanou vnějším normálovým vektorem (viz obrázek).

**Řešení.**

$$\operatorname{div} \vec{\mathbf{F}} = \frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y} + \frac{\partial F_3}{\partial z} = z + z + x^2 + y^2.$$

$$\text{Tedy } \iint_{\mathbf{S}} \vec{\mathbf{F}} \cdot d\vec{\mathbf{S}} = \iiint_V (2z + x^2 + y^2) \, dx \, dy \, dz, \text{ kde } \mathbf{S} = \partial V.$$



Použijeme transformaci do cylindrických souřadnic, tj.

$$\begin{aligned} x &= \rho \cos \varphi & \varphi &\in \langle 0, 2\pi \rangle \\ y &= \rho \sin \varphi & \rho &\in \langle 0, 1 \rangle \\ z &= z & z &\in \langle \rho^2, 1 \rangle \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \iiint_V (2z + x^2 + y^2) dx dy dz &= \int_0^{2\pi} \left( \int_0^1 \left( \int_{\rho^2}^1 \rho \cdot (2z + \rho^2) dz \right) d\rho \right) d\varphi = \\ &= 2\pi \cdot \int_0^1 (\rho + \rho^3 - 2\rho^5) d\rho = \frac{5\pi}{6}. \end{aligned}$$

Vidíme, že výsledek je totožný s výsledkem příkladu (5.29) v odstavci (5.2), kde jsme uvedený příklad počítali podle definičního vzorce pro výpočet orientovaného plošného integrálu.

Je tedy zřejmé, že Gaussovu-Ostrogradského větu je výhodné použít v případě orientovaného plošného integrálu přes počástech hladkou orientovanou uzavřenou plochu.  $\square$

Nechť  $\vec{\mathbf{F}}$  je pole třídy  $C_1$  v oblasti  $G \subset \mathbb{R}^3$ ,  $V \subset G$  regulární uzavřená oblast,  $\partial V$  kladně orientovaná hranice. Představíme-li si např. že  $\vec{\mathbf{F}}$  je pole rychlostí stacionárního proudění nestlačitelné kapaliny a  $\iint_{\partial V} \vec{\mathbf{F}} \cdot \vec{d\mathbf{S}}$  je tok pole  $\vec{\mathbf{F}}$  ve směru vnějšího normálového vektoru k  $\partial V$ , je poměr

$$\frac{\iint_{\partial V} \vec{\mathbf{F}} \cdot \vec{d\mathbf{S}}}{\nu(V)}$$

jakousi „mírou“, která vyjadřuje *vydatnost zdrojů* (je-li podíl kladný) kapaliny uvnitř oblasti  $V$ . (Je-li podíl záporný, převažují v tělese tzv. „nory“). Budiž  $p \in G$  a uvažujme posloupnost oblastí  $(V_n)_{n=1}^\infty$ ,  $V_n \subset G$ ,  $p \in V_n^0$  ( $n = 1, 2, \dots$ ),  $\text{diam} V_n \rightarrow 0$ . Limita

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\iint_{\partial V_n} \vec{\mathbf{F}} \cdot \vec{d\mathbf{S}}}{\nu(V_n)}$$

charakterizuje, zda bod  $p$  je bodem *zdroje* (je-li limita kladná) či naopak zda  $p$  je bodem „nory“, v níž kapalina zaniká (je-li limita záporná).

Tuto limitu můžeme stanovit pomocí Gaussovy-Ostrogradského věty. Podle ní je

$$\iint_{\partial V_n} \vec{\mathbf{F}} \cdot \vec{d\mathbf{S}} = \iiint_V \text{div} \vec{\mathbf{F}} dx dy dz = \text{div} \vec{\mathbf{F}}(p_n) \nu(V_n), \quad p_n \in V_n.$$

(Použili jsme větu o střední hodnotě pro trojný integrál.) Odtud

$$\text{div} \vec{\mathbf{F}}(p_n) = \frac{\iint_{\partial V_n} \vec{\mathbf{F}} \cdot \vec{d\mathbf{S}}}{\nu(V_n)}$$

Protože  $\text{diam} V_n \rightarrow 0$ ,  $p \in V_n$ , je  $|p_n - p| \rightarrow 0$ , a ze spojitosti funkce  $\text{div} \vec{\mathbf{F}}$  plyne, že  $\text{div} \vec{\mathbf{F}}(p_n) \rightarrow \text{div} \vec{\mathbf{F}}(p)$  pro  $n \rightarrow \infty$ . Je tedy

$$\text{div} \vec{\mathbf{F}}(p) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\iint_{\partial V_n} \vec{\mathbf{F}} \cdot \vec{d\mathbf{S}}}{\nu(V_n)}.$$

Z významu podílů na pravé straně je patrné, že divergenci pole lze nazvat *hustotou jeho zdrojů*.

Jestliže divergence pole  $\vec{\mathbf{F}}$  je v oblasti  $G$  nulová, nazývá se pole  $\vec{\mathbf{F}}$  *nezřídlové*.

Nulovost divergence pole  $\vec{\mathbf{F}}$  v oblasti  $G$  znamená (použijeme-li Gaussovu-Ostrogradského větu), že tok pole  $\vec{\mathbf{F}}$  každou uzavřenou plochou  $S$ , ležící spolu se svým vnitřkem v  $G$ , je nulový. To můžeme interpretovat tak, že v  $G$  žádné zdroje („zřídla“) nejsou.

Příkladem nezřídlového pole je pole rotací některého pole třídy  $C_2$ . Je-li  $\vec{\mathbf{F}} = \text{rot} \vec{\mathbf{H}}$ , kde  $\vec{\mathbf{H}}$  je pole třídy  $C_2$  v oblasti  $G$ , přesvědčíme se snadno, že  $\text{div} \vec{\mathbf{F}} = \text{div} \text{rot} \vec{\mathbf{H}} = 0$ . Plyne to též z toho, že pole rotací má nulový tok každou uzavřenou plochou.

Nezřídlové pole  $\vec{\mathbf{F}}$  se též nazývá *solenoidální*. Objasníme tento termín.

Nechť  $\vec{\mathbf{F}}$  je pole třídy  $C_1$  v oblasti  $G \subset \mathbb{R}^3$ . Každá křivka  $\gamma$  ležící v  $G$ , která má v každém svém bodě směr pole  $\vec{\mathbf{F}}$  (tj. pro každé  $p \in \gamma$  je tečný vektor  $\vec{\tau}(p)$  křivky  $\gamma$  kolineární s vektorem  $\vec{\mathbf{F}}(p)$ ), se nazývá *vektorová křivka* pole  $\vec{\mathbf{F}}$ . (Je-li  $\vec{\mathbf{F}}$  interpretováno jako silové pole, mluvíme o *silokřivce*.) Je-li  $\varphi$  vhodná parametrizace křivky  $\gamma$ , platí

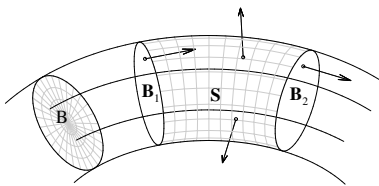
$$\varphi'(t) = \vec{\mathbf{F}}(\varphi(t))$$

a nalezení vektorových křivek vede k řešení vektorové diferenciální rovnice

$$\dot{x} = \vec{\mathbf{F}}(x).$$

Z teorie diferenciálních rovnic plyne, že každým bodem oblasti  $G$  prochází právě jedna vektorová křivka pole  $\vec{\mathbf{F}}$ .

Nechť  $B$  je kus plochy (list), ležící v  $G$  a protínající vektorové křivky. Vektorové křivky pole  $\vec{\mathbf{F}}$  procházející body listu  $B$  vyplní část oblasti  $G$ , která se nazývá *vektorová trubice* pole  $\vec{\mathbf{F}}$  (viz obrázek).



Vezmeme-li dva příčné řezy vektorové trubice (dostatečně blízké), vymezi nám tyto řezy část vektorové trubice  $V$ , která bude regulární oblastí, jejíž hranice  $\partial V$  se bude skládat z ploch  $B_1, B_2$  daných řezů a z „pláště“  $S$  vektorové trubice.

Orientujme  $\partial V$  vnějším normálovým vektorem, přitom orientujme plochy  $B_1, B_2$  „souhlasně“, tj. tak, aby např. orientující normálové vektory  $\vec{\nu}_1, \vec{\nu}_2$  k plochám  $B_1, B_2$  svíraly ostrý úhel se směrem pole  $\vec{\mathbf{F}}$  v příslušném bodě (viz opět obrázek). Je pak  $\partial V = B_2 + (-B_1) + S$  (nebo  $\partial V = (-B_2) + B_1 + S$ ). Je-li  $\text{div} \vec{\mathbf{F}} = 0$  v  $G$ , pak podle Gaussovy-Ostrogradského věty je  $\iint_{\partial V} \vec{\mathbf{F}} \cdot d\vec{\mathbf{S}} = 0$ , tedy

$$\iint_{B_2} \vec{\mathbf{F}} \cdot d\vec{\mathbf{S}} + \iint_{-B_1} \vec{\mathbf{F}} \cdot d\vec{\mathbf{S}} + \iint_S \vec{\mathbf{F}} \cdot d\vec{\mathbf{S}} = 0. \quad (5.27)$$

Plášť  $S$  je tvořen vektorovými čarami, které procházejí krajními body ploch  $B_1, B_2$ ; je-li  $\vec{\nu}(p)$  normálový vektor k  $S$  v bodě  $p$ , pak je kolmý k tečnému vektoru  $\vec{\tau}(p)$  vektorové křivky procházející bodem  $p$ , a tedy je také kolmý k vektoru  $\vec{F}(p)$ . Je tedy  $\vec{F} \cdot \vec{\nu} = 0$  na  $S$ , takže

$$\iint_S \vec{F} \cdot d\vec{S} = \iint_S (\vec{F} \cdot \vec{\nu}) dS = 0.$$

Odtud a z rovnosti (5.27) plyne

$$\iint_{B_1} \vec{F} \cdot d\vec{S} = \iint_{B_2} \vec{F} \cdot d\vec{S}.$$

To znamená, že u solenoidálního pole  $\vec{F}$  je tok pole  $\vec{F}$  libovolným řezem dané vektorové trubice pole  $\vec{F}$  stále týž, což můžeme stručně vyjádřit takto: *Tok solenoidálního pole  $\vec{F}$  vektorovou trubicí tohoto pole je konstantní.*

## 5.4 Aplikace plošného integrálu

### Fyzikální aplikace

**Věta 5.37.** *Nechť je  $S$  orientovaná plocha ležící v nějaké trojrozměrné oblasti  $G$ . Nechť v  $G$  proudí kapalina tak, že složky rychlosti v bodě  $(x, y, z) \in G$  jsou  $F_1(x, y, z)$ ,  $F_2(x, y, z)$ ,  $F_3(x, y, z)$  spojité funkce na  $G$ . Potom tok kapaliny plochou  $S$  ve smyslu orientované normály je*

$$\iint_S F_1(x, y, z) dydz + F_2(x, y, z) dx dz + F_3(x, y, z) dx dy. \quad (5.28)$$

**Příklad 5.38.** Dokažte, že tok polohového vektoru  $\vec{r}$  libovolnou uzavřenou plochou je roven trojnásobnému objemu tělesa ohraničeného touto plochou.

**Řešení.**  $\vec{r} = xi + yj + zk$ . Pro tok vektoru  $\vec{r}$  plochou  $S$  platí:

$$T = \iint_S x dydz + y dx dz + z dx dy.$$

Máme uzavřenou plochu, platí Ostrogradského věta.

$$T = \iint_S x dydz + y dx dz + z dx dy = \iiint_V (1 + 1 + 1) dx dy dz = 3V,$$

kde  $V$  je objem uzavřené plochy  $S$ . □

### Užití Stokesovy věty v magnetostatice

Z fyziky je známo, že cirkulace intenzity  $\vec{H} \in C_1(G)$ ,  $G \subset \mathbb{R}^3$  magnetického pole po libovolné jednoduché uzavřené křivce  $C$  se rovná elektrickému proudu protékajícímu vnitřkem křivky. Jestliže tento proud má v oblasti  $G$  spojitou hustotu  $\vec{J}$ , pak platí

$$\int_C \vec{H} \cdot d\vec{s} = \iint_S \vec{J} \cdot d\vec{S},$$

kde  $S$  je okraj plochy  $S$ ,  $S \subset G$ , přičemž  $C$  a  $S$  jsou souhlasně orientovány. Podle Stokesovy věty je

$$\int_C \vec{H} \cdot d\vec{s} = \iint_S \operatorname{rot} \vec{H} \cdot d\vec{S},$$

máme tedy

$$\iint_S (\vec{J} - \operatorname{rot} \vec{H}) \cdot d\vec{S} = 0.$$

Protože tato rovnost platí pro každou uzavřenou křivku  $C$ ,  $C \subset G$ , a tedy i pro každou plochu  $S$ ,  $S \subset G$ , takovou že  $\partial S = C$ , plyne z předpokladu spojitosti integrandu, že v  $G$  platí rovnost

$$\operatorname{rot} \vec{H} = \vec{J}.$$

### Užití Gaussovy-Ostrogradského věty v elektrostatice

Z fyziky je známo, že tok elektrické indukce  $\vec{D}$  kladně orientovanou hranicí tělesa  $T$  se rovná velikosti náboje uvnitř tělesa. Je-li náboj rozložen v oblasti  $G \subset \mathbb{R}^3$  se spojitou hustotou  $\rho$ , pak pro každé těleso  $T \subset G$  platí

$$\iint_{\partial T} \vec{D} \cdot d\vec{S} = \iiint_T \rho \, d\nu$$

Podle Gaussovy-Ostrogradského věty je

$$\iint_{\partial T} \vec{D} \cdot d\vec{S} = \iiint_T \operatorname{div} \vec{D} \, d\nu.$$

Z těchto rovností dostaneme rovnost

$$\iiint_T (\operatorname{div} \vec{D} - \rho) \, d\nu = 0.$$

Protože tato rovnost platí pro každé těleso  $T \subset G$ , plyne z toho za předpokladu, že integrand je spojitá funkce, že všude v  $G$  platí

$$\operatorname{div} \vec{D} = \rho,$$

což je jedna z Maxwellových rovnic.

## Maplety

Odkaz na maplety:

1. [neorientovaný plošný integrál](#),
2. [orientovaný plošný integrál](#),
3. [Gauss-Ostrogradského věta](#),
4. [Stokesova věta](#).

## Cvičení

1. Vypočtete  $\iint_S \frac{dS}{(1+x+z)^2}$ , kde  $S$  je část roviny  $x + y + z = 1$  v I. oktantu.
2. Vypočtete  $\iint_S z \, dS$ , kde  $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = \sqrt{x^2 + y^2}, 1 \leq z \leq 2\}$ .
3. Vypočtete  $\iint_S dS$ , kde  $S$  je obdélník  $-2 \leq y \leq 2, 0 \leq x \leq 1$  ležící v rovině  $z = 3$ .
4. Vypočtete  $\iint_S dS$ , kde  $S$  je část válcové plochy  $y^2 + z^2 = 4, z \geq 0, 0 \leq x \leq 3$ .
5. Vypočtete  $\iint_S dS$ , kde  $S$  je parabolická plocha  $z = x^2 + y^2, 0 \leq z \leq 9$ .
6. Vypočtete  $\iint_S (x^2 + y^2) \, dS$ , kde  $S$  je povrch kužele  $\sqrt{x^2 + y^2} \leq z \leq 1$ .
7. Vypočtete orientované plošné integrály:
  - a)  $\iint_S (z - 1)^2 \, dx \, dy$ ,  $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 2z, 1 \leq z \leq 2\}$ .  
Plocha  $S$  je orientovaná vnějším normálovým vektorem.
  - b)  $\iint_S z \, dx \, dy + x \, dx \, dz + y \, dy \, dz$ ,  
 $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x - y + z = 1, x \geq 0, y \leq 0, z \geq 0\}$ . Plocha  $S$  je orientovaná tak, že normálový vektor svírá s osou  $z$  ostrý úhel.
  - c)  $\iint_S yz \, dx \, dy + xz \, dy \, dz + xy \, dx \, dz$ , kde plocha  $S$  je povrch čtvrtiny válce  
 $x^2 + y^2 \leq R^2, x \geq 0, y \geq 0, 0 \leq z \leq a$ , orientovaná vnějším normálovým vektorem.
8. Je dáno vektorové pole  $\vec{\mathbf{F}}$ :
  - i)  $\vec{\mathbf{F}} = 3\mathbf{k}$
  - ii)  $\vec{\mathbf{F}} = 2\mathbf{i} + \mathbf{j} + 3\mathbf{k}$
  - iii)  $\vec{\mathbf{F}} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$
  - iv)  $\vec{\mathbf{F}} = yz\mathbf{i} + xz\mathbf{j} + xy\mathbf{k}$

Vypočtete tok vektorového pole  $\vec{\mathbf{F}}$  orientovanou plochou  $S$ :



- a) Obdélník ležící v rovině  $z = 3$ , který je ohraničený nerovnostmi  $-2 \leq y \leq 2$ ,  $0 \leq x \leq 1$ , normálový vektor má shodný směr s vektorem  $\mathbf{k}$ .
- b) Rovina  $\frac{x}{2} + \frac{y}{3} + \frac{z}{4} = 1$  v I. oktantu, jejíž normálový vektor svírá s osou  $z$  ostrý úhel.
- c) Parabolická plocha  $z = x^2 + y^2$ ,  $0 \leq z \leq 9$ , orientovaná vnějším normálovým vektorem.
- d) Kuželová plocha  $z = 4 - \sqrt{x^2 + y^2}$ ,  $z \geq 0$ , orientovaná vnějším normálovým vektorem.

9. Uvažujme vektorové pole  $\vec{\mathbf{F}}$ :

- i)  $\vec{\mathbf{F}} = -z\mathbf{i} + x\mathbf{j} + 3\mathbf{k}$
- ii)  $\vec{\mathbf{F}} = 2y^2\mathbf{i} + yz\mathbf{j} - x\mathbf{k}$
- iii)  $\vec{\mathbf{F}} = 3x\mathbf{i} - xy^3\mathbf{j} + z\mathbf{k}$

Užitím Stokesovy věty vypočtete práci vektoru  $\vec{\mathbf{F}}$  po orientované uzavřené křivce  $\mathbf{K}$ :

- a)  $K = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = 4, z = 1\}$ ,  $\mathbf{K}$  je orientovaná při pohledu z kladné osy  $z$  ve směru hodinových ručiček.
- b)  $K = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \frac{y^2}{9} + \frac{z^2}{4} = 1, x = 0\}$ ,  $\mathbf{K}$  je orientovaná při pohledu z kladné osy  $x$  proti směru hodinových ručiček.
- c)  $K$  je obvod obdélníka s vrcholy  $A = (-2, 0, 0)$ ,  $B = (-2, 0, 3)$ ,  $C = (2, 0, 3)$ ,  $D = (2, 0, 0)$  orientovaný pořadím vrcholů.
- d)  $K$  je obvod trojúhelníka s vrcholy  $A = (2, 0, 0)$ ,  $B = (0, 3, 0)$ ,  $C = (0, 0, 4)$  orientovaný pořadím vrcholů.

10. Uvažujme vektorové pole  $\vec{\mathbf{F}}$ :

- i)  $\vec{\mathbf{F}} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$
- ii)  $\vec{\mathbf{F}} = x^2\mathbf{i} + y\mathbf{j} + \mathbf{k}$
- iii)  $\vec{\mathbf{F}} = x\mathbf{i} + y^2\mathbf{j} + z\mathbf{k}$
- iv)  $\vec{\mathbf{F}} = \mathbf{i} + \mathbf{j} + z^2\mathbf{k}$

Užitím Gaussovy-Ostrogradského věty vypočtete tok vektorového pole  $\vec{\mathbf{F}}$  uzavřenou orientovanou plochou  $\mathbf{S}$ , orientovanou vnějším normálovým vektorem:

- a)  $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 2, 0 \leq z \leq 3\}$ .
- b)  $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 4\}$ .
- c)  $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = 4, 0 \leq z \leq 3\}$ .
- d)  $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = 4 - \sqrt{x^2 + y^2}, z \geq 0\}$ .
- e)  $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = x^2 + y^2, 0 \leq z \leq 4\}$ .

## Výsledky

- $\sqrt{3}(\ln 2 - \frac{1}{2})$
- $\frac{14}{3} \pi \sqrt{2}$

3. 4

4.  $6\pi$

5.  $\frac{\pi}{6} (37\sqrt{37} - 1)$

6.  $\frac{\pi}{2} (1 + \sqrt{2})$

7. a)  $\frac{\pi}{2}$

b)  $-\frac{1}{6}$

c)  $aR^2 \left( \frac{2R}{3} + \frac{\pi a}{8} \right)$

8. a) i) 12; ii) 12; iii) 12; iv) 0

b) i) 9; ii) 25; iii) 12; iv)  $\frac{61}{6}$

c) i)  $-27\pi$ ; ii)  $-27\pi$ ; iii)  $\frac{81}{2}\pi$ ; iv) 0

d) i)  $48\pi$ ; ii)  $48\pi$ ; iii)  $64\pi$ ; iv) 0

9. a) i)  $-4\pi$ ; ii) 0; iii) 0

b) i) 0; ii) 0; iii) 0

c) i)  $-12$ ; ii) 12; iii) 0

d) i) 1; ii) 14; iii) 8,1

10. a) i) 18; ii) 12; iii) 24; iv) 18

b) i)  $32\pi$ ; ii)  $\frac{32}{3}\pi$ ; iii)  $\frac{64}{3}\pi$ ; iv) 0

c) i)  $36\pi$ ; ii)  $12\pi$ ; iii)  $24\pi$ ; iv)  $36\pi$

d) i)  $64\pi$ ; ii)  $\frac{64}{3}\pi$ ; iii)  $\frac{128}{3}\pi$ ; iv)  $\frac{128}{3}\pi$

e) i)  $24\pi$ ; ii)  $8\pi$ ; iii)  $16\pi$ ; iv)  $\frac{128}{3}\pi$

## Literatura

- [1] Brabec, J., Hrůza, B.: *Matematická analýza II*, SNTL/ALFA, Praha, 1986
- [2] Brabec, J.: *Matematická analýza II/2*, ČVUT Praha, 1980. Učební text.
- [3] Budak, B. M., Fomin, S. V.: *Multiple Integrals, Field Theory and Series*, Mir, Moskva, 1973
- [4] Diblík, J., Růžičková, M.: *Obyčejné diferenciální rovnice*, EDIS-vydavatelstvo ŽU, 2008.
- [5] Krupková, V.: *Diferenciální a integrální počet funkcí více proměnných*, VUT v Brně, nakladatelství VUTIUM, 1999. Učební text.
- [6] Kuben, J.: *Obyčejné diferenciální rovnice*, VA Brno, 1995. Učební text.
- [7] Kurzweil, J.: *Obyčejné diferenciální rovnice*, SNTL, Praha 1978.
- [8] Medveď, M.: *Dynamické systémy*, VEDA, Bratislava, 1988.
- [9] Nagy, J., Nováková, E., Vacek, M.: *Vektorová analýza*, Matematika pro vysoké školy technické sešit VIII. SNTL Praha, 1984.
- [10] Nagy, J.: *Soustavy obyčejných diferenciálních rovnic*, Matematika pro vysoké školy technické sešit XV. SNTL Praha, 1980.
- [11] Nagy, J.: *Stabilita řešení obyčejných diferenciálních rovnic*, Matematika pro vysoké školy technické sešit XVI. SNTL Praha, 1980.
- [12] Pták, P.: *Diferenciální rovnice, Laplaceova transformace*, ČVUT v Praze, 1999.
- [13] Ráb, M.: *Metody řešení obyčejných diferenciálních rovnic*, MU Brno, PřF, 1998.
- [14] Sikorski, R.: *Diferenciální a integrální počet funkce více proměnných*, ACADEMIA Praha, 1973.